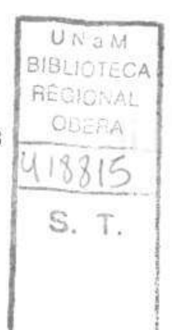
ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Segunda edición 1956
Tercera edición 1958
Cuarta edición 1960
Quinta edición 1962
Sexta edición 1964
Séptima edición 1965
Octava edición 1967
Novena edición 1970
Décima edición 1973
Decimoprimera edición 1974
Decimosegunda edición 1975
Decimotercera edición 1977
Decimocuarta edición 1979
Decimoquinta edición 1980
Decimosexta edición 1982
Decimoséptima edición 1984
Decimooctava edición 1986
Decimonovena edición 1991
Vigésima edición 1993
Vigesimoprimera edición 1997
Vigesimosegunda edición 2004

Diseño de tapa: Patricia Baggio y Diego Linares

I.S.B.N. 950-553-122-2

Queda hecho el depósito que establece la ley 11.723



Impreso en Argentina

La matemática es mucho más que la suma total de sus aplicaciones, por importantes y diversas que ellas sean. Es una manera de pensar.

E. Hille

¿Qué circunstancias impulsan –a la Editorial Alsina y a los autores de este texto– a retomar con renovado entusiasmo una reedición del libro *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral* impreso por última vez en el año 1997, con 120.000 ejemplares vendidos, actualmente agotado?

Los alientan varias razones.

Una de ellas, la vigencia del texto, expresada sobre todo por los docentes.

En segundo término, el generoso aporte económico de la FUNDACIÓN YPF, puesto a disposición de la Editorial, para facilitar el acceso del libro a la numerosa comunidad estudiantil, haciendo posible una significativa reducción de su precio de venta.

Esta última finalidad también apunta a restituir la buena práctica de la enseñanza superior: estudiar con el apoyo del libro en su formato integral y así desterrar el hábito, pocas veces atendible, de la fotocopia fraccionada, parcial y obviamente no autorizada.

Después de 21 ediciones, este libro vuelve a presentarse en un solo volumen, con su Apéndice de Tablas y Fórmulas.

En el texto se hace referencia al fascículo de Complementos Teóricos que el lector podrá solicitar a la Editorial, en forma personal o por correo postal o electrónico.

ÍNDICE

PRIMERA PARTE - CÁLCULO DIFERENCIAL

Capítulo IV.— FUNCIONES TRASCENDENTES

Capítulo V.—LÍMITES

Capítulo VI. – DERIVADA

Capítulo VII. – DERIVADAS Y DIFERENCIALES SUCESIVAS

Capítulo VIII. – VARIACIÓN DE FUNCIONES

Capítulo IX. – APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

SEGUNDA PARTE - CÁLCULO INTEGRAL

Capítulo X. – INTEGRALES INDEFINIDAS

PRIMERA PARTE

CALCULO DIFERENCIAL

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1. REVISION DEL CONCEPTO DE NUMERO

El lector conoce las distintas clases de números que estudian la aritmética y el álgebra. Sólo recordaremos algunas de las propiedades que los caracterizan.

NÚMEROS NATURALES: La sucesión de los números naturales 1, 2, 3, 4. . . es *infinita*, es decir, después de cualquier número de esta sucesión *siempre* hay uno, el sucesivo, que es mayor que él en una unidad.

Con los números se definen las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación. A partir de la suma se definen el producto y la potencia y, como operaciones *inversas*, se definen la resta, el cociente, la radicación y la logaritmación. Estas operaciones satisfacen a *leyes formales*, que pueden sintetizarse en las siguientes fórmulas, donde las letras representan números naturales cualesquiera:

I) Prop. uniforme [1] $a + b = c$, $a . b = c$. $a : b = c$, $a^n = c$,

II) Prop. conmutativa $a + b = b + a$; $a . b = b . a$.

III) Prop. asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$; $a(bc) = (ab)c$.

IV) Prop. distributiva $(a \pm b) m = am \pm bm$; $(ab)^m = a^m . b^m$
$(a \pm b) : m = (a : m) \pm (b : m)$; $(a : b)^m = a^m : b^m$.

V) Prop. de las potencias $a^m . a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$.

VI) Prop. de las raíces $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$; $\sqrt[m]{a : b} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$.

A la sucesión de los números naturales se le antepone el cero, que puede caracterizarse como el número que verifica las propiedades

$$a + 0 = 0 + a = a; \quad a . 0 = 0 . a = 0.$$

Además se supone que es

$$0 + 0 = 0; \quad 0 . 0 = 0.$$

Resulta entonces que es condición necesaria y suficiente de anulación de un producto el que uno al menos de los factores sea cero.

Aclaremos: que es condición *suficiente* significa que si alguno de los factores es cero, el producto se anula. Esto es lo que ocurre de acuerdo a las definiciones anteriores. Que es condición *necesaria* significa que si el producto es cero alguno de los factores debe ser nulo.

---

(1) Cuando decimos que la suma, el producto, el cociente o la potencia gozan de la propiedad uniforme, significamos que el resultado de cualquiera de estas operaciones es *único*. Hay operaciones, como la radicación, que son *multiformes*.

Se conviene además en considerar

$$a^1 = a; \quad a^0 = 1,$$

potencias éstas que de acuerdo a la definición general (a^n es el producto de n factores iguales a a), carecerían de sentido.

Son operaciones "prohibidas" en el campo de los números naturales:

1º) La resta $a - b$ siendo a menor que b.

2º) El cociente $a : b$ si a no es un múltiplo de b.

3º) La radicación $\sqrt[n]{a}$ si a no es una potencia n-sima de un número natural.

4º) La división por cero: $a : 0$, pues no puede existir ningún número natural que multiplicado por 0 dé por resultado $a(\neq 0)$.

En los tratados de aritmética se van introduciendo sucesivamente otras clases de números (enteros, fraccionarios, irracionales, imaginarios), con los cuales se trata de ir superando las limitaciones impuestas por estas prohibiciones, pero debe advertirse que los entes que se introducen, para poder recibir el nombre de números, deben satisfacer las *leyes formales* que figuran en la página anterior. (Principio de permanencia de las leyes formales de HANKEL).

NÚMEROS ENTEROS: La sucesión $-1, -2, -3, \ldots,$ de los números *negativos* permite realizar la operación de la resta de los números naturales $a - b$ aún en el caso de ser a menor que b. Así queda superada la limitación que constituyó la primera de las operaciones prohibidas en el campo de los números naturales. Al conjunto de los números naturales y negativos se les llama *números enteros*. La sucesión de números enteros se escribe

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

y suele representarse mediante puntos $A, B, C, \ldots, A', B', C' \ldots,$ equidistantes sobre una recta en la cual se ha fijado un origen O y una unidad.

E' D' C' B' A' O A B C D E
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

FIG. I-1.

Los números $1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots,$ se llaman las *abscisas* de los puntos $A, B, C, \ldots, A', B', C', \ldots,$ respectivamente.

Se puede decir que la serie de números enteros se extiende de menos infinito $(-\infty)$ a más infinito $(+\infty)$.

Las operaciones con números enteros se definen de modo que toda vez que se trate de números positivos se conserven las defini-

ciones correspondientes a los números naturales y que en todos los casos subsistan las leyes formales de la página 1. Así, para sumar dos enteros $a + b$, si ambos tienen el mismo signo se coloca este signo y se efectúa la suma de los números naturales correspondientes, y si tienen distinto signo se antepone el signo del mayor y se restan. Para el producto (y cociente) se adopta como regla de los signos: "Factores de igual signo dan un producto positivo y de distinto signo un producto negativo".

EJEMPLOS:

$8 - 5 = 3;$ $5 - 8 = -3;$ $8 + 5 = 13;$ $-8 - 5 = -13.$

$(8)(5) = 40;$ $(8)(-5) = -40;$ $(-8)(5) = -40;$ $(-8)(-5) = 40.$

$(10):(2) = 5;$ $(10):(-2) = -5;$ $(-10):(+2) = -5;$ $(-10):(-2) = 5.$

Si con números enteros se efectúan sumas, restas y productos siempre se obtienen *números enteros;* por esto se designan con el nombre de *operaciones enteras* a la suma, resta y producto.

NÚMEROS RACIONALES: La introducción de los números fraccionarios $\frac{m}{n}$ permite realizar los cocientes $(a : b)$ entre números enteros, aún en los casos en que a no sea múltiplo de b.

Caracterizan a los números fraccionarios las 2 definiciones:

I) $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ si $mq = pn$ (igualdad de los productos cruzados).

II) $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}$.

De acuerdo a I) un número fraccionario no altera cuando se multiplica por un mismo entero el numerador y el denominador. Recíprocamente, si el numerador y el denominador admiten divisores comunes, éstos se pueden eliminar llegándose así a *fracciones irreducibles.*

Pueden extenderse a los números fraccionarios las definiciones de las operaciones aritméticas y sus propiedades.

Al conjunto de los números enteros y fraccionarios se les llama *números racionales.*

Si se efectúan sumas, restas, productos y cocientes (excepto la división por cero) entre números racionales, siempre se obtiene un número racional. Por esto, las 4 operaciones elementales se llaman *operaciones racionales.*

Con la introducción de los números fraccionarios puede ampliarse la definición de potencia, admitiendo que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Con esta definición siguen siendo válidas las leyes formales.

En general: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

El problema de la medida. Ha sido el problema de la medida el que ha impulsado a los hombres a crear la clase de los números fraccionarios.

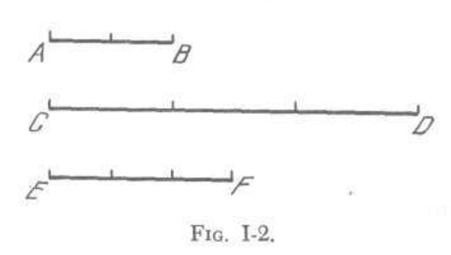


Fig. I-2.

Si se tratara de medir el segmento CD de la figura I-2 con respecto al segmento AB, es decir si se tratara de determinar cuántas veces el segmento CD contiene al segmento AB, sería suficiente conocer los números naturales. Así en el caso de la figura I-2 se dice que la medida de CD con respecto de AB es el número 3. Pero el procedimiento falla si se desea medir el segmento EF con respecto al segmento AB, pues no hay ningún múltiplo de AB que coincida exactamente con EF. Entonces se consideran la mitad, el tercio, el cuarto, ..., de AB (llamadas *partes alícuotas* de AB) y se busca el múltiplo de esa parte alícuota que coincida con EF. En el caso de la figura, como el triple de la mitad de AB coincide con EF, se dice que la medida de EF respecto de AB es $\frac{3}{2}$. Análogamente resulta $\frac{2}{3}$ la medida de AB respecto de EF.

Dado un número racional $\frac{m}{n}$ es fácil construir un segmento cuya medida respecto de AB sea igual a este número. Basta tomar el segmento que sea igual a m veces la n-sima parte de AB. Pero conviene advertir que dados 2 segmentos cualesquiera no surge de lo dicho anteriormente que la medida del primero respecto del segundo sea un numero racional. Si esto ocurre los segmentos se dicen *conmensurables* entre sí; pero si no existe ese número racional los segmentos se llaman *inconmensurables* entre sí.

Decimales. Los números decimales, de uso frecuente, constituyen el caso particular de los números fraccionarios cuyo denominador es una potencia de 10.

Un número fraccionario tal como $\frac{3}{50}$ puede llevarse a la forma decimal multiplicando sus dos términos por 2; resulta

$$\frac{3}{50} = \frac{6}{100} = 0{,}06.$$

Pero si intentamos convertir en decimal un número como $\frac{2}{75}$

pronto observaremos que no es posible hallar un número entero n tal que el producto $75\,n$ resulte una potencia de 10. En efecto, siendo $75 = 5 \times 5 \times 3$, la presencia del factor 3 impide que $75\,n$ resulte un producto de números 10 exclusivamente.

Para que un número fraccionario irreducible se pueda escribir como decimal es necesario y suficiente que el denominador sea un producto de los números 2 y 5 exclusivamente.

Que es *necesario* es inmediato, pues siendo $\frac{a}{b}$ decimal, debe ser $b = 10^n$ y por consiguiente es $b = 2^n \,.\, 5^n$, lo cual muestra que el denominador solo contiene los factores 2 y 5.

La condición también es *suficiente* pues si el denominador es $b = 2^\alpha \,.\, 5^\beta$, multiplicando los 2 términos de la fracción por $2^\beta \,.\, 5^\alpha$ resulta como nuevo denominador $b' = (2\,.\,5)^{\alpha+\beta} = 10^{\alpha+\beta}$ y $\frac{a'}{b'}$ es por lo tanto un número decimal.

Expresiones decimales infinitas. Aplicando el algoritmo (1) de la división a las expresiones irreducibles del tipo $\frac{a}{b}$ obtendremos —como ya hemos visto— expresiones decimales finitas sólo en el caso de que b sea un producto de factores 2 y 5. En todos los otros casos se obtienen infinitas cifras decimales. Así resulta

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}; \qquad \frac{3549}{990} = 3{,}58484\ldots = 3{,}5\overline{84}.$$

En estos dos casos la expresión decimal infinita es periódica, esto es, a partir de un cierto orden decimal las cifras se repiten. Es fácil demostrar que en todos los casos la expresión $\frac{a}{b}$, siendo a y b números enteros, origina una expresión decimal periódica. En efecto, al efectuar el cociente $a : b$ el resto puede tomar uno cualquiera de los valores $0, 1, 2, \ldots\ (b-1)$. Si el resto es 0 la expresión decimal es finita. Si el resto no es 0, se continúa la división y nuevamente aparecerá como resto uno cualquiera de esos b valores. A lo sumo, al cabo de b pasos de esta división, si no se ha llegado a un resto nulo, forzosamente deberá aparecer alguno de esos b restos, y a partir de ese paso, se volverán a obtener las mismas cifras. Con el ejemplo de la fracción $\frac{1}{7}$ se verá mejor el razonamiento anterior. El primer

(1) La voz *algoritmo* deriva del árabe *aljuarezmi*, sobrenombre del célebre matemático Mohamed ben Musa, del siglo IX. Con algoritmo designamos el conjunto de reglas que permiten hacer una operación matemática.

$$\begin{array}{l|l} 1'0 & 7 \\ \hline \;30 & 0{,}1428571\ldots \\ \;\;20 & \\ \;\;\;60 & \\ \;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;50 & \\ \;\;\;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\cdot & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\cdot & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\cdot & \end{array}$$

resto es 3; el 2º es 2; el 3º es 6; el 4º es 4; el 5º es 5 y forzosamente el resto siguiente debe ser alguno de los números que ya habían aparecido antes, pues siendo los posibles restos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y habiendo ya aparecido todos ellos, el próximo paso debe reproducir alguno de los anteriores.

Si el denominador b de la expresión irreducible $\frac{a}{b}$ contiene además de otros factores, potencias de los números 2 y 5, entonces la expresión decimal correspondiente contendrá una primer parte no periódica seguida de un período.

Recíprocamente, toda expresión decimal infinita se puede escribir como una fracción del tipo $\frac{a}{b}$. En efecto, por ser $\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots$; $\frac{1}{99} = 0{,}010101\ldots$; $\frac{1}{999} = 0{,}001001001\ldots$, una expresión periódica del tipo 0,777... por ejemplo, será 7 veces la primer fracción, es decir $0{,}777\ldots = \frac{7}{9}$. Análogamente, $0{,}2828\ldots = \frac{28}{99}$ y $0{,}135135135\ldots = \frac{135}{999}$.

Si la expresión decimal tiene una primera parte no periódica también se podrá llevar a la forma $\frac{a}{b}$. Así por ejemplo la expresión decimal infinita 5,497282828..., la escribiremos:

$$5{,}497 + 0{,}000282828\ldots = \frac{5\,497}{1\,000} + \frac{1}{1\,000}\cdot\frac{28}{99} =$$

$$= \frac{5\,497\,(100-1)+28}{99\,000} = \frac{549\,728 - 5\,497}{99\,000} =$$

$= \frac{544\,231}{99\,000}$. En general es fácil demostrar que una expresión periódica del tipo $0{,}abcdecde\ldots$, se lleva a la forma $\frac{abcde - ab}{99\,900}$, es decir: Cualquier decimal periódico con una primer parte no periódica se puede escribir como una fracción cuyo numerador es igual a la diferencia entre el número formado por el no-período y el período menos el número formado por el no-período y el denominador es un número formado por tantos 9 como cifras tiene el período seguidos por tantos ceros como cifras tiene el no-período.

Lo que nos interesa destacar es que *hay identidad entre las expresiones decimales finitas o infinitas pero periódicas y los números fraccionarios.*

ABSCISAS RACIONALES. Si sobre una recta se señala un origen O y una unidad, se podrán ubicar puntos tales que su medida respecto de esa unidad sean números racionales dados. Los números son las abscisas de esos puntos.

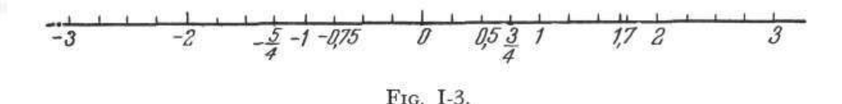


FIG. I-3.

Mientras que entre 2 puntos de abscisas enteras sólo hay un número finito de puntos con abscisa entera (entre -2 y 5 hay 6 puntos de abscisa entera), entre 2 puntos de abscisa racional existen infinitos puntos de abscisa racional (si es $\alpha = \frac{a}{b}$ y $\beta = \frac{c}{d}$ el promedio $\frac{1}{2}[\alpha + \beta]$ está comprendido entre α y β y esta operación de promediar puede continuarse indefinidamente). Se dice que el conjunto de los números racionales es *denso*. Veremos más adelante que a pesar de esta "densidad" hay muchos otros puntos de la recta que no tienen abscisas racionales.

EXPRESIONES DECIMALES INFINITAS NO PERIÓDICAS. NÚMEROS IRRACIONALES. Se concibe fácilmente que puedan existir expresiones decimales que tengan infinitas cifras y que estas cifras no se presenten en forma periódica. Más aún, es más fácil imaginarse que las infinitas cifras decimales aparezcan en cualquier forma y no en forma de grupos periódicos. Con ello queremos significar que es plausible pensar que la gran mayoría de las expresiones decimales infinitas no será periódica y por lo demostrado en el párrafo anterior, sabemos que esas expresiones decimales no serán números racionales.

Empecemos por ver el ejemplo de un número que con seguridad no dará origen a una expresión decimal periódica. Sabido es, por el teorema de Pitágoras, que la diagonal de un cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$. Demostraremos

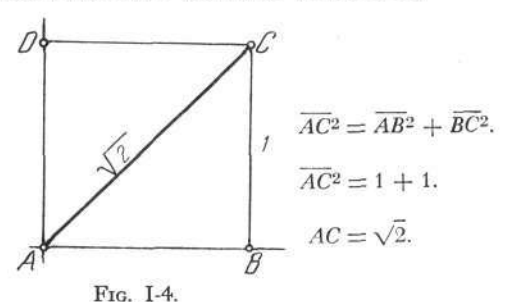


FIG. I-4.

que $\sqrt{2}$ no es un número fraccionario y puesto que tampoco es un número entero, no será un número racional. Para hacer esta demostración seguiremos las huellas de EUCLIDES quien en sus célebres

"Elementos" (alrededor del año 250 A. C.) demostró este importante teorema (1).

Euclides utilizó el método de "reducción al absurdo", que consiste en admitir provisoriamente lo contrario de lo que se quiere demostrar. Si razonando con rigor lógico llegamos a un absurdo será entonces porque la hipótesis provisionalmente admitida era falsa y que lo contrario es lo verdadero.

Supondremos *provisoriamente* que $\sqrt{2}$ es un número racional $\frac{a}{b}$. Admitiremos que a y b son números primos entre sí (fracción irreducible), es decir que no tienen factores comunes, pues de lo contrario haríamos las simplificaciones que permiten eliminar esos factores comunes. En particular, si por ejemplo a es *par*, b debe ser *impar*. Admitir que es $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, significa que el número fraccionario irreducible $\frac{a}{b}$ elevado al cuadrado es igual a 2. Deberá ser entonces $\frac{a^2}{b^2} = 2$ ó lo que es lo mismo,

$$a^2 = 2b^2 \qquad [1]$$

Esta igualdad muestra que a^2 es un número *par*, porque es divisible por 2. Si a^2 es un número par, también es par el número a (puesto que los cuadrados de los números impares son impares). Por el carácter irreducible de la fracción $\frac{a}{b}$, debe ser *impar el número b.* Ahora bien, por ser a par, podemos escribir $a = 2a'$ y será $a^2 = 4a'^2$. Reemplazando en [1] resulta $4a'^2 = 2b^2$ o sea $b^2 = 2a'^2$. Luego es b^2 un número par y por consiguiente b debe ser un *número par*.

Así hemos llegado a demostrar que b debe ser *impar* y *par*, lo cual es evidentemente un *absurdo*. Este absurdo proviene de haber supuesto que $\sqrt{2}$ es un número racional. Por consiguiente queda demostrado que $\sqrt{2}$ no es igual a ningún número racional.

Aplicando el algoritmo de la raíz cuadrada podremos obtener tantas cifras decimales como queramos de $\sqrt{2}$. He aquí las 16 primeras cifras:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ 35623\ 73095 \ldots$$

Aunque en estas primeras cifras no aparece ningún período, ¿podremos asegurar que avanzando en el cálculo de los decimales, no aparecerá algún período? Sí, podemos asegurarlo, puesto que si el

(1) La demostración de que $\sqrt{2}$ no es racional es muy anterior a Euclides. Se cree que ya la conocían los pitagóricos; Platón la menciona en el *Teeteto* y Aristóteles hace referencia a ella en sus *Primeros Analíticos*.

decimal fuera periódico se podría llevar a la forma $\frac{a}{b}$, y acabamos de reproducir la demostración de Euclides según la cual es $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$.

Números como $\sqrt{2}$, que no pueden expresarse en la forma de los números racionales, se llaman *irracionales*.

Dejando para los tratados de análisis algebraico la definición rigurosa de los números irracionales y de sus operaciones, nos limitaremos aquí a considerar como *irracionales aquellos números que escritos en forma decimal tienen infinitas cifras que no forman período alguno* (1).

Demostrar que un número es irracional a veces no es tarea fácil, pues no cabe limitarse a extraer las primeras cifras decimales y comprobar que no se ha presentado algún período, ya que debe demostrarse que por más que continuemos con el cálculo, no aparecerá *nunca* una repetición periódica de cifras.

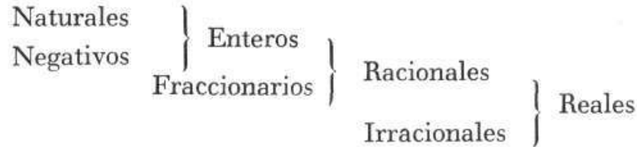
Son célebres los siguientes números irracionales cuyos primeros 15 decimales consignamos:

$\pi = 3{,}14159\,26535\,89793\ldots$, (*pi:* relación de la circunferencia al diámetro).

$e = 2{,}71828\,18284\,59045\ldots$, (*e:* base de los logaritmos naturales).

$M = \log e = 0{,}43429\,44819\,03252\ldots$, (*M:* módulo de transformación de logaritmos).

Números reales. Al conjunto de los números que hemos considerado hasta ahora se los llama números reales. He aquí el cuadro que representa las sucesivas ampliaciones del campo de los números:



Representación de los números reales. Hemos señalado sobre una recta en la que se fija un punto O, eligiendo una unidad, puntos de abscisa entera y racional (positivas o negativas). Sobre esa misma recta ¿podremos representar los números irracionales como $\sqrt{2}$? Hemos visto que la diagonal de un cuadrado de lado 1 mide —de acuerdo al teorema de Pitágoras— $\sqrt{2}$. Si transportamos como indica

(1) A esta definición se le puede objetar que hace depender el carácter racional o irracional de un número de su expresión en el sistema de numeración decimal, y se sabe que éste no es el único sistema de representación de los números. En los "Complementos teóricos" que se incluyen en esta edición se trata este tema desde un punto de vista más general.

la flecha de la figura esta diagonal sobre la recta r, cabe suponer una de las 2 alternativas:

I) La recta tiene "agujeros". No hay ningún punto que corresponde al transporte de la diagonal OA del cuadrado.

II) La recta es *continua:* hay un punto cuya abscisa es precisamente $\sqrt{2}$.

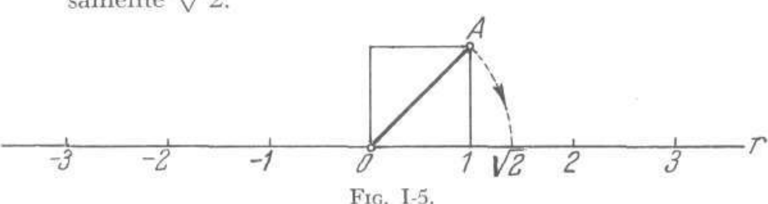


FIG. I-5.

Admitimos el *postulado de continuidad de la recta* (o postulado de Dedekind) y por consiguiente aseguraremos que hay un punto cuya abscisa es $\sqrt{2}$. Lo mismo sucede con todos los números irracionales y por consiguiente con todos los números reales.

Hay una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta. Es decir, si sobre una recta se fija un origen O y una unidad, cada punto de la recta tiene una abscisa real y recíprocamente, a cada número real corresponde un único punto sobre la recta. El número real correspondiente a un punto se llama la *abscisa* del punto. Esta correspondencia constituye el principio fundamental de la geometría analítica, en la cual los puntos geométricos son sustituídos por números, y una vez que sobre estos se efectúan operaciones algebraicas pueden interpretarse geométricamente los resultados.

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES. Con los números reales pueden definirse las operaciones aritméticas ya consideradas, de modo que subsistan las leyes formales. Además, es posible efectuar ahora ciertas operaciones "prohibidas" como extracciones de raíces (de números positivos o negativos si se trata de índices impares y de números positivos si los índices son pares) y cálculos de logaritmos (de números positivos) que carecían de sentido en el campo de los números racionales.

Corresponde advertir que todos los números que se utilizan en la técnica como resultado de mediciones son *números racionales*. Así, si *medimos* la diagonal de un cuadrado de 1 dm de lado obtendremos cantidades como 1,41 dm; 1,414 dm ó 1.4142 dm, ..., según la precisión del instrumento de medición utilizado.

Este hecho no debe hacernos pensar que los números irracionales deben ser dejados de lado en los estudios matemáticos para los técnicos, pues ninguna teoría podría ser fundamentada rigurosamente si no se considerara ese tipo de números.

Como los números que se utilizan en la vida práctica son enteros o decimales con pocas cifras, puede resultar extraño saber que la inmensa mayoría de las abscisas de los puntos de una recta son *irracionales*. Un razonamiento intuitivo lo mostrará: consideradas las expresiones decimales de todos los números reales, lo

excepcional será que se presenten grupos de una o varias cifras que se repitan sistemáticamente (fracciones decimales periódicas); lo más frecuente será encontrarse con expresiones decimales constituídas con cifras puestas sin orden alguno. Esta proposición se demuestra rigurosamente en un capítulo del análisis matemático llamado teoría de conjuntos.

NÚMEROS IMAGINARIOS. En el campo de los números reales quedan aún algunas operaciones prohibidas: tales, por ejemplo, las raíces de orden par de los números negativos, los logaritmos de los números negativos, etc.

Para superar estas limitaciones se introducen los *números imaginarios*, empezando por la unidad imaginaria i que se define como un "número" tal que elevado al cuadrado es igual a -1 (1) La palabra "número" aparece escrita entre comillas porque no hay ningún *número real* (positivo o negativo) que elevado al cuadrado dé como resultado el número -1. Pero si para estos "números" definimos operaciones que satisfagan las leyes formales de la aritmética, tendremos que quitar las comillas a la expresión y considerarlos como verdaderos números.

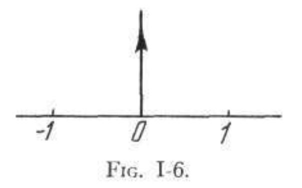


FIG. I-6.

En cuanto a la representación gráfica, deberemos salirnos de la recta, puesto que hemos visto que hay correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los números reales. No siendo i un número real, no puede estar representado por un punto de la recta. Pero, puesto que es $i^2 = i \cdot i = -1 = 1(-1)$, podemos considerar que una doble multiplicación por i hace pasar del punto 1 al -1, es decir hace girar 180° a la unidad. Cabe admitir entonces que i hace girar 90° a la unidad. Esto es un indicio del porqué se representa i sobre una recta perpendicular a la recta que se ha utilizado para representar los números reales (fig. 6).

A los números bi, donde b es un número real cualquiera, se les llama números imaginarios y a los binomios del tipo $a + bi$, con a y b reales, se los llama *números complejos*. Estos complejos contienen como casos particulares a los números reales ($b = 0$) y a los números imaginarios ($a = 0$). Si $a = b = 0$, se tiene el cero.

Con los números complejos, se procede en la misma forma que con los números reales, teniendo en cuenta que por ser $i^2 = -1$, será $i^3 = i^2 \cdot i = -i$; $i^4 = i^2 \cdot i^2 = +1$; $i^5 = i$, etc.

En los cursos de aritmética se estudian las 4 operaciones elementales con números complejos. Nos interesa destacar que la división del tipo $\dfrac{a + bi}{c + di}$ se efectúa multiplicando el numerador y el deno-

(1) A veces se emplea en lugar de la letra i la letra j, para evitar confusiones con el símbolo de intensidad de corriente eléctrica.

minador por el complejo $c - di$, conjugado del denominador. Resulta

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2} =$$

$$= \frac{(ac+bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

operación que tiene sentido si $c^2 + d^2 \neq 0$, es decir si el divisor $(c + di)$ no es cero. Esto significa que también en el campo de los números complejos queda excluída la división por cero.

Representación gráfica. Puesto que los complejos son expresiones del tipo $a + bi$ con a y b reales, la representación gráfica se puede hacer mediante los puntos de un plano. Trazadas en este plano dos rectas perpendiculares que se cortan en O y fijada una unidad, quedan señalados los puntos 1 e i y con ello los puntos a y bi. En la intersección de las paralelas a los ejes trazadas por estos puntos se tiene el punto P, *afijo* del número complejo $a + bi$.

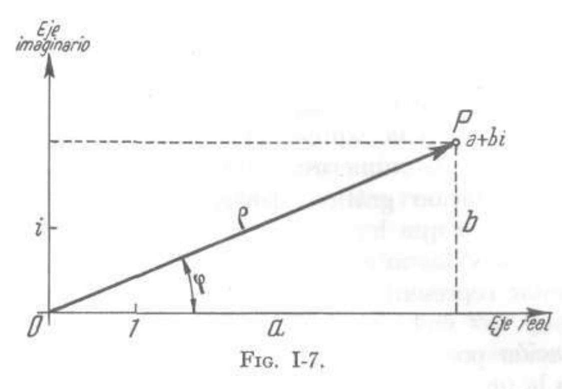


Fig. I-7.

Hay correspondencia biunívoca entre los números complejos y los puntos de un plano.

El complejo $a + bi$ también se puede caracterizar por la distancia al origen $OP = \varrho$ del afijo P y por el ángulo φ que forma OP con el semieje real positivo.

De acuerdo al teorema de Pitágoras es $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$ y por la definición de tangente trigonométrica es $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

Recíprocamente, se pueden calcular a y b a partir de ϱ y φ. En efecto es

$$a = \varrho \cos \varphi, \quad b = \varrho \operatorname{sen} \varphi,$$

de modo que el complejo $a + bi$ se puede escribir también

$$\varrho \cos \varphi + i\, \varrho \operatorname{sen} \varphi = \varrho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) = \varrho \underline{|\varphi}$$

La distancia (considerada siempre positiva) $OP = \varrho$ se llama *módulo* del complejo $a + bi$ y se escribe $\varrho = |a + bi|$. El ángulo φ se llama *argumento* del complejo.

TEOREMA FINAL DE LA ARITMÉTICA. Los números complejos $a + bi$ verifican todas las propiedades formales de la aritmética y con ellos quedan derogadas las operaciones "prohibidas". Sólo queda como operación prohibida la *división por cero.*

Podría pensarse entonces en una nueva ampliación del campo de los números que permitiera levantar esta restricción; pero hay un teorema, llamado *teorema final de la aritmética* (HANKEL, WEIERSTRASS) que asegura que los entes más generales que satisfacen a *todas* las leyes formales de la aritmética (pág. 1) son los números complejos.

EJERCICIO:

He aquí un *sofisma*, es decir, una demostración aparentemente correcta de un teorema falso.

H) $a > b$. T) $a = b$.

D) Si es $a > b$, podemos escribir $a - b = c$ $(c > 0)$.

Multiplicando ambos miembros por $a - b$, resulta

$$a^2 - ab - ba + b^2 = ac - bc.$$

que se puede escribir

$$a^2 - ab - ac = ba - b^2 - bc.$$

Sacando respectivamente a y b factor común, es

$$a(a - b - c) = b(a - b - c).$$

Simplificando el factor común $a - b - c$, resulta

$$a = b.$$

¿Donde está el error de esta deducción?

Trate de encontrarlo y si no lo halla busque la respuesta en la página 16.

2. EL PRINCIPIO DE INDUCCION COMPLETA

La simple observación de la figura muestra que la suma de los números impares sucesivos a partir de la unidad dan como resultado el cuadrado de un número:

$$1 + 3 = 2^2; \quad 1 + 3 + 5 = 3^2; \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2; \quad \ldots;$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \qquad [1]$$

Esta ley ¿será válida para cualquier valor de n? ¿O sucederá con las leyes aritméticas lo mismo que con las leyes de la física o de la biología, en donde una afirmación pierde su validez general cuando una experiencia concreta muestra que la ley tiene excepciones?

Decir que la expresión [1] vale en general, significa que es válida para los infinitos valores $(1, 2, 3, \ldots)$ que puede tomar n. Pero no hay manera de hacer *infinitas experiencias* y podría quedar entonces la duda de

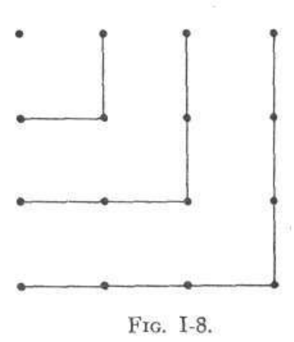


FIG. I-8.

que alguna vez se pudiera encontrar algún número para el cual la ley no fuera válida.

Pero ello no es así. La aritmética tiene el extraordinario privilegio de estudiar leyes que no podrán ser negadas por ninguna experiencia concreta, porque demuestra esas leyes mediante el *principio de inducción completa*, que en forma muy ingeniosa encierra infinitos silogismos mediante un número finito de palabras.

Este principio *afirma* que, si una proposición P_n, en la que figura el número natural n (que puede valer 1, 2, 3, 4, ...) cumple las dos condiciones siguientes:

1º Es cierta para $n = 1$,

2º Si se supone que es cierta para $n = h$, se puede demostrar que es cierta para $n = h + 1$,

entonces P_n es cierta para cualquier valor de n.

Consideremos las proposiciones:

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ \ldots\ P_h,\ P_{h+1},\ \ldots$$

Por la primera condición, P_1 es cierta. Por la segunda condición (aplicada a $n = 1$) resulta que P_2 también es cierta. Nuevamente, por la segunda condición (ahora aplicada a $n = 2$) resulta P_3 cierta, etcétera, etcétera.

Veamos cómo se aplica este teorema en la demostración de [1].

1º La fórmula es cierta para $n = 1$, pues $2 \,.\, 1 - 1 = 1^2$.

2º Supongamos que valga para $n = h$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2h - 1) = h^2$$

y demostraremos que vale también para $n = h + 1$; para ello sumemos $2h + 1$ a ambos miembros:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2h - 1) + (2h + 1) = h^2 + 2h + 1 = (h + 1)^2$$

y nuevamente resulta que la suma de los $(h + 1)$ primeros números impares consecutivos a partir de 1 es igual al cuadrado de $(h + 1)$.

EJERCICIOS:

Demuéstrese de acuerdo al principio de inducción completa:

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
4. $\dfrac{1}{1\,.\,2} + \dfrac{1}{2\,.\,3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

5. Demuéstrese la fórmula del binomio de Newton

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{i} a^{n-i}b^i + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n.$$

Esta fórmula permite calcular la potencia n-sima de un binomio en función de las potencias de los sumandos. Se ha utilizado la notación de los números combinatorios de Euler:

$$\binom{n}{1} = n; \ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}; \ \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}; \ \ldots;$$
$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!},$$

los cuales satisfacen la relación:

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$$

6. Demostrar que la suma de los n términos de la progresión geométrica de razón q:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1},$$

es

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Solución: 1 Para $n = 1$, resulta $S_1 = 1$, lo cual es cierto.

2º Si es cierto para $n = h$, es decir si $S_h = \dfrac{q^h - 1}{q - 1}$, sumando q^h a ambos miembros resulta

$$S_h + q^h = S_{h+1} = \frac{q^h - 1}{q - 1} + q^h = \frac{q^{h+1} - 1}{q - 1},$$

con lo cual queda demostrada la fórmula en general.

7. Se llama *sucesión de Fibonacci* a la sucesión de los números

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots,$$

en la cual cada término a_n es igual a la suma de los dos anteriores $a_{n-1} + a_{n-2}$.

Demuéstrese la relación

$$S_n + 1 = a_{n+2},$$

donde S_n significa la suma de los n primeros términos de la sucesión.

Solución: Es evidente para $n = 1$.

Si es cierta para $n = h$

$$S_h + 1 = a_{h+2},$$

sumando a ambos miembros a_{h+1} resulta

$$S_{h+1} + 1 = a_{h+2} + a_{h+1}$$

y el segundo miembro es, de acuerdo a la definición de sucesión de Fibonacci, precisamente a_{h+3}, con lo cual queda demostrada la proposición en general.

8. Demuéstrese que la relación

$$n! > 2^n$$

vale a partir de $n = 4$.

Solución: El principio de inducción completa vale aún cuando en la primera condición, en lugar de $n = 1$, la propiedad a demostrar sea verdadera a partir de un cierto número fijo. En este caso ello ocurre a partir de $n = 4$ pues $4! > 2^4$. Además, de suponer $h! > 2^h$, multiplicando ordenadamente por $(h + 1) > 2$, se llega a $(h + 1)! > 2^{h+1}$ con lo que queda demostrada la segunda condición.

Observaciones: 1. Queremos insistir sobre la importancia de las demostraciones basadas en el principio de inducción completa. En la enseñanza elemental, cuando se ve que una ley vale para los 3 ó 4 primeros valores de n, se dice "y así sucesivamente" y se da por válida en general.

Un ejemplo mostrará lo incorrecto de tal afirmación. La expresión:

$$n^2 - n + 17$$

proporciona un número primo si $n = 1$; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16, como el lector podrá verificar con una tabla, pero a pesar de ello, la afirmación de que esa expresión da *siempre* números primos es falsa pues ya para $n = 17$ se obtiene un número divisible por 17.

2. Obsérvese que no hemos *demostrado* el principio de inducción completa, sino que lo hemos enunciado y ejemplificado. No corresponde hacer una demostración porque se trata de un *principio* y no de un teorema. Sólo basándonos en otro *principio* (que a su vez habría que admitir) podríamos demostrar el principio de inducción completa.

3. La primera de las condiciones exigidas para la proposición P_n es que sea cierta para $n = 1$. En realidad deberíamos decir "que sea cierta para un cierto número determinado". Así en el ejercicio 8, el primer número para el cual vale la relación es $n = 4$.

Sobre el ejercicio de la página 13.

En la "demostración" hemos dividido por $a - b - c$ que es igual a 0 dado que hemos definido $c = a - b$. También $3 \times 0 = 4 \times 0$ y sin embargo de esta igualdad no se puede deducir, simplificando un factor común, que sea $3 = 4$.

CAPÍTULO II

FUNCIONES. REPRESENTACIONES GRÁFICAS

FUNCIONES. REPRESENTACIONES GRAFICAS

1. VALORES NUMERICOS

Hallamos el *valor numérico* de una expresión literal, para ciertos valores de las letras, cuando sustituimos las letras por los números correspondientes y efectuamos las operaciones indicadas.

Así, el valor numérico de

$$\frac{1}{2}xy^2 - \log x + \sqrt[3]{x^2 y}$$

para $x = 10$, $y = 1$, es

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \,.\, 1^2 - \log 10 + \sqrt[3]{10^2 \,.\, 1} = 5 - 1 + \sqrt[3]{100} \sim 8{,}6416.$$

(El signo $\sim$ se lee "aproximadamente igual". Lo hemos debido utilizar porque el valor de la raíz cúbica de 100 lo hemos tomado de la Tabla I del Apéndice y allí figura con 4 decimales o, como también suele decirse, con un error menor que una diezmilésima).

Realícense los siguientes EJERCICIOS, utilizando las tablas del apéndice y la regla de cálculo [1] cuando sea necesario:

1. $3a^2b - 3ab^2 + 5b^3$ para $a = 8$, $b = 6$. R: 1 368.
2. $(a + b)^3 - (a - b)^3 + a^3 - b^3$ para $a = 6$, $b = 3$. R: 891.
3. $\frac{1}{2}\left[\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right]$ para $x = 5$, $y = -1$. R: $-\frac{5}{12}$.
4. En la expresión anterior hágase $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{5}$. R: $\frac{60}{11}$.
5. La fórmula de HERÓN expresa el área A de un triángulo de lados a, b, c,

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

siendo $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Calcular los valores de A en los siguientes casos:

I) $a = 3$ cm; $b = 4$ cm; $c = 5$ cm. R: 6 cm^2.

II) $a = \frac{2}{5}$ cm; $b = \frac{3}{7}$ cm; $c = \frac{1}{2}$ cm. R: 0,0824 cm^2.

III) $a = 7{,}36$ m; $b = 8{,}15$ m; $c = 9{,}32$ m. R: 28,77 m^2.

(Utilícese en este caso la tabla de logaritmos).

6. La fórmula de los espejos cóncavos es

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

siendo a la distancia del objeto al espejo, b la distancia de su imagen al espejo y f la distancia focal. Calcular el valor de b en los siguientes casos:

---

[1] Para la teoría y práctica de la regla de cálculo consúltese M. SADOSKY: *Cálculo numérico y gráfico*, Cap. IV. Ed. Librería del Colegio, 2ª ed., 1956.

I) $a = 27{,}5$ m; $f = 1{,}4$ m. R: 1,47 m.
II) $a = 1$ m; $f = 13{,}5$ m. R: $-1{,}08$ m.
III) $a = 6$ m; $f = 13{,}5$ m. R: $-10{,}8$ m.

7. La resistencia R equivalente a 4 resistencias R_1, R_2, R_3, R_4 conectados en paralelo está dada por la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}.$$

Calcular R en el caso: $R_1 = 12{,}4$ ohmios; $R_2 = 7{,}94$ ohmios; $R_3 = 43{,}6$ ohmios; $R_4 = 218$ ohmios. R: 4,27 ohmios.

8. El valor aproximado de $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$, está dado por la fórmula de STIRLING: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$. Calcular mediante esta fórmula, aplicando logaritmos, 5! y 10!

R: $5! \sim 118{,}1$ siendo su valor exacto 120.
$10! \sim 3\,598\,696$ siendo su valor exacto $3\,628\,800$.

9. El tiempo de una oscilación simple de un péndulo ideal de longitud l es

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Calcular t para $l = 1{,}50$ m; $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $\pi = 3{,}14$. R: 1,23 s.

10. Los ángulos de un triángulo oblicuángulo ABC de lados a, b, c con $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ se determinan mediante las fórmulas

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Calcular los valores de A, B, C en los casos

I) $a = 191$ m; $b = 211$ m; $c = 242$ m.
R: $A = 49^\circ 17'$; $B = 56^\circ 52'$; $C = 73^\circ 51'$.

II) $a = 7{,}36$ m; $b = 8{,}15$ m; $c = 9{,}32$ m.
R: $A = 49^\circ 16' 29''$; $B = 57^\circ 03' 16''$; $C = 73^\circ 40' 15''$.

11. La frecuencia de resonancia, en ciclos por segundo, de un circuito está dada por

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}},$$

donde L es la inductancia en henrios y C la capacidad en faradios. Hallar f para

$L = 4 \times 10^{-6}$; $C = 3 \times 10^{-10}$. R: $4{,}59 \times 10^6$.

12. La energía de un cuerpo de masa m que está animado de una velocidad v es, de acuerdo a la teoría de la relatividad:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

siendo c la velocidad de la luz. Calcular cuántas veces mayor que la energía del cuerpo en reposo ($v = 0$), es la que corresponde a un cuerpo con velocidad

I) $v = \frac{1}{2} c$. R: 1,15.

II) $v = 0{,}9\, c$. R: 2,29.

13. Calcular: a^n; $a^{\frac{1}{n}}$; $a^{\frac{n-1}{n}}$ para

I) $a = 1{,}9$; $n = 1{,}4$. R: 2,456; 1,582; 1,201.

II) $a = 0{,}19$; $n = 1{,}4$. R: 0,0978; 0,3048; 0,622.

2. VALORES ABSOLUTOS - INTERVALOS - ENTORNOS

El *valor absoluto* o *módulo* de un número real es el número real considerado con signo positivo. Se lo representa con dos barras verticales.

Así: $|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|5-7| = 2$, $\left|-3+\frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2}$.

Si representamos los números reales mediante puntos de una recta, el valor absoluto da la *distancia* del punto representativo al origen O.

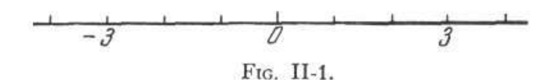


FIG. II-1.

Si es $|a| = 3$ puede ser $a = 3$ ó bien $a = -3$.

Para los números reales vale la desigualdad:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

que se enuncia así: *El valor absoluto de la suma de dos números reales es menor o igual que la suma de los valores absolutos de estos números.*

En efecto, de acuerdo a lo estudiado en álgebra, si a y b son del mismo signo (positivo o negativo) vale el signo $=$, mientras que si a y b son de distinto signo vale el signo $<$.

EJEMPLOS:

$|3+5| = |3| + |5|$; $|3-5| < |3| + |5|$; $|-3+5| < |3| + |5|$;
$|-3-5| = |-3| + |-5|$.

Valen además las siguientes desigualdades que el lector podrá demostrar fácilmente y verificar con ejemplos numéricos:

$|a+b| \geqslant |a| - |b|$ $\qquad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$|a : b| = |a| : |b|$ (suponiendo $b \neq 0$)

Nota: Si a y b representan números complejos, también valen las relaciones anteriores para sus módulos, como resulta de sencillas propiedades geométricas.

Intervalo cerrado (a, b) de números reales o de puntos de una recta es el conjunto de números o puntos x que verifican las desigualdades

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

El intervalo $|x| \leqslant c$ es el conjunto de los puntos x que verifican las desigualdades $-c \leqslant x \leqslant c$.

Si los valores x verifican la relación $a \leqslant x < b$ se dice que el intervalo es *abierto* a la *derecha* y si verifican la relación $a < x \leqslant b$, que es *abierto* a la *izquierda*.

El intervalo es *abierto* si los valores x verifican la relación $a < x < b$.

Entorno de un punto a de semiamplitud ε es el conjunto de puntos x determinados por $|x - a| \leqslant \varepsilon$ o sea que verifican las desigualdades

$$a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon.$$

Obsérvese que $|x - a|$ expresa la distancia entre los puntos de abscisas x y a.

EJERCICIOS:

1. ¿Qué números verifican la condición $|x| \leqslant 2$? (Efectúese la representación gráfica y verifíquese que se trata de un segmento de longitud 4).
2. ¿Qué relación verifican los puntos de abscisa x que cumplen la desigualdad $|x - 3| \leqslant 1$? ¿El punto $x = 2$ pertenece al conjunto? ¿y el origen?
   R: $2 \leqslant x \leqslant 4$; Sí; No.
3. ¿Cuáles son todos los puntos que verifican la relación $\left|\dfrac{1}{x}\right| > 1\,000$?
   R: Los puntos del entorno del origen de semiamplitud igual a 0,001.
4. ¿Donde se encuentran los puntos x que verifican $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| \leqslant 1$?
   R: La igualdad corresponde al origen y los puntos $x > 0$ verifican la desigualdad.
5. ¿Qué representa $|x| \geqslant 10$?
   R: Las dos semirrectas que partiendo de $x = 10$ y $x = -10$ van hacia $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente.
6. ¿Qué representa $|x - 5| > 2$?
   R: Las semirrectas que parten de los puntos 7 y 3 hasta $+\infty$ y $-\infty$ excluídos los puntos 7 y 3.
7. Demostrar que si a y b son números reales cualesquiera es
   $$a^2 + b^2 \geqslant 2ab$$
   y que el signo igual solo vale si $a = b$.
   [Téngase en cuenta que es $(a - b)^2 \geqslant 0$].
8. Si a y b son números reales y positivos con $a > b$, demostrar que
   $$a > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b} > b.$$
9. Demostrar la desigualdad de CAUCHY:
   $$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$
   [Demuéstrese previamente la identidad de LAGRANGE:
   $$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2.]$$
10. Generalícese la desigualdad del ejercicio anterior para n sumados.

3. FUNCIONES

Se dice que y es función de x, cuando a cada valor de x corresponde un valor de y.

Se utiliza habitualmente la notación de LEONARDO EULER $y = f(x)$ que se lee, "y función de x", o también "y igual a *efe* de x" (1).

La variable x se llama *variable independiente* y la variable y se llama *variable dependiente* o *función*.

Consideraremos sólo *variables reales*, salvo en algunos casos excepcionales que señalaremos especialmente y en los cuales utilizaremos números complejos.

EJEMPLOS:

1º) Sea $y = x^2$. A los valores

$x = 1;\ 1{,}5;\ -3;\ \sqrt{2};\ \frac{1}{3}$, corresponden respectivamente los valores

$$y = 1;\ 2{,}25;\ 9;\ 2;\ \frac{1}{9}.$$

También se escribe $f(1) = 1;\ f(1{,}5) = 2{,}25;\ f(-3) = 9;$ etc.

2º) Sea $y = \frac{1}{x}$. A los valores

$x = 2;\ -\frac{3}{2};\ \sqrt{2};\ 0{,}005$, corresponden respectivamente los valores

$$y = 0{,}5;\ -\frac{2}{3}.\ \frac{1}{2}\sqrt{2};\ 200.$$

3º) Sea $y = +\sqrt{1 - x^2}$. A los valores

$x = -0{,}5;\ 0{,}8;\ 1;\ -1;\ 2$, corresponden respectivamente los valores $y = +\sqrt{0{,}75};\ 0{,}6;\ 0;\ 0$; no existe valor *real* correspondiente al valor $x = 2$. Lo mismo ocurre para los valores $x > 1$, ó $x < -1$.

CAMPO DE EXISTENCIA. En el ejemplo 1º), a la variable x se le puede adjudicar cualquier valor real. El campo de existencia de esta función es el conjunto de todos los valores reales.

En el ejemplo 2º), x no puede tomar el valor 0, pues la división por cero carece de sentido. El campo de existencia de esta función es el conjunto de los valores positivos y negativos de x.

En el ejemplo 3º), x debe ser tal que su cuadrado tome valores menores o iguales que 1, para lo cual x debe tomar valores comprendidos entre -1 y $+1$, es decir $-1 \leqslant x \leqslant 1$, o lo que es lo mismo, $|x| \leqslant 1$.

OBSERVACIÓN SOBRE LA DEFINICIÓN DE FUNCIÓN. Durante mucho tiempo los matemáticos consideraron como funciones sólo aquellas relaciones que permitían obtener valores y, cuando se efectuaban

(1) Otras notaciones muy frecuentes son $y = y(x)$, para el caso general; $v = f(r)$ para expresar el volumen en función del radio; $e = e(t)$ para designar el espacio en función del tiempo, etc.

sobre la variable x operaciones aritméticas, tal como vimos en los tres ejemplos dados anteriormente. Pero la definición de función sólo exige que exista una relación bien precisa entre esos dos conjuntos de valores. Así, en los cursos de trigonometría se consideran funciones como $y = \operatorname{sen} x$ que relacionan los ángulos x con números definidos como cocientes de segmentos. Tampoco es necesario que exista una relación geométrica para que exista función. Recién en 1837 LEJEUNE DIRICHLET dió el concepto moderno de función como *relación arbitraria* y presentó la *función de Dirichlet* definida en la siguiente forma:

Para x racional es $y = 1$.

Para x irracional es $y = 0$.

Dado un valor real x cualquiera o es racional (como 2; -5; $\frac{1}{4}$; $-0{,}73$) o es irracional (como $\sqrt{2}$; π; $-\log 5$). En ambos casos le corresponde un valor y, perfectamente definido.

En cambio si consideramos todas las curvas cerradas de un plano y para cada una de ellas, al perímetro x le hacemos corresponder el área y que encierra, no tendremos una función, pues el solo conocimiento de la longitud del perímetro no determina el área correspondiente. En el caso particular de que se trate de polígonos regulares, el área es función del perímetro.

EJERCICIOS:

1. Dadas las funciones $f(x) = 8 : (4 + x^2)$; $g(x) = 2^{1-x}$; $h(x) = x^x$, calcular $f(0)$; $f(-1)$; $g\left(-\frac{1}{2}\right)$; $g\left(\frac{1}{2}\right)$; $h(1)$; $h(-2)$; $h\left(\frac{3}{2}\right)$.

   R: $f(0) = 2$, $f(-1) = \frac{8}{5}$; $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$; $h(1) = 1$, $h(-2) = \frac{1}{4}$, $h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

2. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ calcular

   I) $f(x+h) - f(x)$. R: $-h : x(x+h)$.

   II) $f(x+h) - f(x-h)$. R: $-2h : (x^2 - h^2)$.

3. Dado $f(x) = \log \frac{x}{x-1}$, probar que $f(t+1) + f(t) = \log \frac{t+1}{t-1}$.

4. Expresar el área A del cuadrado inscripto en una circunferencia de radio r en función de r.

   R: $A = 2r^2$.

NOTA: En los "Complementos teóricos" se amplía y se comenta la noción de *función*.

1. COORDENADAS CARTESIANAS

Puesto que a cada valor real x le corresponde un único punto de una recta (pág. 10), podremos representar los pares de valores (x, y) de una cierta función por pares de puntos situados sobre 2 rectas r y r'.

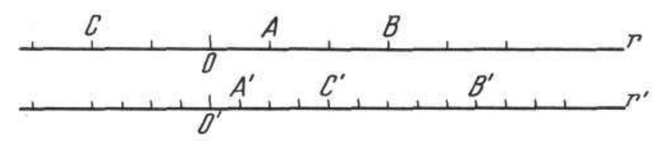


Fig. II-2. — A los puntos A, B, C, ... de r de abscisas x, la función $y = x^2$ les hace corresponder los puntos A', B', C', ... de r' de abscisas x^2.

Mucho más intuitiva resulta la representación cartesiana que consiste en representar cada par de valores (x, y) por un punto P de un plano, de modo tal que la medida de los segmentos OR y OS, respecto de una cierta unidad, determinados por las paralelas trazadas desde P a las rectas r y r', sean iguales, respectivamente, a los números x e y.

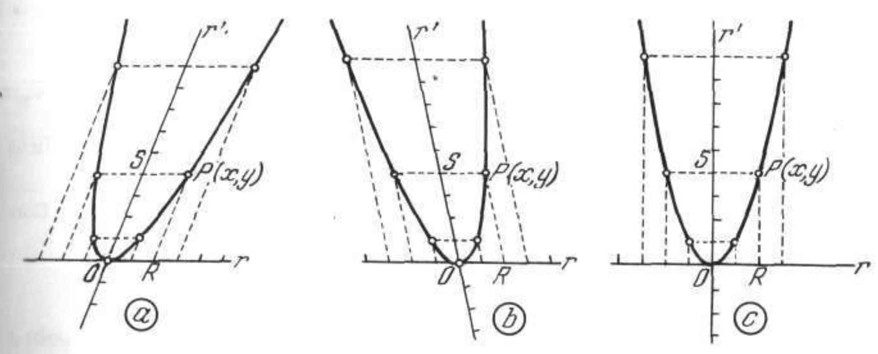


Fig. II-3. — Distintas representaciones cartesianas de la función $y = x^2$.

El valor x se llama *abscisa* de P y el valor y, *ordenada* de P.

La abscisa y la ordenada de un punto constituyen las *coordenadas cartesianas* del punto.

El conjunto de los puntos P dará el *diagrama* de la función $y = f(x)$.

Habitualmente se eligen para trazar los diagramas las coordenadas cartesianas ortogonales, en cuyo caso las rectas r y r' son perpendiculares.

La fusión de los conceptos geométricos y aritméticos es una de las grandes adquisiciones de la ciencia.

EUCLIDES y en general los griegos, empleaban un lenguaje geométrico para establecer propiedades aritméticas. Las denominaciones de *cuadrado* y *cubo* para designar la segunda y tercera potencia de un número reflejan esa vinculación.

También APOLONIO expresaba las propiedades de las cónicas mediante relaciones que, en lo fundamental, constituyen lo que se llama actualmente las coordenadas cartesianas, aunque siempre vinculadas intrínsecamente a las figuras.

Pero es justo atribuir a DESCARTES (en latín *Cartesius*) la invención de la geometría analítica al publicar en 1637 la *Geometría* como apéndice del "Discurso del Método", pues ahí se establece en una *forma general* la *equivalencia* entre las ecuaciones (álgebra) y las curvas (geometría).

Contemporáneamente con DESCARTES, P. DE FERMAT, jurista de profesión y "aficionado" de las matemáticas, también llegó a resultados análogos, habiendo sido el primero que, en el nuevo lenguaje, introdujo las ecuaciones de la recta y de las cónicas.

EJERCICIOS:

1. Dibújese en un plano un sistema de ejes cartesianos ortogonales, adoptando la misma unidad para los ejes de abscisas y ordenadas; señálense los siguientes puntos dados por sus coordenadas:
   A (2, 3); B (− 2, 1); C (−1, − 2); D (4, − 1). Verifíquese con una escuadra que los segmentos AB y AD son perpendiculares.
2. En un sistema cartesiano ortogonal verifíquese la longitud del segmento AB (aplicando el teorema de PITÁGORAS) en los siguientes casos:

a) $A(2, 1)$;	$B(2, -3)$.	R: $AB = 4$.
b) $A(-1, 1)$;	$B(-1, 4)$.	R: $AB = 3$.
c) $A(5, 4)$;	$B(1, 1)$.	R: $AB = 5$.
d) $A(-2, 3)$;	$B(6, -3)$.	R: $AB = 10$.
e) $A(x_1, y_1)$;	$B(x_2, y_2)$.	R: $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

3. Trazar el diagrama correspondiente a la función $y = \frac{1}{2} x^2$ en tres gráficos cartesianos:
   a) Con ejes ortogonales; b) Con ejes que formen un ángulo de 60°; c) Con ejes que formen un ángulo de 120°

5. DIBUJOS Y ESCALAS

Para trazar los diagramas cartesianos habrá que adoptar sobre las rectas que constituyen los ejes de abscisas y ordenadas, orígenes y unidades dependientes de la función a representar y de las dimensiones de la figura.

Veremos en dos ejemplos concretos como debe procederse:

1°) Sea representar en un diagrama cartesiano ortogonal la función $y = x^2$, para x variando entre 10 y 20, siendo las dimensiones de la hoja de dibujo 5 cm × 8 cm.

Como x varía $20 - 10 = 10$ unidades y el ancho de la hoja es 5 cm, debe multiplicarse la abscisa por un *módulo* m_x de modo que sea $m_x \cdot 10 = 5$ cm, lo cual determina $m_x = \frac{1}{2}$ cm. La escala que se debe construir sobre el eje de las abscisas tiene la ecuación $E_x = \frac{1}{2}(x - 10)$, donde hemos restado a la variable x el valor inicial 10.

Para determinar la escala sobre el eje y, observamos que sus valores varían entre 10^2 y 20^2, o sea que su variación es de 300 unidades. Llamando m_y al módulo en esta escala, debe verificarse $m_y \cdot 300 = 8$ cm, o sea $m_y = \frac{8}{300}$ cm. La ecuación de esta escala será $E_y = \frac{8}{300}(y - 100)$, pues $10^2 = 100$ es el valor que corresponde al valor inicial de las x.

Construídas las 2 escalas, se llevan al dibujo pares de puntos (x, y) que permiten trazar el diagrama correspondiente.

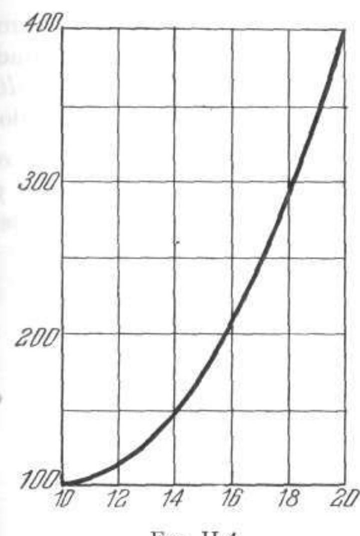


Fig. II-4.
Gráfico de $y = x^2$.

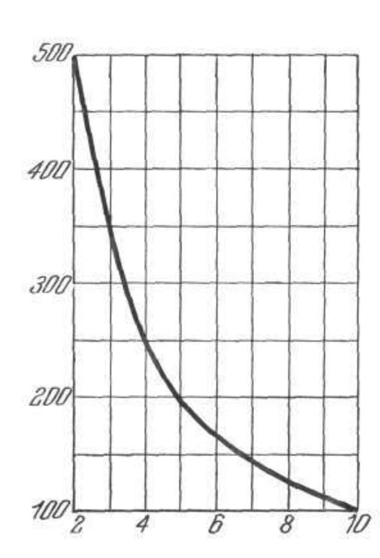


Fig. II-5.
Gráfico de $y = 1\,000 : x$.

2°) Sea representar la función $y = \frac{1\,000}{x}$ para x variando entre 2 y 10 en una hoja de papel de 5 cm × 8 cm.

En este caso debe ser $m_x \cdot 8 = 5$ cm, es decir $m_x = \frac{5}{8}$ cm. La ecuación de esta escala será $E_x = \frac{5}{8}(x - 2)$.

Como la y varía entre $\frac{1\,000}{2} = 500$ y $\frac{1\,000}{10} = 100$, la diferencia de ordenadas será de 400 unidades y el módulo se determina por la relación $m_y \cdot 400 =$ $= 8$ cm o sea $m_y = \frac{1}{50}$ cm. La ecuación de esta escala será $E_y = \frac{1}{50}(y - 100)$.

La construcción del cuadro de valores (x, y) se facilita mucho utilizando las tablas numéricas que hemos colocado en el apéndice y cuyo uso recomendamos en todo momento. En particular las funciones $y = x^2$, $y = \frac{1\,000}{x}$ están tabuladas para x entero variando entre 1 y 1 000.

EJERCICIOS:

1. Representar en una hoja rectangular de 10 cm × 25 cm la función $y = x^3$ para x variando de -5 a $+5$.
(Resulta $m_x = 1$ cm y $m_y = 0{,}1$ cm).
2. En el mismo papel del ejercicio anterior representar la misma función para x comprendido entre 5 y 6.
(Se obtendrán $m_x = 10$ cm y $m_y = 0{,}27$ cm).

6. FUNCIONES UNIFORMES Y MULTIFORMES

En la introducción hemos señalado que existen operaciones como la suma o la potenciación que son *uniformes* pues dan un resultado *único,* mientras que existen otras como la radicacion que son *multiformes* pues proporcionan para un mismo valor distintos resultados.

Se denominan *funciones uniformes* $y = f(x)$ aquellas que hacen corresponder a cada valor de la variable independiente x *un* valor y. En cambio en las *funciones multiformes* a cada valor x corresponden varios valores y.

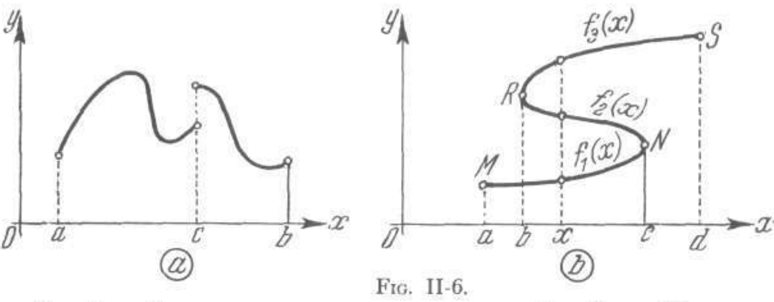


FIG. II-6.

Función uniforme. Función multiforme.

Nosotros consideraremos sólo funciones uniformes y cuando se presenten funciones multiformes las "separaremos" en varias funciones uniformes.

En el caso de la figura 6(b) consideramos las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ definidas respectivamente en los intervalos (a, c), (b, c) y (b, d) cuyos diagramas son los arcos MN, RN y RS.

7. FUNCIONES PARES E IMPARES

Hay condiciones de simetría que facilitan el trazado de diagramas cartesianos correspondientes a ciertas funciones. Así para dibujar la curva correspondiente a la función $y = x^2$ basta considerar los valores positivos de x, pues para los correspondientes valores negativos $-x$ el valor de y es el mismo, dado que $(-x)^2 = x^2$.

Las funciones de este tipo se llaman *pares* y en general diremos que $f(x)$ es una *función par* si verifica la relación $f(x) = f(-x)$.

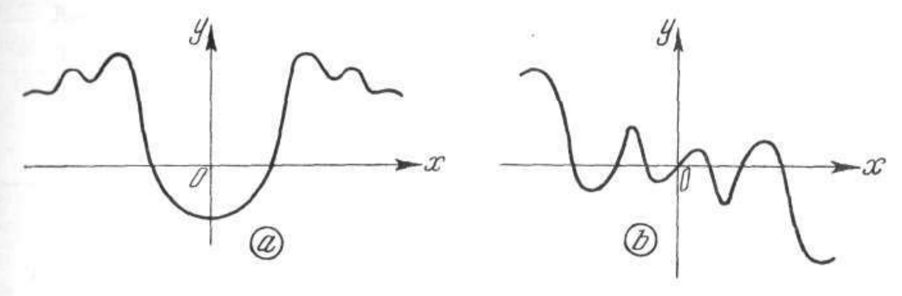


Fig. II-7.

Función par. Función impar.

Desde el punto de vista gráfico, el diagrama en un sistema cartesiano ortogonal resulta simétrico respecto del eje de las y.

Para la función $f(x) = x^3$ resultan opuestos los valores de y correspondientes a valores opuestos de x. Esta función es impar y en general se dice que una *función* es *impar* si verifica la relación $f(x) = -f(-x)$.

Hay funciones que no son pares ni impares; por ejemplo $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Pero en cambio vale el siguiente teorema:

Toda función es igual a la suma de una función par y de una función impar. En efecto, en base a la identidad

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)],$$

resulta de inmediato la demostración, pues el primer corchete encierra una función par y el segundo una función impar.

En el ejemplo anterior las 2 funciones son, respectivamente, $(x^2 + 4)$ y $(-3x)$.

8. FUNCIONES DEFINIDAS PARAMETRICAMENTE

No siempre las funciones se dan como una relación directa entre las variables x e y. En el curso del libro encontraremos funciones definidas mediante una tercer variable, designada generalmente con la letra t, llamada *parámetro*.

Tal es el caso de las relaciones

$$x = 1 - t, \qquad y = 2t^2.$$

CAPÍTULO III

FUNCIONES ALGEBRAICAS

1. LA FUNCION LINEAL Y LA LINEA RECTA

Sea la función $y = mx$ con m constante. La relación $\frac{y}{x}$ es en este caso constantemente igual a m. La única curva que tiene esta propiedad es la *línea recta*. La tangente trigonométrica del ángulo α que forma la recta con el semieje positivo de las x es precisamente este valor m, llamado *coeficiente angular* o *pendiente* de la recta.

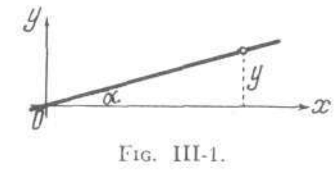


Fig. III-1.

Ejemplos:

La recta r, bisectriz del primero y tercer cuadrante, forma con el semieje positivo de las x un ángulo $\alpha = 45°$; por ser $m = \text{tg } 45° = 1$, la ecuación de r será $y = x$.

La recta r', bisectriz del segundo y cuarto cuadrante, forma un ángulo de $135°$; por ser $m = \text{tg } 135° = -1$, la ecuación de r' será $y = -x$.

También la función $y = mx + b$ representa una recta. En efecto, si a cada ordenada $y = mx$ de r le agregamos el valor b, obtendremos una recta paralela a la anterior.

El coeficiente b recibe el nombre de *ordenada en el origen*, pues para $x = 0$ resulta $y = b$.

Los valores m y b son *parámetros*; para cada recta tienen un valor determinado. Variando el valor de estos parámetros se tienen distintas rectas.

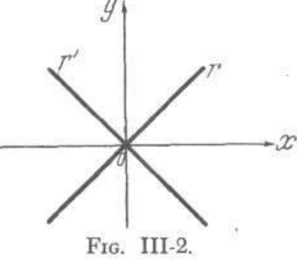


Fig. III-2.

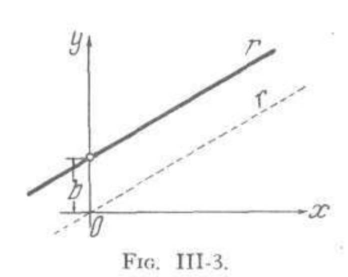


Fig. III-3.

Ejercicios:

1. Escribir las ecuaciones de las rectas representadas en las figuras III-4:
   R: (a) $y = x + 2$; (b) $y = x - 1$;
   (c) $y = -x + 1$; (d) $y = -x - 3$.
2. Escribir las ecuaciones de las paralelas a las rectas del ejercicio anterior que pasan por el punto A indicado en las figuras.
   R: $y = x - 4$; $y = x + 4$; $y = -x + 4$;
   $y = -x + 4$.
3. ¿Qué representa la desigualdad $y < x + 2$?
   R: El semiplano respecto de la recta $y = x + 2$ que contiene al origen.
4. Interpretar las desigualdades $y > x - 1$; $y < -x - 3$.
   R: El ángulo cuyo vértice es $(-1; -2)$ y cuyos lados tienen pendientes 1 y -1, abierto hacia el eje de las x negativas.

Casos particulares de rectas: En lo anterior hemos supuesto que la recta r no era paralela (ni coincidente) a los ejes coordenados.

Si r es paralela al eje x, todas sus ordenadas equidistan de este eje (fig. 5), luego en todos sus puntos es $y = b$. Esta ecuación está incluída dentro del caso general, pues para $\alpha = 0$ es $m = 0$.

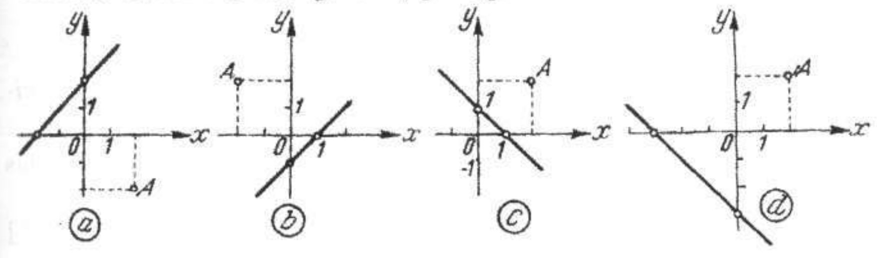


Fig. III-4.

Si r es paralela al eje de las y, las abscisas de sus puntos tienen todas el mismo valor c (fig. 6); luego su ecuación es $x = c$.

En particular, el eje de las abscisas tiene la ecuación $y = 0$, y el eje de las ordenadas, $x = 0$.

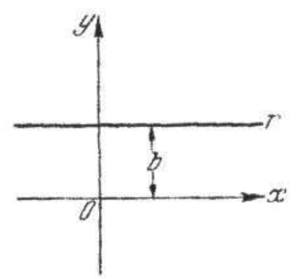


Fig. III-5. — Recta $y = b$.

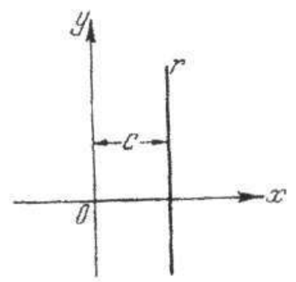


Fig. III-6. — Recta $x = c$.

Rectas paralelas y perpendiculares: *Todas las rectas paralelas tienen el mismo coeficiente angular m* por formar el mismo ángulo con el semieje positivo de las x.

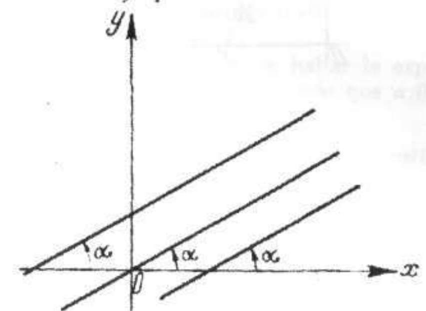


Fig. III-7. — Rectas paralelas.

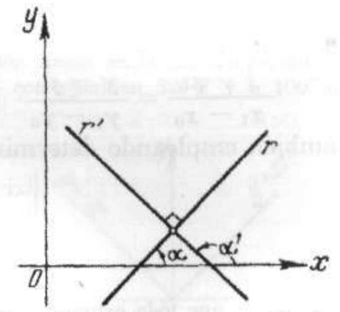


Fig. III-8. — Rectas perpendiculares.

Si r y r' son perpendiculares, resulta, en el caso de la figura 8,

$$\alpha' = 90^\circ + \alpha,$$

porque un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes. Se tiene entonces,

$$m' = \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{m}.$$

Los coeficientes angulares de 2 rectas perpendiculares son recíprocos y de signo opuesto.

Rectas que pasan por un punto: La ecuación de todas las rectas del plano es:

$$y = mx + b. \qquad [1]$$

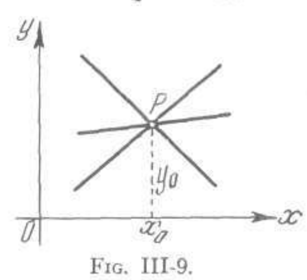


Fig. III-9.

Las rectas que pasan por el punto P de coordenadas x_0, y_0 deben verificar esta relación, es decir, se debe cumplir

$$y_0 = mx_0 + b. \qquad [2]$$

Restando las expresiones [1] y [2] se tiene la ecuación del haz de rectas que pasa por P:

$$y - y_0 = m(x - x_0). \qquad [3]$$

Recta que pasa por dos puntos: De entre las infinitas rectas que pasan por el punto $P(x_0, y_0)$ hay una sola que pasa además por $Q(x_1, y_1)$. El valor del coeficiente m se obtiene observando que en el triángulo PQR es

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Resulta entonces, reemplazando en [3]:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

que se puede escribir más simétricamente en la forma

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

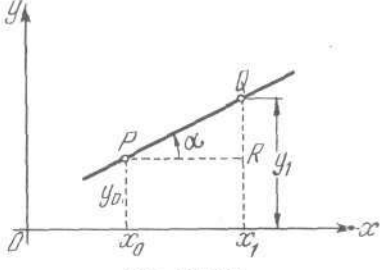


Fig. III-10.

o también empleando determinantes:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ejercicios:

1. Mostrar que toda expresión del tipo

$$Ax + By + C = 0$$

representa una recta.

R: Resulta $m = -\frac{A}{B}$; $b = -\frac{C}{B}$.

¿Qué relación deben verificar A, B, C si

I) la recta pasa por el origen; R: $C = 0$.
II) la recta pasa por (2, 3); R: $2A + 3B + C = 0$.
III) la recta tiene pendiente $m = -1$; R: $A = B$.
IV) la recta pasa por (1, 2) y es paralela al eje de las y.
R: $B = 0$; $C + A = 0$.

2. Trazar la recta

I) que pase por (2, 3) y tenga pendiente 2; R: $y = 2x - 1$.
II) que pase por (1, 0) y tenga pendiente ½; R: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
III) que pase por $(-2, 3)$ y forme un ángulo de 135° con el eje de las x;
R: $y = -x + 1$.
IV) que pase por (1, 3) y sea paralela al eje de las x;
R: $y = 3$.
V) que pase por $(-2, 5)$ y sea paralela al eje de las y.
R: $x = -2$.

3. Si $A(2, 1)$; $B(4, -2)$; $C(-1, -1)$ son 3 de los vértices de un paralelogramo $ABCD$, hallar las coordenadas del cuarto vértice D y la ecuación de las diagonales. Trazar el gráfico correspondiente.
R: $D(-3, 2)$; AC: $2x - 3y - 1 = 0$; BD: $4x + 7y - 2 = 0$.

4. Hallar las coordenadas del vértice D en los paralelogramos $ACBD$ y $BACD$ tomando A, B y C del ejercicio anterior.
R: $D(7, 0)$; $D(1, -4)$.

5. Representar las rectas:

$$AB)\ 11x + 4y - 71 = 0;$$
$$BC)\ 5x + 13y + 46 = 0;$$
$$AC)\ 6x - 9y + 6 = 0.$$

Determinar (resolviendo los correspondientes sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas) las coordenadas de los vértices A, B, C del triángulo ABC. Calcular las ecuaciones de las alturas de este triángulo. Verificar que las 3 alturas se encuentran en un punto.

R: $A(5, 4)$; $B(9, -7)$; $C(-4, -2)$;

$$h_a)\ 13x - 5y - 45 = 0;$$
$$h_b)\ 3x + 2y - 13 = 0;$$
$$h_c)\ 4x - 11y - 6 = 0.$$

La condición para que las 3 alturas se corten en un punto es que "el determinante formado por los coeficientes del sistema dado por las 3 ecuaciones sea igual a 0".

6. Hacer la gráfica (C, F) y hallar la expresión *lineal* entre las temperaturas Celsius y Farenheit, recordando que a 0° C corresponden 32° F y a 100° C corresponden 212° F.

R: $9\,C - 5\,F + 160 = 0$.

7. Representar la función $y = |x| = \sqrt{x^2}$, donde $|x|$ es el *valor absoluto* de x, es decir, el valor $+x$ si x es positivo y $-x$ si x es negativo. La gráfica se compondrá de 2 semirrectas: para valores positivos de x será $y = x$, bisectriz del primer cuadrante, y para valores negativos será $y = -x$, bisectriz del segundo cuadrante.

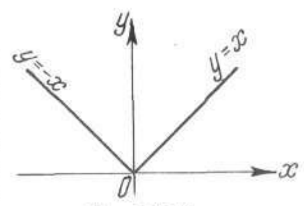


Fig. III-11.

8. Representar la función $y = |x - 1|$.
9. Representar la función $y = |x + 1|$.
10. Representar la función $y = |x - 2| + |x + 2| - 2$.
(Obsérvese que para $x \geqslant 2$ se pueden quitar las barras de los términos y resulta la semirrecta $y = 2x - 2$. En el intervalo $-2 \leqslant x \leqslant 2$, para quitar las barras habrá que invertir la diferencia del primer sumando, quedando el resto igual: $y = (2 - x) + (x + 2) - 2 = 2$, o sea, la representación gráfica será el segmento de ordenada 2, paralelo al eje de las x. Para $x \leqslant -2$ habrá que cambiar los signos de los primeros términos: $y = 2 - x - x - 2 - 2 = -2x - 2$, cuya gráfica es otra semirrecta).

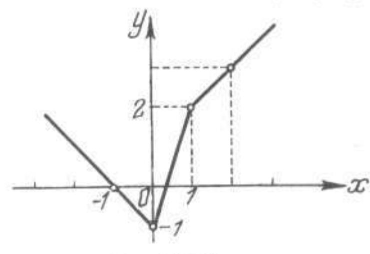


Fig. III-12.

11. Representar la función
$$y = 2|x| - |x - 1|.$$
(Obsérvese que basta unir sucesivamente con segmentos rectilíneos los puntos correspondientes a $x = 0$ y $x = 1$ y trazar para $x < 0$ la semirrecta $y = -x - 1$ y para $x > 1$ la semirrecta $y = x + 1$ (fig. III-12).
12. Representar la función
$$y = |x| + |x - 1| + |x - 2|.$$
13. ¿Cuál es el lugar de los puntos del plano que verifican la desigualdad $x > |y| + 1$?
14. Representar la función $y = \operatorname{sgn} x$, donde *sgn* se lee "*signo de x*" y significa:

$$\text{Para}\quad x > 0,\quad y = 1;$$
$$x = 0,\quad y = 0;$$
$$x < 0,\quad y = -1.$$

15. Representar la función $y = [x]$, donde $[x]$ se lee "parte entera de x" y significa la parte entera con exclusión de la parte decimal, supuesta positiva. Así, $[0{,}75] = 0$; $[3{,}14] = 3$; $[-5{,}6] = -6$, pues $-5{,}6 = -6 + 0{,}4$.
R: Se obtiene una "escalera" cuyos peldaños tienen las alturas 0, 1, 2, ..., para valores positivos de x, y $-1, -2, -3, \ldots$, para valores negativos de x.
16. Representar la función que da la parte decimal definida de acuerdo al ejercicio anterior.

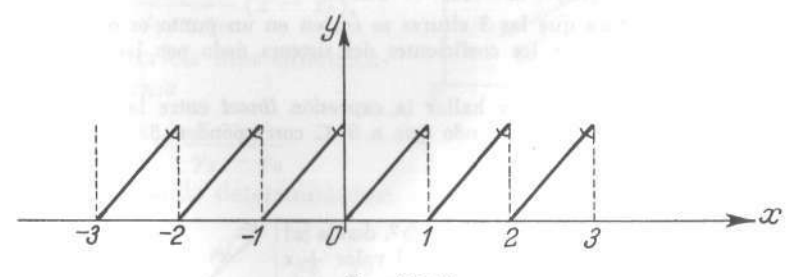


Fig. III-13.

(El arquito que aparece en la parte superior de los segmentos indica que se debe excluir el extremo, pues para cada valor entero la parte decimal es nula).

17. Representar la función definida en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad & x \leqslant 0, \text{ es } y = 0; \\ & 0 < x < 1, \text{ es } y = 2x; \\ & x = 1, \text{ es } y = 3; \\ & 1 < x < 2, \text{ es } y = -2x + 4; \\ & x \geqslant 2, \text{ es } y = 0. \end{aligned}$$

(Compárese con la figura V-4).

Gráficos de movimientos uniformes: Un movimiento es uniforme cuando los espacios recorridos e son proporcionales a los tiempos t:

$$e = vt,$$

siendo la constante de proporcionalidad el valor v de la velocidad del móvil. Si en un gráfico cartesiano se llevan sobre los ejes coordenados las variables t y e, se tendrá una recta (I) que, partiendo del origen, tiene una pendiente igual a v.

Si para $t = 0$ el móvil se encuentra en un punto a una distancia e_0 del origen de los espacios (recta II), será:

$$e = e_0 + vt,$$

y si los tiempos se cuentan a partir de un instante t_0 (recta III), será:

$$e = e_0 + v(t - t_0).$$

La representación gráfica es particularmente apropiada para la determinación de los encuentros de móviles.

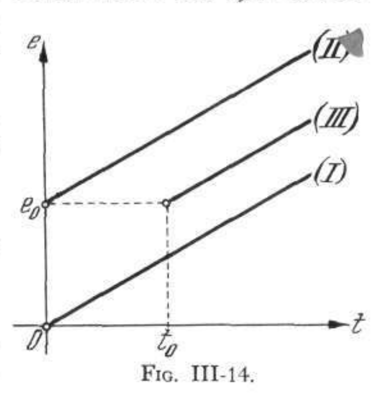


Fig. III-14.

Ejercicios:

1. Un móvil parte de A con una velocidad de 20 km por hora y en el mismo instante parte, en sentido opuesto, desde B, otro móvil, situado a 200 km de A, con una velocidad de 30 km por hora. Trazar las gráficas de las trayectorias de los móviles y determinar el punto de encuentro.
Analíticamente, los movimientos de los 2 móviles tienen las siguientes ecuaciones:

$$A) \quad e = 20\,t,$$
$$B) \quad e = 200 - 30\,t.$$

El encuentro se producirá cuando sea

$$20\,t = 200 - 30\,t,$$

o sea, $t = 4$ horas.

2. Un motociclista parte de A hacia B a 28 km/h. En el mismo instante un ciclista parte, en el mismo sentido, de B, situado a 10 km de A, a una velocidad de 20 km/h. Hallar la hora y la posición del encuentro. Hacer el gráfico de las trayectorias.
R: Se encuentran a la hora y 15 minutos y a 35 km de A.

3. A las $12^h 12^m$ parte de A un tren con velocidad de 50 km/h. Calcular gráficamente el momento y lugar en que alcanzará a otro tren que ha partido a las 12^h de la próxima estación, situada a 30 km, con una velocidad de 40 km/h. Verificar analíticamente, escribiendo las ecuaciones de las trayectorias de los trenes.
R: Se encuentran a las 16 horas a 190 km de A.

4. Dos personas no tienen más que una bicicleta para hacer un trayecto de 21 km. La primera parte con la bicicleta a una velocidad de 15 km h al mismo tiempo que la segunda va a pie a 4,5 km/h. Después de un cierto trayecto la primera persona deja la bicicleta al costado del camino y termina el trayecto a pie a una velocidad de 5 km/h. La segunda persona encuentra la bicicleta y con ella recorre el resto del camino a 12 km/h. Las dos personas llegan juntas a su destino. Calcular la distancia del punto de partida al lugar donde se dejó la bicicleta y la duración total del recorrido. Construir los gráficos de la marcha de los viajeros.
Solución: Si la distancia que recorrió la primera persona en bicicleta es x km, la distancia que recorrió a pie es $(21 - x)$km. El tiempo t, que empleó para hacer este trayecto, teniendo en cuenta las velocidades correspondientes, es

$$t = \frac{x}{15} + \frac{21 - x}{5}.$$

El tiempo que empleó la segunda persona es el mismo y está dado por

$$t = \frac{x}{4{,}5} + \frac{21 - x}{12}.$$

Igualando los segundos miembros de las expresiones dadas se obtiene una ecuación de primer grado que se satisface para $x = 9$ km, es decir, la bicicleta se dejó a 9 km del punto de partida y se emplearon 3^{h} en hacer toda la trayectoria.

5. Para recorrer un camino empinado de 240 km un auto va en el ascenso a 60 km/h y en el descenso a 80 km/h. Otro auto, que va constantemente a 70 km/h, ¿tardará el mismo tiempo en recorrer el camino ida y vuelta? Trazar gráficamente las dos trayectorias. Hacer la discusión general para un camino L y velocidades v_1 y v_2 distintas, mostrando que es $\frac{L}{v_1} + \frac{L}{v_2} >$
$> \frac{2L}{\frac{1}{2}(v_1 + v_2)}$.
R: El primero tarda 7^{h} y el segundo $6^{h}51^{m}25^{s}$. Para demostrar la desigualdad general téngase en cuenta el ejercicio 8 de la página 20.

6. Todos los días, a mediodía, sale un barco de A hacia B y otro de B hacia

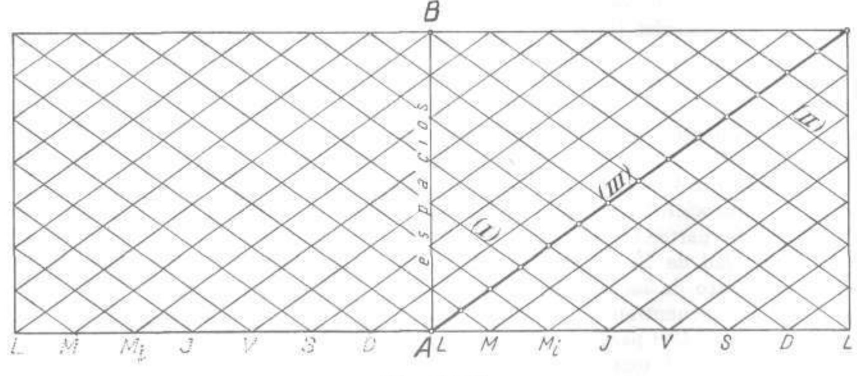


Fig. III-15.
(I) Trayectoria del barco que salió el jueves de la semana anterior de B.
(II) Trayectoria del barco que sale el viernes de B.
(III) Trayectoria del barco que sale el lunes de A hacia B.

A. El viaje entre estos puntos se hace en 7 días, tanto en uno como en el otro sentido. ¿Cuántos barcos que hacen la travesía de *B* hacia *A* encuentra el barco que sale al mediodía de *A*?

R: Efectuando los gráficos de los movimientos de los navíos se aclarará por qué hay 15 encuentros (incluyendo el de la partida y el de la llegada) y no 7, como contestan casi todas las personas a quienes se les propone este problema.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE UNA RECTA: Si consideramos las dos relaciones

$$x = at + b, \quad y = ct + d, \qquad [1]$$

donde a, b, c, d son constantes, a cada valor del parámetro t corresponde un valor de x y un valor de y. Es fácil mostrar que los pares de valores (x, y) están situados sobre una recta. En efecto, igualando los valores que se obtienen despejando t en [1], resulta

$$\frac{x - b}{a} = \frac{y - d}{c}.$$

Eliminando los denominadores y simplificando se llega a una expresión del tipo lineal: $Ax + By + C = 0$.

EJERCICIOS:

1. Mostrar que la recta [1] dada en coordenadas paramétricas pasa por el punto de coordenadas (b, d) y que su pendiente es $\frac{c}{a}$.
2. Representar la recta dada por las ecuaciones paramétricas
$$x = 2t - 1, \quad y = 5t + 3.$$

2. FUNCION CUADRATICA

La función $y = ax^2 + bx + c$ se llama función cuadrática.

Empezaremos por estudiar el caso particular:

$$y = ax^2.$$

Como para valores positivos o negativos de x se obtiene el mis-

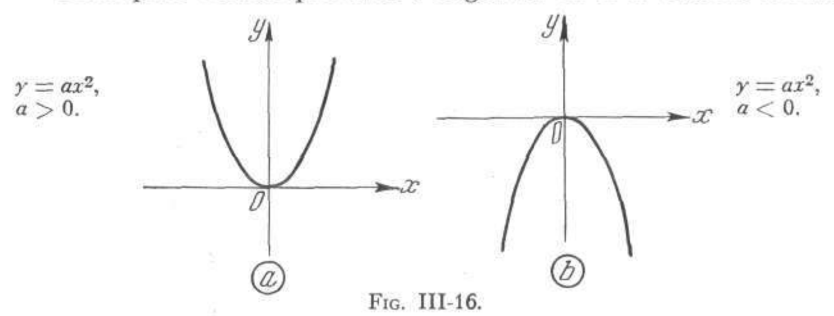


FIG. III-16.

mo valor de y, se trata de una *función par* (pág. 27), y en un sistema de ejes cartesianos ortogonales se tendrá como representación gráfica una curva *simétrica* respecto del eje y. En particular para $x = 0$, es $y = 0$, es decir, la curva pasará por el origen de coordenadas.

A. El viaje entre estos puntos se hace en 7 días, tanto en uno como en el otro sentido. ¿Cuántos barcos que hacen la travesía de *B* hacia *A* encuentra el barco que sale al mediodía de *A*?

R: Efectuando los gráficos de los movimientos de los navíos se aclarará por qué hay 15 encuentros (incluyendo el de la partida y el de la llegada) y no 7, como contestan casi todas las personas a quienes se les propone este problema.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE UNA RECTA: Si consideramos las dos relaciones

$$x = at + b, \quad y = ct + d, \qquad [1]$$

donde a, b, c, d son constantes, a cada valor del parámetro t corresponde un valor de x y un valor de y. Es fácil mostrar que los pares de valores (x, y) están situados sobre una recta. En efecto, igualando los valores que se obtienen despejando t en [1], resulta

$$\frac{x-b}{a} = \frac{y-d}{c}.$$

Eliminando los denominadores y simplificando se llega a una expresión del tipo lineal: $Ax + By + C = 0$.

EJERCICIOS

1. Mostrar que la recta [1] dada en coordenadas paramétricas pasa por el punto de coordenadas (b, d) y que su pendiente es $\frac{c}{a}$.
2. Representar la recta dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = 2t - 1, \quad y = 5t + 3.$$

2. FUNCION CUADRATICA

La función $y = ax^2 + bx + c$ se llama la función cuadrática. Empezaremos por estudiar el caso particular:

$$y = ax^2.$$

Como para valores positivos o negativos de x se obtiene el mis-

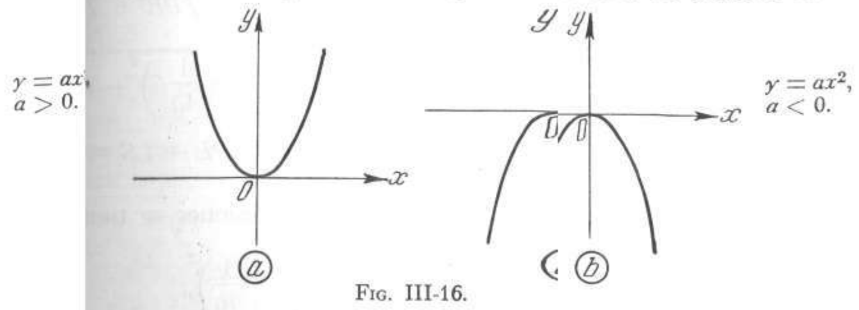


FIG. III-16.

mo valor de y, se trata de una *función par* (pág. 27), y en un sistema de ejes cartesianos ortogonales se tendrá como representación gráfica una curva *simétrica* respecto del eje y. En particular para $x = 0$, es $y = 0$, es decir, la curva pasará por el origen de coordenadas.

A. El viaje entre estos puntos se hace en 7 días, tanto en uno como en el otro sentido. ¿Cuántos barcos que hacen la travesía de *B* hacia *A* encuentra el barco que sale al mediodía de *A*?

R: Efectuando los gráficos de los movimientos de los navíos se aclarará por qué hay 15 encuentros (incluyendo el de la partida y el de la llegada) y no 7, como contestan casi todas las personas a quienes se les propone este problema.

Ecuaciones paramétricas de una recta: Si consideramos las dos relaciones

$$x = at + b, \qquad y = ct + d, \qquad [1]$$

donde a, b, c, d son constantes, a cada valor del parámetro t corresponde un valor de x y un valor de y. Es fácil mostrar que los pares de valores (x, y) están situados sobre una recta. En efecto, igualando los valores que se obtienen despejando t en [1], resulta

$$\frac{x-b}{a} = \frac{y-d}{c}.$$

Eliminando los denominadores y simplificando se llega a una expresión del tipo lineal: $Ax + By + C = 0$.

Ejercicios:

1. Mostrar que la recta [1] dada en coordenadas paramétricas pasa por el punto de coordenadas (b, d) y que su pendiente es $\frac{c}{a}$.
2. Representar la recta dada por las ecuaciones paramétricas
$$x = 2t - 1, \quad y = 5t + 3.$$

2. FUNCION CUADRATICA

La función $y = ax^2 + bx + c$ se llama función cuadrática.

Empezaremos por estudiar el caso particular:

$$y = ax^2.$$

Como para valores positivos o negativos de x se obtiene el mis-

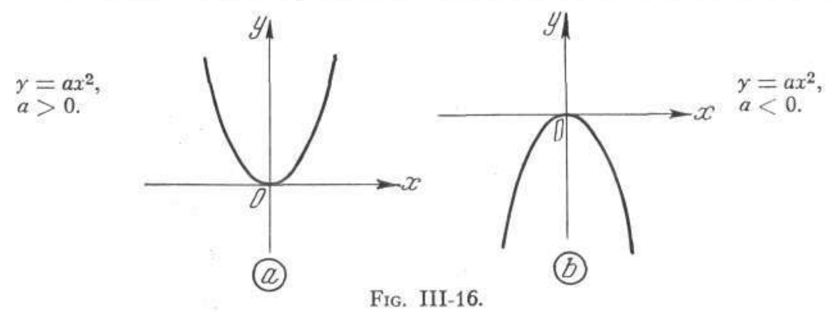


Fig. III-16.

mo valor de y, se trata de una *función par* (pág. 27), y en un sistema de ejes cartesianos ortogonales se tendrá como representación gráfica una curva *simétrica* respecto del eje y. En particular para $x = 0$, es $y = 0$, es decir, la curva pasará por el origen de coordenadas.

Si es $a > 0$, todos los valores y son positivos; si es $a < 0$, todos los valores y son negativos, como lo muestran las figuras 16(a) y 16(b), respectivamente.

1. Representar las curvas

$$y_1 = \tfrac{1}{2}\, x^2; \quad y_2 = -\tfrac{1}{2}\, x^2,$$

eligiendo 1 cm como unidad en los ejes de las abscisas y las ordenadas.

2. Idem las curvas

$$y_3 = 10x^2; \quad y_4 = -100x^2.$$

Mostrar que pueden utilizarse las representaciones del ejercicio 1. En efecto, puesto que es $5y_3 = \tfrac{1}{2}(10x)^2$, basta adoptar el cm como valor 0,1 en el eje de las abscisas y 0,2 en el eje de las ordenadas para tener la gráfica de y_1. Análogamente, como es $\tfrac{1}{2}y_4 = -\tfrac{1}{2}(10x)^2$, adoptando el cm como valor 0,1 en el eje de las abscisas y 2 en el eje de las ordenadas, se tiene la curva y_2.

3. Determinar las intersecciones de las parábolas del ejercicio 1 con la recta que pasa por los puntos $(-1{,}0)$ y $(0{,}1)$.

R: Con y_1 resultan los puntos $(1+\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3})$, $(1-\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3})$.

Veremos que la curva que representa la función $y = ax^2$ es una *parábola*, esto es, una curva cuyos puntos equidistan de un punto F, llamado *foco*, y una recta d, llamada *directriz*.

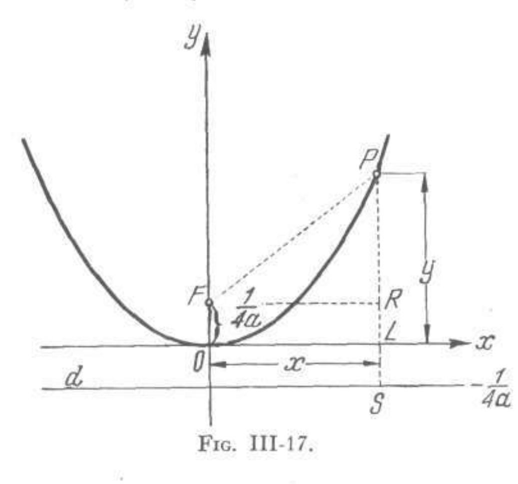


Fig. III-17.

Sea F un punto de coordenadas $(0;\ \frac{1}{4a})$ y sea d la recta de ecuación $x = -\frac{1}{4a}$. Si P es un punto cualquiera de la curva $y = ax^2$, resulta, con las notaciones de la figura:

$$PF = \sqrt{PR^2 + FR^2} = \sqrt{\left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 + x^2},$$

$$PS = PL + LS = y + \frac{1}{4a}.$$

Elevando al cuadrado las respectivas expresiones se tiene:

$$PF^2 = \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 + x^2; \quad PS^2 = \left(y + \frac{1}{4a}\right)^2;$$

desarrollando los cuadrados, simplificando y teniendo en cuenta que es $y = ax^2$, resultan ambas expresiones iguales, con lo cual queda demostrado que es $PF = PS$.

Demostr remos ahora que la función cuadrática

$$y = ax^2 + bx + c$$

también tiene como representación gráfica una parábola.

En efecto, en el trinomio

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

podemos sumar y restar dentro de los paréntesis la expresión $\frac{b^2}{4a^2}$ con lo cual se completa el desarrollo del cuadrado de un binomio. Resulta entonces

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \qquad [1]$$

siendo $\Delta = b^2 - 4ac$ el *discriminante* de la ecuación de 2º grado $ax^2 + bx + c = 0$.

Introduciendo las notaciones

$$X = x + \frac{b}{2a}; \qquad Y = y + \frac{\Delta}{4a}$$

resulta la ecuación $Y = aX^2$, que es, de acuerdo a lo visto en el párrafo anterior, una parábola de eje vertical, con el vértice V en el origen $X = 0$; $Y = 0$. Estos valores corresponden, en las antiguas variables, a $x = -\frac{b}{2a}$; $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

Para hallar los puntos de intersección de la parábola con el eje de las x, es decir, para hallar los puntos $y = 0$, escribimos la expresión [1] descomponiendo la diferencia de cuadrados en el producto de la suma por la diferencia de las bases:

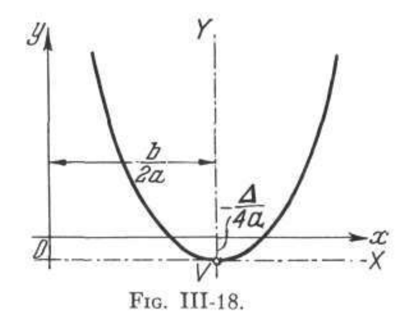


Fig. III-18.

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]$$

Como es $a \neq 0$ (pues de lo contrario no se trataría de expresiones de 2º grado), los únicos valores que anulan a y son los que anulan a cada uno de los corchetes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad [2]$$

Estas son precisamente las raíces de la ecuación de 2º grado: $ax^2 + bx + c = 0$.

Si es $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, resultan dos raíces, x_1 y x_2, reales y distintas. Si es $\Delta < 0$, resultan dos raíces imaginarias conjugadas, y si es $\Delta = 0$, las dos raíces son coincidentes: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

De acuerdo a las expresiones [2] la *suma de las raíces* $x_1 + x_2$ es igual a $-\frac{b}{2a}$ y el *producto de las raíces* es $\frac{c}{a}$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Estas relaciones permiten escribir el trinomio

$$y = ax^2 + bx + c$$

como producto de dos factores binomiales:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2] =$$
$$= a[x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2] = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] =$$
$$= a(x - x_1)(x - x_2).$$

EJERCICIOS:

1. Representar las funciones cuadráticas:
   a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$,
   b) $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2$,
   c) $y = -x^2 + 2x - 1$,
   d) $y = (x - 2)(2x - 1)$.
2. El área A de la corona circular comprendida entre 2 circunferencias de radios R y r es $A = \pi(R^2 - r^2)$. Representar A (en cm²) en función de R para $r = 1, 2, 3$ cm.

   Análogamente, representar A en función de R para $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$.
3. Determinar la función cuadrática que pasa por los puntos $A(0, 3)$; $B(1, 2)$; $C(-2, 11)$.

   Solución: Si se reemplaza en $y = ax^2 + bx + c$, x e y, sucesivamente, por las coordenadas de los 3 puntos, se obtiene un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, a, b y c, que resuelto da: $a = 1$; $b = -2$; $c = 3$.
4. En el trinomio de 2º grado

   $$y = mx^2 - 2(m - 1)x + m$$

   determinar m de manera que las raíces x_1 y x_2 verifiquen la relación:

   $$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4$$

R: $m = -2 \pm \sqrt{6}$.

5. Verificar las siguientes igualdades:
   a) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.
   b) $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.
   c) $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$.
   d) $2x^2 - 5x - 3 = 2(x + \frac{1}{2})(x-3)$.
   e) $3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2)$.

6. Verificar las siguientes simplificaciones:
   a) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \dfrac{x-1}{x+5}$ si $x \neq 2$.
   b) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{x-3}{x+3}$ si $x \neq 3$.
   c) $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x} = \dfrac{x+2}{x}$ si $x \neq -3$.

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA: Puesto que toda función de 2º grado

$$y = ax^2 + bx + c$$

se puede llevar a la forma

$$Y = aX^2$$

trasladando los ejes coordenados al punto V (vértice de la parábola) de coordenadas $\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, allí se encontrará el punto *mínimo* en el caso $a > 0$ y *máximo* en el caso $a < 0$.

EJERCICIOS:

1. ¿Para qué valor de x es máximo o mínimo el trinomio $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$?
   Solución: Puesto que es $\dfrac{-b}{2a} = 4$ y es $a > 0$, resulta un *mínimo* en $x_v = 4$; $y_v = 1$.

2. Hallar el valor de x que hace máxima la expresión
$$y = \frac{4(4x+1) - x^2}{13}.$$
   R: $x = 8$.

3. Dividir el número 8 en 2 partes tales que su producto sea máximo.
   Solución: Si x es una de las partes, la otra será $8 - x$, y el producto $x(8-x)$ es la función cuadrática $y = -x^2 + 8x$, que alcanza su máximo para $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{(-8)}{(-2)} = 4$.

4. Dividir el número a en 2 partes tales que su producto sea máximo.
   R: $\frac{1}{2}a$.

5. Mostrar que entre todos los rectángulos de perímetro dado el de mayor área es el cuadrado.
   (Téngase en cuenta el ejercicio anterior).

6. Determinar la función cuadrática que se anula para $x = 3$ y $x = 7$ y que tenga un mínimo igual a -8.
   R: $y = 2(x-3)(x-7)$.

7. Siendo constante la suma de dos cantidades variables. determinar que valor conviene darles para que la suma de sus cuadrados sea mínima.
R: Las dos cantidades deben ser iguales.
8. Mostrar que entre todos los rectángulos de igual perímetro el de mayor diagonal es el cuadrado.
(Aplíquese el ejercicio anterior).

Trayectoria de un proyectil en el vacío: Si se lanza con velocidad inicial v_0 un proyectil en el vacío, al cabo de un tiempo t debería recorrer un segmento rectilíneo de longitud v_0t, de no existir la fuerza de atracción terrestre. Veremos que la combinación de las 2 fuerzas produce el movimiento parabólico del proyectil.

Si la velocidad inicial v_0 forma un ángulo α con el eje de las abscisas de un sistema cartesiano con origen en el punto inicial del movimiento, al cabo de un tiempo t el punto P tendrá las coordenadas dadas por las *ecuaciones paramétricas* del movimiento:

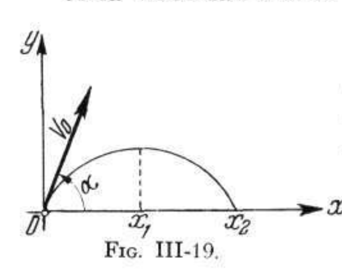


Fig. III-19.

$$x = v_0t \cos \alpha,$$

$$y = v_0t \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando t de la primer ecuación y reemplazándolo en la segunda se obtiene la ecuación cartesiana de la "parábola de tiro":

$$y = v_0 \operatorname{sen} \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2}x^2 g \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

La altura máxima se obtiene para

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\dfrac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha.$$

El alcance máximo se obtiene para el valor x (distinto del origen) que anule a y, es decir, para $x_2 = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} = 2x_1$.

Ejercicios (1):

1. Calcular el alcance y la altura máxima a que llegará un proyectil lanzado con una velocidad inicial de 800 m/s con una inclinación de 40°.
R: $x_1 = 32$ km, $x_2 = 64$ km.

(1) Los resultados distan mucho de la realidad. En el caso del ejercicio 1 un proyectil de 300 kg y esa velocidad inicial no llega a la mitad del alcance teórico.

2. Calcular la velocidad inicial de un tiro que, lanzado con una inclinación de 35°, alcanzó a 30 km.

R: $v_0 = 559$ m/s.

3. ¿En qué instante t el proyectil alcanza su altura máxima?

R: $t = \dfrac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$.

4. ¿Bajo qué ángulo α debe lanzarse un proyectil para que tenga un alcance máximo?

R: $\alpha = 45°$.

5. ¿Bajo qué ángulo α debe lanzarse un proyectil de velocidad inicial v_0 para que pase por el punto (x_1, y_1)? ¿Cuáles puntos (x, y) son alcanzables y cuáles no?

Solución: Siendo la trayectoria de la parábola $y = x \operatorname{tg} \alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$, reemplazando x e y por las coordenadas del punto se obtiene una ecuación de 2° grado en $\operatorname{tg} \alpha$ que, resuelta, permite calcular α.
Esta ecuación de segundo grado da valores reales de $\operatorname{tg} \alpha$ si el discriminante es positivo o nulo:

$$\Delta = x_1^2 - \frac{2gx_1}{v_0^2} y_1 + \frac{gx_1}{2v_0^2} \geqslant 0,$$

o sea,

$$v_0^4 - 2g\, v_0^2 y_1 - g^2\, x_1^2 \geqslant 0.$$

Si despejamos y de esta última expresión (considerada igual a 0), resulta

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g},$$

ecuación de la *parábola de seguridad* que separa los puntos alcanzables desde el origen de los no alcanzables, partiendo de una velocidad v_0.

DESIGUALDAD DE 2° GRADO: La representación gráfica de la función cuadrática

$$y = ax^2 + bx + c$$

es, como hemos visto, una parábola vertical (abierta hacia arriba o hacia abajo, según que a sea positivo o negativo).

Hemos señalado en la figura los valores x para los cuales se verifica la desigualdad.

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Los valores x_1, x_2 verifican la igualdad

$$ax^2 + bx + c = 0$$

y los restantes valores de x satisfacen a

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

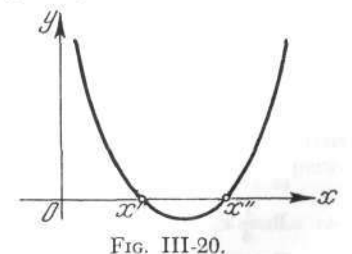


FIG. III-20.

Para estudiar la variación de signo del trinomio convendrá descomponerlo en los 2 factores binomiales

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

EJEMPLOS:

1°) Calcular los valores de x para los cuales se verifica

$$x^2 - 3x - 10 \lesseqgtr 0.$$

Por ser las raíces de la ecuación correspondiente -2 y 5, resulta

$$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$$

y, por consiguiente, para $x > 5$; $x < -2$, es $y > 0$.
Para $-2 < x < 5$ es $y < 0$.

2°) Resolver la desigualdad $-6x^2 - 7x + 5 > 0$.
Siendo $-6x^2 - 7x + 5 = -6(x - ½)(x + \frac{5}{3})$, resulta que la desigualdad se verifica si es: $-\frac{5}{3} < x < ½$.

El valor máximo del trinomio se obtiene para $x = \frac{-b}{2a} = -\frac{7}{12}$. En ese punto la ordenada es $\frac{169}{24}$.

3°) Resolver la desigualdad $2x^2 + x + 2 > 0$.
Puesto que la ecuación no tiene raíces reales y es $a > 0$, la desigualdad se verifica para todos los valores de x.

4°) Resolver la igualdad $x - \frac{3}{x} > 2$.

Debiendo ser $\frac{x^2 - 2x - 3}{x} > 0$, pueden ocurrir dos casos:

$$\text{I)} \begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0, \\ x > 0, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \text{II)} \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0; \\ x < 0. \end{cases}$$

Siendo las raíces de la ecuación -1 y $+3$, las desigualdades se verifican para $x > 3$; $-1 < x < 0$, respectivamente.

La representación gráfica de $y = x - \frac{3}{x}$ facilita la comprensión del resultado.

EJERCICIOS:

1. Resolver la siguiente desigualdad:

$$\frac{3x + 2}{2x - 6} - \frac{8}{x - 3} > 1.$$

R: Para $x > 8$ y $x < 3$.

2. ¿Qué valores es necesario dar a m para que la desigualdad

$$(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3(m - 1) < 0$$

se verifique para cualquier valor de x?
R: $m < -2$.

3. ¿Entre qué valores deberá variar h para que la desigualdad

$$x^2 + 2hx + h > \frac{3}{16}$$

se verifique para todo x?
R: $\frac{1}{4} < h < \frac{3}{4}$.

4. Determinar entre qué valores deberá variar x para que la raíz

$$\sqrt{x^2 - 8x + 17}$$

sea real.
R: La raíz es siempre real.

CURVAS DE SEGUNDO GRADO: La gráfica de la función cuadrática es una *parábola*, lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto (*foco*) y de una recta (*directriz*).

Hay otras dos curvas: elipse e hipérbola, cuyas ecuaciones son, respectivamente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

expresiones de segundo grado en x e y. Implícitamente, estas relaciones definen las funciones

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},$$

cuya representación gráfica es conocida desde los cursos elementales.

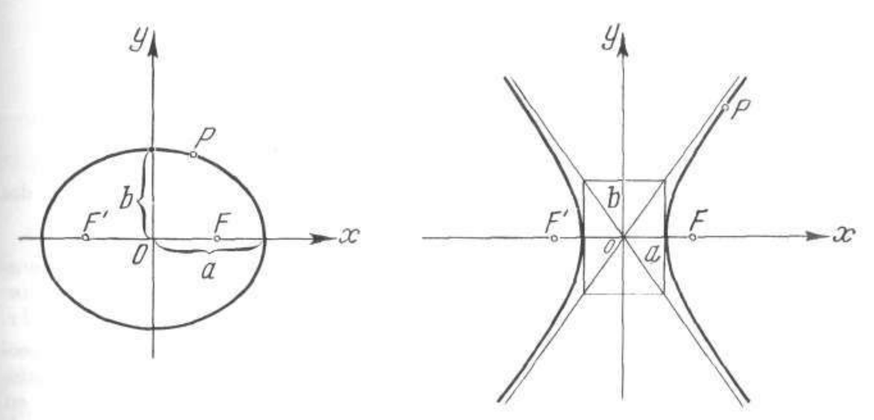


FIG. III-21. — Elipse. FIG. III-22. — Hipérbola.

Por definición, la *elipse* es el lugar geométrico de los puntos P de un plano tales que la suma $PF + PF'$ a dos puntos fijos F y F' (*focos*) es constante.

Análogamente, la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P de un plano tales que la diferencia de las distancias $PF' - PF$ a dos puntos fijos es constante.

Las tres curvas: *parábola*, *elipse* e *hipérbola* resultan como secciones de un cono circular con un plano.

Las cónicas fueron estudiadas en Grecia desde el siglo IV antes de CRISTO por MENECMO y ARISTES, quienes demostraron que las elipses, hipérbolas y parábolas se pueden obtener cortando un *cono* con un plano.

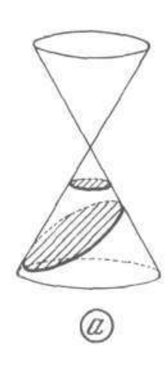
ARQUÍMEDES estudió especialmente la parábola, logrando extraordinarios resultados, a los que nos referiremos más adelante.

Pero fué APOLONIO DE PERGA, en el siglo III antes de CRISTO, quien caracterizó las cónicas en la forma que hoy lo hacemos. APOLONIO demostró una gran cantidad de teoremas (muchos de los cuales exceden los cursos elementales de

geometría analítica) y caracterizó las cónicas mediante proposiciones que en coordenadas cartesianas se expresan así:

$y^2 = l\,x$ para la parábola; $y^2 = l\,x - x\dfrac{x\,l}{t}$ para la elipse, e $y^2 = l\,x + x\dfrac{x\,l}{t}$

para la hipérbola, donde l es el *latus rectum*, doble del parámetro p y t es el *latus transversum*, longitud de uno de los ejes.



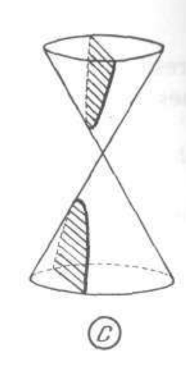


FIG. III-23.

(a) Elipse. Plano secante a todas las generatrices.

(b) Parábola. Plano paralelo a una generatriz.

(c) Hipérbola. Plano paralelo a dos generatrices.

Los tres tipos de cónicas corresponden a estas relaciones: *parábola* (de *parabellein:* igualar), *elipse* (de *elleipsis:* dejar, faltar), *hipérbola* (de *uperballein:* sobrepasar), pues el cuadrado de y *iguala, no alcanza o supera al producto* $l\,x$.

Durante más de 1800 años el conocimiento de las propiedades de las secciones cónicas permaneció en el mismo punto en que lo había dejado APOLONIO. Recién hacia el año 1600 KEPLER empleó la teoría de las secciones cónicas en sus trascendentales estudios sobre el movimiento de los planetas en torno del sol.

Después, con la invención de la geometría analítica por obra de DESCARTES (1596 - 1650) y FERMAT (1601 - 1665), se tuvo el instrumento más apropiado para continuar las investigaciones.

3. FUNCION RACIONAL ENTERA

Las funciones racionales enteras, o polinomios, son las expresiones algebraicas del tipo

$$y = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

El grado del polinomio está dado por el exponente n.

Las funciones lineales y cuadráticas son casos particulares de la función racional entera, en la cual es $n = 1$ y $n = 2$, respectivamente.

La gráfica de la función racional entera en un diagrama cartesiano se denomina parábola de grado n.

EJERCICIOS:

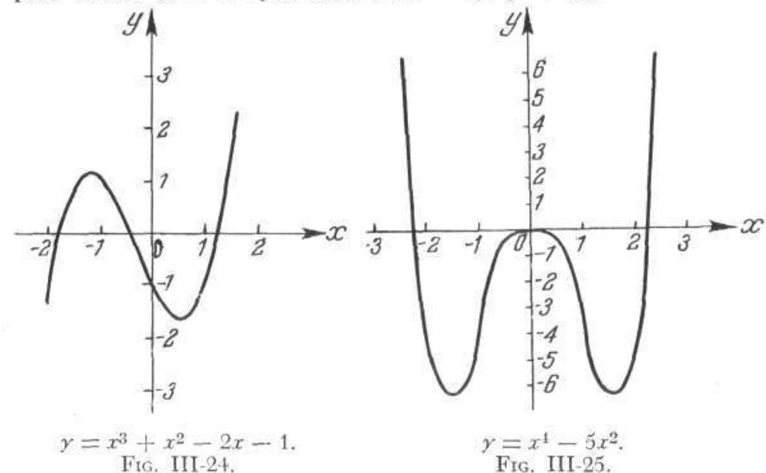
1. Representar gráficamente $f(x) = x^3$ para valores comprendidos entre -1 y $+1$.

(Utilícese la tabla del Apéndice; obsérvese que es $f(-x) = -f(x)$ relación característica de las *funciones impares*, pág. 27).

2. Representar en un mismo gráfico

$$y = x; \quad y = x^2; \quad y = x^3; \quad y = x^4$$

para valores de x comprendidos entre $-1,1$ y $+1,1$.



$y = x^3 + x^2 - 2x - 1$.
FIG. III-24.

$y = x^4 - 5x^2$.
FIG. III-25.

3. Representar las funciones racionales enteras

a) $y = x^3 + x^2 - 2x - 1$; b) $y = x^4 - 5x^2$.

(Compárese el resultado logrado con las figuras 24 y 25).

REGLA DE RUFFINI: En los cursos de álgebra elemental se estudia la división de polinomios. En particular, si el dividendo es de grado n y el divisor es el binomio $(x - \alpha)$, resulta:

$$P(x) = (x - \alpha)C(x) + R,$$

siendo $C(x)$ el cociente de grado $(n - 1)$ y el resto R un número.

Los coeficientes de $C(x)$ y R se determinan muy fácilmente mediante la regla de Ruffini. Haciendo $x = \alpha$, resulta $P(\alpha) = R$, que expresa el teorema del resto: "El valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x = \alpha$ es igual al resto de la división de $P(x)$ por $(x - \alpha)$".

EJEMPLOS:

1º) Calcular el valor numérico de $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x - 1$ para $x = 3$.

	2	−5	0	2	−1	→ Primera fila
3)		6	3	9	33	→ Segunda fila
	2	1	3	11	32	→ Tercera fila

En la primera fila se escriben los coeficientes de $P(x)$, colocando un cero cuando falta la potencia correspondiente. En la segunda fila, a la izquierda, se coloca el valor α (en el ejemplo, 3). El primer coeficiente de la tercera fila es el primer coeficiente de $P(x)$. Este valor, multiplicado por α, se coloca en la segunda fila, debajo del 2º coeficiente de $P(x)$. La suma (en el ejemplo, 1) se coloca en la tercera fila. Se sigue en la misma forma: 1, multiplicado por $\alpha = 3$, se coloca debajo del 0, y la suma 3 constituye

el tercer coeficiente del cociente. Así se sigue, y el último resultado, 32, es precisamente el valor $P(3) = 2 \cdot 3^4 - 5 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 - 1 = 32$.
Se ha obtenido como cociente de $(2x^4 - 5x^3 + 2x - 1) : (x - 3)$ el polinomio $2x^3 + x^2 + 3x + 11$ y como resto 32, de acuerdo a los valores de la tercera fila.

2°) Calcular el valor numérico de $x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ para $x = -2$.
El esquema de cálculo es el siguiente:

	1	-2	-13	-10
$-2)$		-2	8	10
	1	-4	-5	0

El valor numérico $P(-2)$ es 0 y se escribirá, entonces,

$$x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = (x + 2)(x^2 - 4x - 5).$$

Los valores que anulan un polinomio $P(x)$ son las raíces o ceros de la ecuación $P(x) = 0$. En nuestro ejemplo -2 es una raíz o cero de $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$.

Casos particulares: Estudiaremos la divisibilidad de $(x^n \pm \alpha^n)$ por el binomio $(x \pm \alpha)$.

Un polinomio es divisible por otro si el resto de la división es 0. Como el divisor es de la forma $(x \pm \alpha)$, el resto es el valor numérico $P(\mp \alpha)$.

Resultan 4 casos:

1°) $(x^n - \alpha^n) : (x - \alpha)$ divisible cualquiera sea n.

2°) $(x^n - \alpha^n) : (x + \alpha)$ divisible si es n par.

3°) $(x^n + \alpha^n) : (x + \alpha)$ divisible si es n impar.

4°) $(x^n + \alpha^n) : (x - \alpha)$ no es divisible nunca porque el resto es $2\alpha^n$.

Aplicando la regla de Ruffini pueden verificarse fácilmente los desarrollos:

$$\frac{x^n - \alpha^n}{x - \alpha} = x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-3} + \ \dots + \alpha^{n-2} x + \alpha^{n-1}.$$

$$\frac{x^n - \alpha^n}{x + \alpha} = x^{n-1} - \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-3} - \ \dots + \alpha^{n-2} x - \alpha^{n-1} \ (n \text{ par}).$$

$$\frac{x^n + \alpha^n}{x + \alpha} = x^{n-1} - \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-3} - \dots - \alpha^{n-2} x + \alpha^{n-1} \ (n \text{ impar}).$$

Descomposición factorial de un polinomio: En general, si α es un número que cumple la condición $P(\alpha) = 0$, es decir, si α es un cero de la ecuación, se puede escribir de acuerdo al teorema del resto: $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio de grado $(n - 1)$ cuyo primer coeficiente es el mismo a_0 de $P(x)$. Si β es un cero de $Q(x) = 0$, se podrá escribir $Q(x) = (x - \beta)R(x)$, donde $R(x)$ es un polinomio de grado $(n - 2)$ cuyo primer coeficiente es a_0. Siguiendo así se llegará a un polinomio de primer grado $a_0 x + p$, que

se puede escribir $a_0(x-\lambda)$, siendo $\lambda = -\frac{p}{a_0}$ raíz de $a_0x + p = 0$. Resumiendo las sucesivas operaciones se obtiene

$$P(x) = a_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda),$$

que constituye la descomposición factorial del polinomio de grado n en n factores lineales y que generaliza una expresión análoga que hemos hallado en el estudio del trinomio de segundo grado (pág. 40).

Si algunos de los valores $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ que anulan a $P(x)$ son coincidentes, se dice que la raíz correspondiente es *múltiple:* doble, triple, etc.

Así, por ser

$$P(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 8 = (x-1)^2(x+2)^3,$$

se dice que $\alpha = 1$ es una raíz doble y $\beta = -2$ una raíz triple de $P(x) = 0$.

Las raíces de la ecuación $P(x) = 0$ son los puntos en los cuales la gráfica correspondiente corta al eje de las abscisas. Así, en la figura 24 las raíces son aproximadamente $-1{,}8$; $-0{,}45$; $1{,}25$, y en la figura 25 son, también aproximadamente, $-2{,}2$; 0; $+2{,}2$. El valor $x = 0$ es una *raíz doble* de la ecuación $x^4 - 5x^2 = 0$.

Como la regla de Ruffini permite calcular fácilmente los valores numéricos de los polinomios, podemos construir las representaciones gráficas y determinar aproximadamente algunas raíces de las ecuaciones correspondientes.

Más adelante veremos cómo la utilización de las derivadas permite determinar las "vueltas" que da el gráfico y la mejor ubicación de las raíces.

Debemos advertir que los valores $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ pueden ser reales o complejos. Así resulta

$$2x^4 - 32 = 2(x^2-4)(x^2+4) = 2(x-2)(x+2)(x+2i)(x-2i).$$

EJERCICIOS:

1. Aplicando la regla de Ruffini calcular

   a) $\left(x^4 - \frac{17}{12}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{4}{3}x\right) : \left(x^2 - \frac{2}{3}x\right)$;

   b) $(256x^5 + 64x^3 - 81x - 27) : (4x - 3)$.

   R: a) $x^2 - \frac{3}{4}x + 2$. b) $64x^4 + 48x^3 + 52x^2 + 39x + 9$.

2. Aplicando la regla de Ruffini calcular los siguientes cocientes y el valor del resto r:

   a) $(3x^7 - 3x^6 + 5x^4 - 10x^3 + 2x - 4) : (x-2)$.

   b) $(5a^4 + 2a^3 - a - 60) : (a + 2)$.

   R: a) $3x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 17x^3 + 24x^2 + 48x + 98$, $r = 192$.

   b) $5a^3 - 8a^2 + 16a - 33$, $r = 6$.

3. Determinar a de manera que el polinomio $x^3 + ax + 5$ sea divisible por el binomio $x - 1$.
   R: -6.
4. Determinar m, n y p para que el polinomio $x^5 + x^4 - 9x^3 + mx^2 + nx + p$ sea divisible por $(x+2)(x-2)(x+3)$.
   R: $m = -1$, $n = 20$, $p = -12$.
5. Determinar las constantes A, B, α, β de manera que el polinomio
   $$P(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$$
   sea idénticamente igual a la expresión $A(x+\alpha)^3 + B(x+\beta)$. Deducir del resultado las raíces *reales* de la ecuación $P(x) = 0$.
   R: $A = 1$, $B = 3$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$; $x_1 = -2$.
6. Descomponer en todos los factores posibles los siguientes polinomios:
   a) $x^3 - 2x + 1$.
   b) $3x^3 - 18x^2 + 36x - 24$.
   c) $(x+y)^5 - x^5 - y^5$.
   (Desarróllese la potencia y agrúpense los sumandos en pares divisibles por $[x + y]$).
   R: a) $(x-1)(x^2+x-1)$; b) $3(x-2)^3$; c) $5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.
7. Simplificar
   $$\frac{x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 40x - 96}{x^4 - 13x^3 + 32x^2 + 52x - 144}.$$
   R: $\dfrac{x-6}{x-9}$.
8. Verificar la siguiente identidad:
   $$\frac{x^2}{1 - \dfrac{1}{x^2 + \dfrac{\frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}}}} + \frac{x^2 - 2}{1 - \dfrac{1}{x^2 - \dfrac{\frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}}} = 2x^2.$$

4. FUNCION HOMOGRAFICA

Recibe este nombre la función $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Si $c = 0$, se reduce a la función lineal $y = \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$; por ello supondremos $c \neq 0$.

Además, haciendo la división resulta

$$\begin{array}{l|l} ax + b & cx + d \\ \hline -ax - \dfrac{ad}{c} & \dfrac{a}{c} \\ \hline b - \dfrac{ad}{c} & \end{array}$$

y se tiene:

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx+d)}. \qquad [1]$$

Si $bc - ad = 0$, es $y = \dfrac{a}{c}$, es decir, se trata de la recta $y =$ cons-

tante, siendo la constante $\frac{a}{c}\cdot$ Excluiremos también este caso. Sólo consideraremos como *función homográfica* la relación

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

con $c \neq 0$ y $ad - bc \neq 0$.

El único punto en donde no está definida esta función es aquel que anula el denominador, es decir, $cx + d = 0$ o sea, $x = -\frac{d}{c}\cdot$ Pero este valor de x no anula al numerador, pues

$$a(-\frac{d}{c}) + b = \frac{ad - bc}{-c} \neq 0.$$

Por consiguiente, si x toma valores muy próximos a $-\frac{d}{c}$, la función homográfica toma valores muy grandes o, como también suele decirse, tiende a infinito.

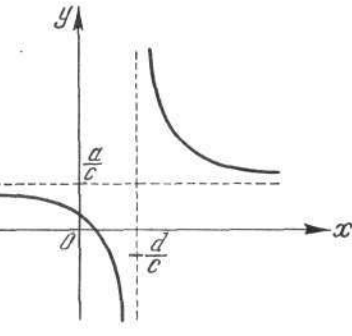


Fig. III-26. — Función homográfica.

En símbolos:

$$\text{Si} \quad x \to -\frac{d}{c}, \quad y \to \infty.$$

($\to$ se lee "tiende a").

El valor $-\frac{d}{c}$ se llama *infinito* o *polo* de la función homográfica.

La recta $x = -\frac{d}{c}$ se llama *asíntota vertical* (¹) de la función homográfica.

Cuando x crece indefinidamente por encima de todo valor, ¿qué sucede?

Puesto que dividiendo ambos miembros de la expresión fraccionaria por cx es

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{\frac{a}{c} + \frac{b}{cx}}{1 + \frac{d}{cx}}$$

resulta que y se acerca a $\frac{a}{c}$, pues $\frac{b}{cx}$ y $\frac{d}{cx}$ se harán cada vez más

(¹) La palabra *asíntota* es de origen griego y ya fue usada por Apolonio y Arquímedes en los estudios de las cónicas.

pequeños. La recta $\frac{a}{c}$ se llama *asíntota horizontal* de la función homográfica [1].

EJERCICIOS:

1. Representar en un gráfico cartesiano la función
$$y = \frac{1}{x}.$$
¿Cuál es el centro de simetría? ¿Cuáles son los ejes de simetría?
Considerando los puntos $F(2, 2)$ y $F'(-2, -2)$ demuéstrese que cualquier punto $P(x, y)$ de la curva dada cumple la condición $PF' - PF = 2\sqrt{2}$.
El diagrama de $y = \frac{1}{x}$ es entonces el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales la diferencia de las distancias a los puntos fijos F y F' es constante. Las curvas que tienen esta característica se llaman *hipérbolas* (pág. 45).
2. Representar
$$y = -\frac{1}{x}.$$
3. Idem
$$y_1 = \frac{1000}{x-2}; \qquad y = -\frac{1000}{x-2}.$$
4. Idem
$$y = 1 - \frac{0{,}001}{x}.$$
5. Idem
$$y = \frac{2x - 5}{3x - 12}.$$
(Determínese primeramente el punto en el que no está definida la función; se tendrá la *asíntota vertical* y luego la *asíntota horizontal*, hacia la cual tiende y cuando $x \to \infty$).
6. Calcular las intersecciones de la hipérbola $y = -\frac{3}{x}$ con la recta $y = -x + 2$. Efectuar la representación gráfica.
R: $x = 3$; -1.
7. Demostrar que toda relación del tipo
$$Axy + Bx + Cy + D = 0$$
determina una función homográfica si $AD - BC \neq 0$ y $A \neq 0$. (Despéjese el valor de y).
8. Demostrar que si $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, x, como función de y, también es homográfica.
9. Si $ad - bc > 0$, mostrar que la función homográfica es *creciente*, es decir, si $x_2 > x_1$, los valores correspondientes de y serán $y_2 > y_1$, siempre que x varíe, sea a la derecha, sea a la izquierda del polo $x = -\frac{d}{c}$.

Solución: $y_2 - y_1 = \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} - \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = \frac{(ad - bc)(x_2 - x_1)}{(cx_2 + d)(cx_1 + d)}$.

---

[1] En el capítulo V se generaliza el concepto de asíntota.

Como $(cx + d)$ se anula en el polo $-\frac{d}{c}$, si x_1 y x_2 están ambos a la derecha o a la izquierda de este valor, darán factores del mismo signo, cuyo producto será siempre positivo.

10. Idem, si es $ad - bc < 0$, mostrar que la función es *decreciente*.

11. Demostrar que si en la función homográfica $y = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$, es también z función homográfica de x: $z = \frac{a''x + b''}{c''x + d''}$, es y función homográfica de x.

5. FUNCION RACIONAL FRACCIONARIA. Descomposición en fracciones simples.

La función homográfica es un cociente de 2 expresiones de primer grado. En general, llámase *función racional fraccionaria* al cociente de dos polinomios:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

Todos los valores x que anulan al numerador y no al denominador son *ceros* de la función, y aquellos valores que sólo anulan al denominador son *polos* o *infinitos* de la función.

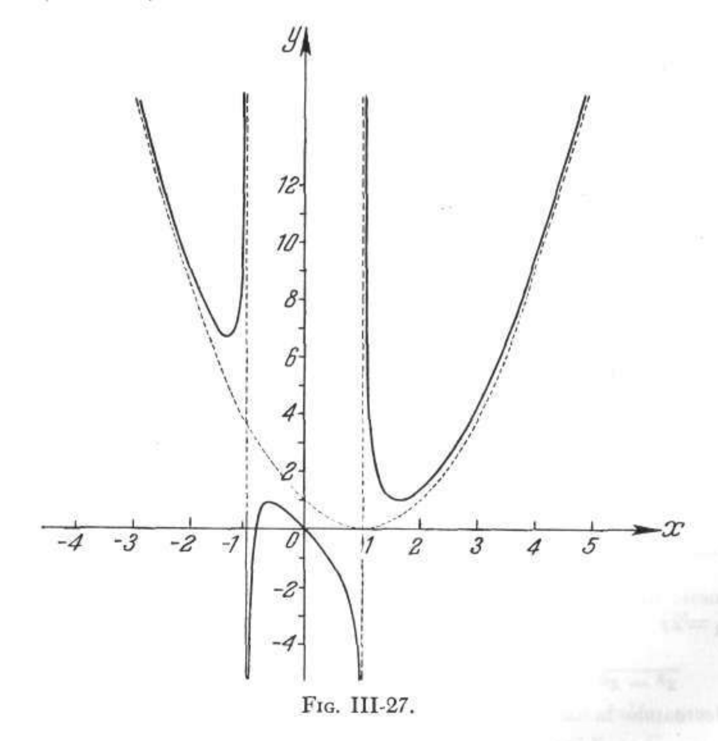


Fig. III-27.

Si el grado del polinomio numerador es mayor que el grado del

polinomio denominador, convendrá efectuar la división indicada. Así, por ejemplo, consideremos la función racional fraccionaria

$$y = \frac{x^4 - 2x^3 + 2x}{x^2 - 1},$$

que está definida para aquellos valores de x que no anulan el denominador, es decir, para todo x, excepto las raíces de $x^2 - 1 = 0$. Estas raíces $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, que además no anulan el numerador, son *polos* de la función. Las rectas $x = 1$; $x = -1$ son *asíntotas verticales* de la curva. Efectuando el cociente indicado se obtiene

$$y = x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Cuando x toma valores muy grandes (positivos o negativos) el término fraccionario se hace cada vez más pequeño y sólo cuenta la expresión entera $y_1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

La gráfica de y_1 es una parábola vertical de vértice en $(1, 0)$.

Más adelante, con los recursos que nos proporcionará el cálculo infinitesimal, estudiaremos más exhaustivamente el diagrama de este tipo de funciones (fig. III-27).

Descomposición en fracciones simples: Una fracción simple es una expresión racional del tipo

$$\frac{C}{(x-a)^n},$$

donde C, a y n son constantes.

Mostraremos como se puede escribir cualquier función racional (en la cual el grado del numerador es menor que el grado del denominador) como suma de fracciones simples. Distinguiremos los casos I y II:

I) Si la fracción racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ tiene como denominador un polinomio $Q(x)$ cuyas raíces son $a, b, \ldots, l$, todas distintas, se pueden determinar los coeficientes $A, B, \ldots, L$, tales que resulte

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}.$$

Ejemplos:

1°) Descomponer en fracciones simples la expresión $\dfrac{6}{x^3 - x^2 - 2x}$.

Puesto que el denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - 2x$ admite las raíces $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$, se podrá escribir

$$\frac{6}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{6}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}.$$

Efectuando la suma indicada se obtiene como numerador

$$A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

y como denominador $x(x-2)(x+1)$, que es el denominador de la ex-

presión anterior. Para que haya identidad con esta expresión debe ser el numerador idénticamente igual a 6:

$$A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)\equiv 6.$$

Ya que se trata de una identidad (y no simplemente de una igualdad), cualquiera sea el valor de x, esta relación debe ser válida.

Elegimos como valores de x, sucesivamente, las 3 raíces: x_1, x_2, x_3.

Si $x=0$, resulta $A(-2)(1)=6$, $\therefore A=-3$.

Si $x=2$, resulta $B(2)(3)=6$, $\therefore B=1$.

Si $x=-1$, resulta $C(-1)(-3)=6$, $\therefore C=2$.

La descomposición buscada es:

$$\frac{6}{x^3-x^2-2x}=\frac{-3}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}.$$

2°) Descomponer en fracciones simples la expresión $\dfrac{1+x^2}{x^3+3x^2+2x}$.

Procediendo como en el ejemplo anterior, resulta $A=\frac{1}{2}$; $B=-2$; $C=\frac{5}{2}$

II) Si el denominador $Q(x)$ tiene las raíces múltiples $a, b, \ldots, l$, con los grados de multiplicidad $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, respectivamente, la descomposición toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}+\\&+\frac{B_0}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)}+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\&+\frac{L_0}{(x-l)^\lambda}+\frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{(x-l)}.\end{aligned}$$

EJEMPLOS:

1°) Descomponer en fracciones simples la expresión $\dfrac{x^2-x+4}{x^3-4x^2+5x-2}$.

Como el denominador admite la raíz doble $x_1=1$ y la raíz simple $x_2=2$, la descomposición se escribe:

$$\frac{x^2-x+4}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{x-2}.$$

Los numeradores deben ser idénticos, es decir,

$$A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2\equiv x^2-x+4.$$

Para $x=2$ resulta $C(1)^2=4-2+4$, o sea $C=6$

Para $x=1$ resulta $A(-1)=1-1+4$, o sea $A=-4$.

Falta determinar B. Si a x le damos cualquier otro valor, por ejemplo $x=0$, y tenemos en cuenta los valores hallados para A y C, resulta:

$$A(-2)+B(-1)(-2)+C(-1)^2=0-0+4,$$
$$8+2B+6=4, \text{ es decir, } B=-5.$$

2º) Descomponer en fracciones simples $\dfrac{12}{x^4 + 2x^3 + x^2}$.

Puesto que el denominador se puede escribir $x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2(x+1)^2$, se tiene:

$$\frac{12}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \frac{A_0}{x^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{B_0}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x+1}.$$

Procediendo como en el ejemplo anterior se obtienen para los valores $x = 0$, $x = -1$ los coeficientes $A_0 = 12$; $B_0 = 12$. Para otros valores cualesquiera de x se obtiene un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, que da $A_1 = -24$; $B_1 = 24$.

Ejercicios:

1. Determinar A y B para que se verifique la identidad:

$$\frac{4x-7}{x^2 - 3x + 2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

R: $A = 3$; $B = 1$.

2. Descomponer la función racional

$$\frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

en sus fracciones simples.

R: $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4}{x-2}$.

3. Determinar los coeficientes A, B y C en la siguiente identidad:

$$\frac{7x^2 - 6x + 1}{(x-3)(x^2 - 3x + 2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

R: $A = 1$; $B = -17$; $C = 23$.

Determinar los coeficientes A, B, C y D en la siguiente identidad.

$$\frac{x^3}{x^4 - 1} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

R: $A = \frac{1}{4}$; $B = \frac{1}{4}$; $C = \frac{1}{2}$; $D = 0$.

5. Descomponer la expresión

$$\frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2}$$

en sus fracciones simples.

R: $\dfrac{3}{[illegible]}$ [illegible] $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x+2}$.

6. FUNCIÓN IRRACIONAL

Cuando además de las 4 operaciones racionales: suma, resta, producto (y como caso particular potenciación) y cociente, aparecen las raíces, se tiene una expresión irracional.

$$y = \sqrt{x-1}$$
$$y = \sqrt[3]{x+1}$$

En 1º), como la raíz cuadrada puede tomar el signo $+$ o el signo $-$, habrá que aclarar cuál de las 2 determinaciones se adopta; de lo contrario, se ten-

drá una *función multiforme*, y nosotros hemos considerado en nuestra definición sólo *funciones uniformes*. Además, para tener valores reales debe ser $x \geqslant 1$.

En 2º), como la raíz cúbica sólo tiene una determinación en el campo de los números reales, no se plantea la cuestión anterior. Además, como siem-

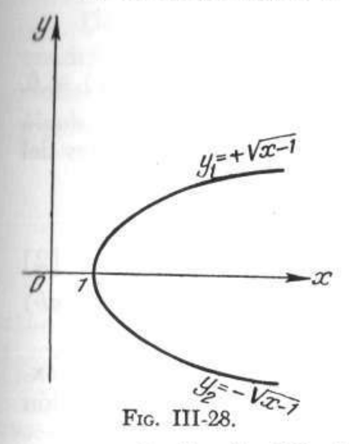


FIG. III-28.

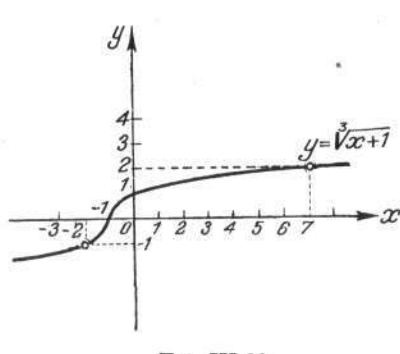


FIG. III-29.

pre existe la raíz cúbica de un número real (positivo o negativo), la función está definida para todo el eje de las x.

EJERCICIOS:

1. Indicar el campo de variación de las siguientes funciones irracionales:

a) $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$;
R: $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

b) $y = \pm\sqrt{-x^2 + 6x - 5}$;
R: $1 \leqslant x \leqslant 5$.

c) $y = \sqrt{(1 + 2x)(3 - x)}$;
R: $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$.

d) $y = \pm\sqrt{x^2 - 3x + 2}$;
R: $x \leqslant 1;\ 2 \leqslant x$.

e) $y = \pm\sqrt{3x^2 - 8x + 6}$;
R: $-\infty < x < \infty$.

f) $y = \pm\sqrt{2x - 3}$;
R: $x \geqslant \frac{3}{2}$

g) $y = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$.
R: $-1 \leqslant x < 1$.

h) $y = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$.
R: $x < -1;\ x \geqslant 1$.

2. Trazar la gráfica de la función

$$y = x^a$$

con $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Comparar con los resultados anteriores (pág. **47**) **para** $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

7. FUNCION ALGEBRAICA GENERAL

Todos los ejemplos vistos en este capítulo **pueden escribirse** en la forma

$$P_0(x)\, y^n + P_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)\, y + P_n(x) = 0, \qquad [1]$$

donde $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ designan polinomios en x.

Así, la función cuadrática $y = x^2$ se puede escribir

$$1.\ y + (-x^2) = 0,$$

con lo que resulta: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = -x^2$.

Para $y = \sqrt[3]{x+1}$ es $y^3 = x + 1$, o sea, $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 0$, $P_3(x) = -(x + 1)$.

Las funciones $y = f(x)$ que resulten definidas por relaciones del tipo [1] reciben el nombre de *funciones algebraicas*.

Las gráficas cartesianas de la relación de 2º grado

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad [2]$$

son cónicas: elipses, hipérbolas o parábolas, según que $(h^2 - ab)$ sea negativo, positivo o nulo.

Para hallar la función algebraica explícita $y(x)$ ordénese la expresión [2] en la forma [1] y aplíquese la fórmula de resolución de la ecuación de 2º grado.

En los cursos de geometría analítica se demuestra que la expresión general de 2º grado, mediante apropiados cambios de variables, puede llevarse a las formas canónicas

$$Ax^2 \pm By^2 = C, \qquad y^2 = 2px,$$

cuyas gráficas ya hemos visto en la página 45.

Ejercicios:

1. Mostrar que si en la ecuación
$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$
se hace la sustitución $x = x' + 1$, $y = y' - 2$, se llega a la relación
$$x'^2 + y'^2 = 6,$$
que representa una circunferencia con centro en el origen de coordenadas x', y' y radio $\sqrt{6}$.

2. Verificar que si en la ecuación $7x^2 + 24xy - 10x - 1 = 0$
se hace la sustitución $x = \frac{1}{5}(4x' - 3y')$, $y = \frac{1}{5}(3x' + 4y') + \frac{5}{12}$
se llega a la relación
$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 x^2 - 9y^2 = 1,$$
que es la ecuación de una hipérbola de semiejes $a = \frac{5}{4}$; $b = \frac{1}{3}$.

3. Verificar que si en la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$
se hace la sustitución $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$ se llega a la
ecuación de la parábola: $y'^2 = 4\sqrt{2}\,x'$.

CAPÍTULO IV

FUNCIONES TRASCENDENTES

Después de haber considerado las *funciones algebraicas:* lineal, cuadrática, racional, entera y fraccionaria, y las raíces de estas funciones, estudiaremos algunas funciones que trascienden del campo del álgebra: exponenciales, logarítmicas, circulares, hiperbólicas, etc.

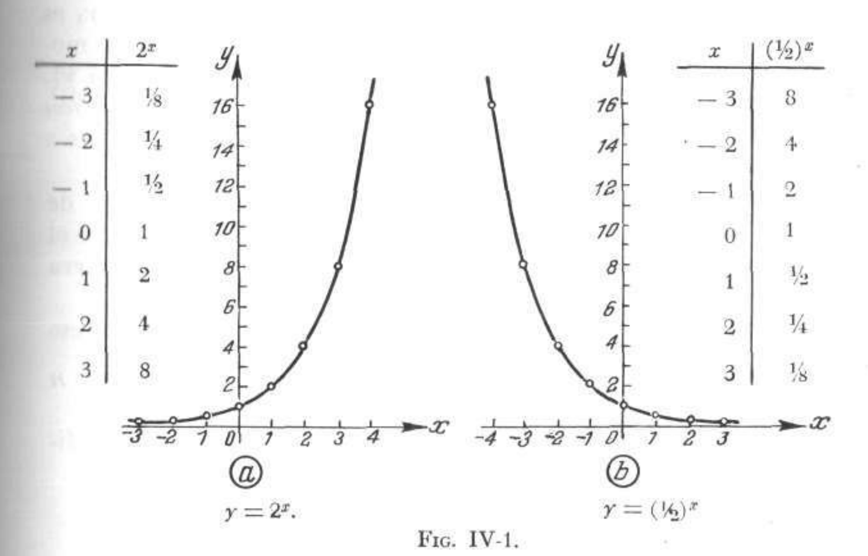
1. FUNCION EXPONENCIAL

Recibe este nombre la expresión

$$y = a^x,$$

donde a es un número positivo distinto de 1.

Consideremos el caso particular de la función $y = 2^x$. Para construir el cuadro de valores basta recordar las reglas estudiadas en aritmética. Así, resulta:



x	2^x
-3	$1/8$
-2	$1/4$
-1	$1/2$
0	1
1	2
2	4
3	8

x	$(1/2)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$1/2$
2	$1/4$
3	$1/8$

$y = 2^x$. $\qquad$ $y = (1/2)^x$

FIG. IV-1.

Si $x = 3$, $y = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Si $x = -3$ es $y = 2^{-3} =$ $= 1 : 2^3 = \frac{1}{8}$. Si $x = \frac{1}{2}$, es $y = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1{,}414 \ \ldots$.

Si $x = -\frac{1}{2}$, es $y = 2^{-\frac{1}{2}} = 1 : 2^{\frac{1}{2}} = 1 : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 2 = 0.707$

En general, para un exponente fraccionario positivo hay que aplicar la regla $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, y para un exponente negativo, $a^{-p} = 1 : a^p$. Si el exponente es irracional, tal como por ejemplo π, se pueden considerar sucesivamente sus aproximaciones racionales 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; . . ., para las cuales está definida la exponencial. Los valores correspondientes de 2^x son, en este caso, 8; 8,574; 8,814; 8,821; 8,824. . . y las primeras cifras de 2^π son 8,8249. . . [1].

En la figura aparecen los diagramas de las funciones $y = 2^x$; $y = (1/2)^x = 2^{-x}$ con sus correspondientes cuadros de valores.

La base a más empleada en matemática es el célebre número $e = 2{,}7182\ldots$, y existen numerosas tablas de las funciones $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{-x}$.

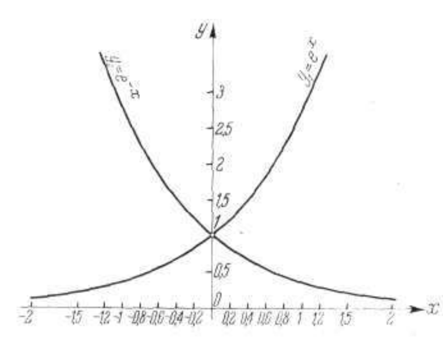


FIG. IV-2.

Una tabla con 5 decimales figura en el apéndice. Con esos valores constrúyanse los gráficos correspondientes a y_1 e y_2. Se observa que tanto y_1 como y_2 sólo toman valores positivos; que y_1 es una *función creciente*, pues a medida que aumenta x aumenta y_1, mientras que y_2 es una *función decreciente*, dado que disminuye a medida que x aumenta.

NOTA: En la definición de función exponencial se excluye el valor $a = 1$, pues en ese caso es constantemente $y = 1$ cualquiera sea x.

También se excluyen los valores negativos de a, pues en ese caso no están definidos los valores correspondientes a $x = \frac{m}{n}$, con n par. Así, si es $a = -2$, a^x para $x = \frac{1}{2}$ sería $\sqrt{-2}$, que no está definido en el campo de los números reales.

EJERCICIOS:

1. Representar en un mismo gráfico $y = a^x$ con $a = 2; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{3}$; para x variando entre -2 y $+2$.

2. Representar en un mismo gráfico cartesiano

$$y_1 = e^x, \qquad y_2 = e^{-x},$$

---

[1] En el cálculo efectivo de estos valores se han empleado logaritmos y antilogaritmos.

$$y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad y_4 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2).$$

Verificar analítica y gráficamente que y_3 es una función *par* y que y_4 es una función *impar*. (Recuérdense las definiciones de la pág. 26).

3. Calcular gráficamente las raíces de la ecuación

$$(5 - x)e^x - 5 = 0,$$

representando las curvas $y_1 = e^{-x}$; $y_2 = (5 - x) : 5$.

R: $x_1 = 0$; $x_2 \sim 4{,}96$.

4. Representar en coordenadas polares $\varrho = e^{\operatorname{sen}\vartheta}$ para ϑ variando de 0° a 360°, considerando intervalos de 30°.

Verifíquese la tabla

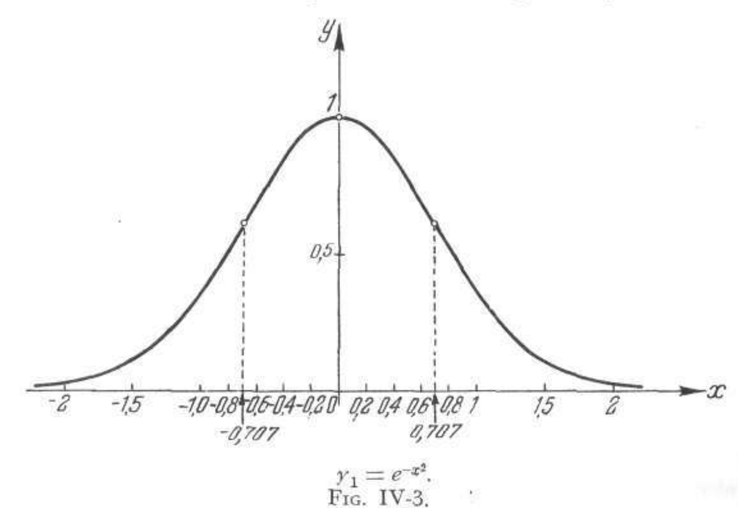
ϑ = 0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
ρ = 1	1,649	2,377	2,718	2,377	1,649	1	0,607	0,422	0,368	0,422	0,607	1

2. CURVA DE GAUSS

De principalísima importancia en el cálculo de probabilidades y la teoría de los errores es la función de Gauss

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Como $1 : \sqrt{\pi}$ es un factor constante, basta considerar la función $y_1 = e^{-x^2}$ para conocer el comportamiento general de la función de Gauss. Por de pronto, se trata de una *función par*, pues $y_1(x) = y_1(-x)$. Además, el exponente es siempre negativo, de modo



$y_1 = e^{-x^2}$.
FIG. IV-3.

que, de acuerdo a lo visto anteriormente, es $y_1 \leqslant 1$, alcanzando el valor 1 sólo para $x = 0$.

Si x es muy grande, y_1 es muy pequeño, pues a medida que aumenta el exponente, la exponencial negativa disminuye.

Con la tabla de valores de e^{-x} se puede trazar fácilmente el diagrama de esta función, que habitualmente se designa con el nombre de "campana de Gauss".

Análoga a ésta es la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ que se utiliza en estadística y de la cual damos una tabla en el Apéndice.

Si se clasifican según su altura los individuos de una cierta población, formando grupos de acuerdo al número de centímetros (dejando de lado las diferencias que afectan a los milímetros), y se construye un gráfico con ordenadas proporcionales al número de individuos de cada grupo, se observará que los puntos así determinados están *aproximadamente* sobre una curva de Gauss. El lugar de la abscisa $x = 0$ corresponderá a la *altura media* de esa población. Habrá muy pocos enanos y muy pocos gigantes.

A diferencia de lo que sucede con la curva matemática de Gauss fuera de un intervalo finito, la curva de las alturas será nula.

EJEMPLOS ESTADÍSTICOS:

1º) QUETELET estudió en 1871 las alturas, medidas en pulgadas, de 26 000 reclutas. Esas alturas oscilaban entre una mínima de 60 pulgadas y una máxima de 76. El cuadro de las frecuencias por cada 1 000 resultó el siguiente:

Altura:	60	61	62	63	64	65	66	67	68
Frecuencia:	2	2	20	48	75	117	134	157	140
Altura:	69	70	71	72	73	74	75	76	
Frecuencia:	121	80	57	26	13	5	3	0	

Represéntense estos valores en un sistema cartesiano y obsérvese que en torno de la altura 67 la distribución sigue *aproximadamente* la ley de Gauss.

2º) Si se arroja 2 veces una moneda, los resultados posibles son 4: cara-cara, cara-seca, seca-cara, seca-seca. Simbólicamente, C^2, $2CS$, S^2, lo cual recuerda la notación del desarrollo del binomio $(C+S)^2$. Se puede verificar fácilmente que lo mismo ocurre en 3, 4, ..., n tiros. En particular, para 20 tiros los casos posibles están comprendidos en el desarrollo simbólico:

$$(C+S)^{20} = C^{20} + 20\,C^{19}S + 190\,C^{18}S^2 + \ldots + 20\,C\,S^{19} + S^{20}.$$

Como en total hay 2^{20} casos posibles, resulta que las probabilidades de aparición de cada configuración son $1 : 2^{20}$; $20 : 2^{20}$; $190 : 2^{20}$; etc. Efectuando las operaciones hasta la 4ª cifra decimal los cocientes resultan:

Número de secas:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Probabilidad × 10 000:	~ 0	~ 0	2	11	46	148	370	739	1 201	1 602	
Número de secas:	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Probabilidad × 10 000:	1 762	1 602	1 201	739	370	148	46	11	2	0	0

Represéntense estos valores en un gráfico cartesiano y resultará en torno del valor 10 una distribución aproximadamente gaussiana.

3. FUNCION LOGARITMICA

En los cursos elementales se estudian los logaritmos y se demuestran sus propiedades más importantes, así como sus aplicaciones al cálculo numérico.

El logaritmo en base a de un número x es el exponente y a que hay que elevar a a para que resulte igual a x.

En símbolos:

$$y = \log_a x \text{ si se verifica la relación } x = a^y.$$

(La base a debe ser positiva y distinta de 1).

Obsérvese que la última relación es análoga a la de la función exponencial, con la diferencia que las variables x e y están permutadas. Aquellas funciones en las cuales las variables aparecen permutadas se llaman *funciones inversas*. La *función logarítmica* $y = \log_a x$ es la *función inversa* de la función exponencial $y = a^x$.

Veamos un procedimiento general para construir gráficamente la función inversa de una función dada.

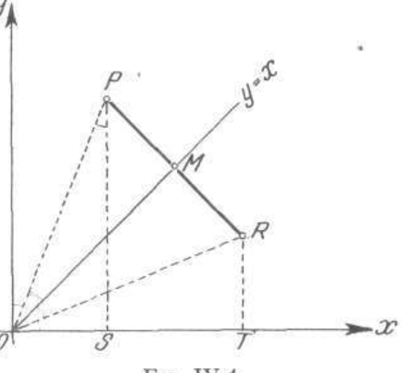


FIG. IV-4.

De acuerdo a la definición habrá que hacer una transformación que permute entre sí las x y las y de cada punto de la función dada. Para ello basta tomar, en lugar de cada punto P de la función, el punto R simétrico de P respecto de la recta $y = x$ (bisectriz del primer cuadrante).

En efecto, con las notaciones de la figura resultan iguales los triángulos OPS y ORT por tener iguales las hipotenusas (oblicuas que se apartan igualmente del pie de la perpendicular) y los ángulos OPS y ROT, que son ambos iguales a $45° - P\hat{O}M$. Entonces resulta

$$x_P = OS = RT = y_R,$$
$$y_P = PS = OT = x_R.$$

De acuerdo a este resultado, utilizando la gráfica de la función $y = 2^x$ que hemos dibujado en la página 59, podrá obtenerse la gráfica de la función $y = \log_2 x$ (fig. IV-5).

Los logaritmos más usados en el cálculo práctico son los *logaritmos decimales*, que se escriben $\lg x$. Presentan la ventaja de permitir una determinación inmediata de la parte entera, mientras que la parte decimal o *mantisa* se encuentra en las tablas.

Sin embargo, la base más empleada en matemática superior es el número $e = 2{,}7182\ldots$, y los logaritmos calculados en esta base se llaman *naturales*, *neperianos* o *hiperbólicos*. Se escriben con la notación $\ln x$.

La conversión de los logaritmos neperianos a decimales, y recí-

procamente, es muy fácil. En efecto, si $\lg N = \alpha$, debe verificarse la relación $10^\alpha = N$. Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros es $\ln N = \alpha \ln 10 = (\ln 10) \lg N$.

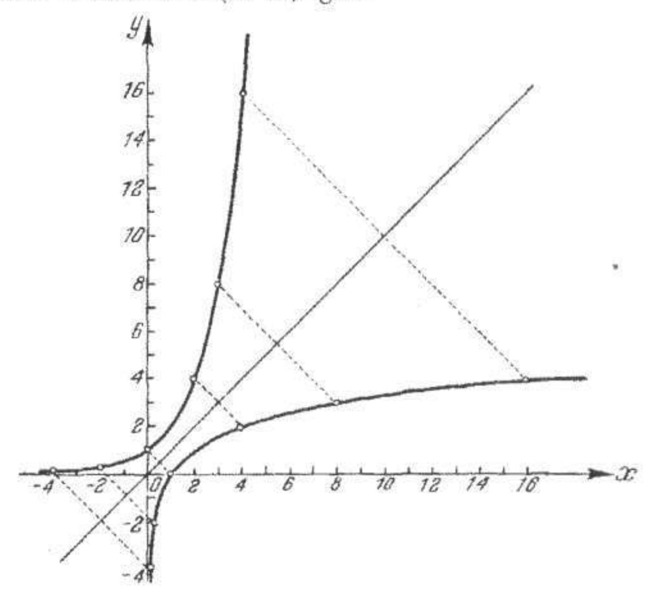


Fig. IV-5. — La función $y = 2^x$ y su inversa $y = \log_2 x$.

El factor de conversión ln 10 es igual a 2,30258... y se lo designa habitualmente con $\frac{1}{M}$, siendo $M = 0{,}43429\ldots$ el *módulo* de la transformación.

La conversión de logaritmos neperianos a decimales se hace, de acuerdo a la relación anterior, mediante la fórmula

$$\lg N = M \ln N.$$

Ejercicios:

1. Utilizando las tablas del apéndice, dibujar las funciones:
$$y = \ln x, \quad y = \lg x.$$
2. Verificar gráficamente que es $\lg x < x$; $\ln x < x$.
3. Resolver gráficamente en forma aproximada la ecuación $2x - 3 \lg x = 6$. Verificar los resultados con las tablas.
(Represéntese la curva $y_1 = \lg x$ y la recta $y_2 = \frac{2}{3}(x - 3)$ y determínense sus intersecciones).
R: 3,88; 0,010.
4. Idem la ecuación $x^2 - 10 \lg x - 3 = 0$.
(Representando las curvas $y_1 = 10 \lg x$; $y_2 = x^2 - 3$, se obtienen en las intersecciones las soluciones aproximadas $x_1 \sim 0{,}5$; $x_2 \sim 2{,}7$).
5. Demostrar que es $\ln 10 = \frac{1}{\lg e}$.

6. Calcular lg 7,48 sabiendo que es ln 7,48 = 2,0122.
   Calcular lg 748 sabiendo que es ln 748 = 6,6174.
   Verifíquense los resultados con la tabla de logaritmos decimales.
7. Calcular ln 7 480 sabiendo que es lg 7 480 = 3,8739.
   Calcular ln 0,0748 sabiendo que es lg 0,0748 = $\bar{2}$,8739.
   Verifíquense los resultados con la tabla de logaritmos neperianos.

ESCALAS Y GRÁFICOS LOGARÍTMICOS: Si sobre un segmento de recta en el cual se ha fijado un origen O se llevan, de acuerdo a una unidad de medida (módulo), los logaritmos de los números, inscribiendo como abscisa del punto el número (y no su logaritmo), se tiene una *escala logarítmica.*

Así, sobre el segmento OA, de 10 cm = U, hemos llevado los logaritmos de los 10 primeros números.

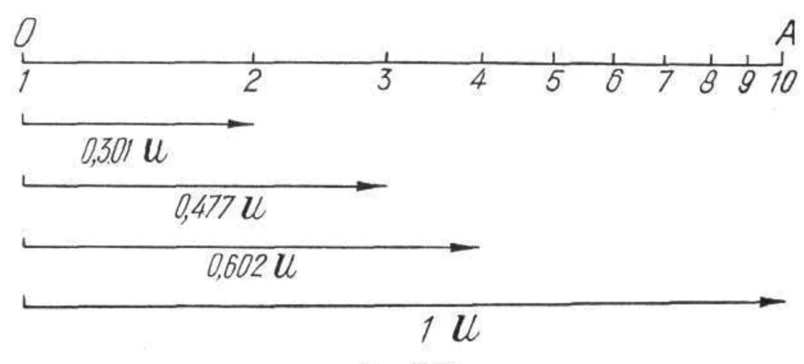


FIG. IV-6.

En las reglas de cálculo se encuentran numerosas escalas logarítmicas. En ellas los módulos más usuales son 25 cm y 12,5 cm. Se comprende que con dos escalas logarítmicas se pueden efectuar productos y cocientes fácilmente, pues basta sumar o restar segmentos. Este es el fundamento de la regla de cálculo que, al utilizar una reglilla móvil, permite efectuar la suma o resta de segmentos con seguridad y rapidez. El cursor facilita la lectura de los números.

Si se desea construir sobre un segmento de longitud l una escala logarítmica $\lg x$ para x variando entre 2 valores a y b, habrá que calcular el módulo M de la escala de acuerdo a la relación

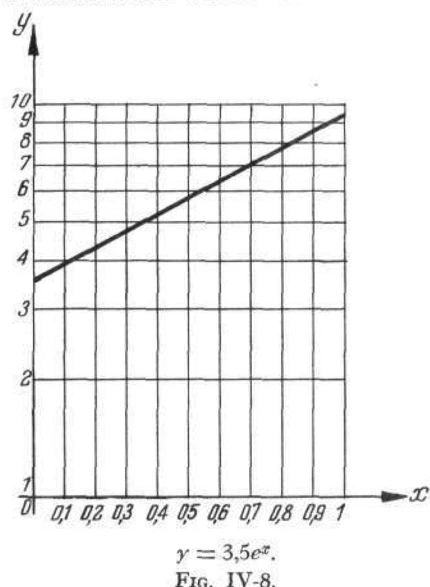
$$M\,[\lg b - \lg a] \leqslant l.$$

Así, si deseamos construir una escala logarítmica para x variando entre 0.01 y 100 sobre un segmento de 10 cm, deberá ser

0,02 0,05 0,2 0,5 2 5 8 20 50 80
0,01 0,1 1 10 100

FIG. IV-7.

$M(\lg 100 - \lg 0{,}01) = 10$ cm, o sea, $M = 2{,}5$ cm. Por consiguiente, deberemos medir los valores $2{,}5(\lg x - \lg 0{,}01)\text{cm} = 2{,}5(\lg x + 2)\text{cm}$ e inscribir los valores x.



$y = 3{,}5e^x$.
Fig. IV-8.

Si en un sistema de coordenadas de un plano se construyen escalas logarítmicas sobre uno o ambos ejes, se tienen, respectivamente, los gráficos *semilogarítmicos* o *logarítmicos dobles*.

En la figura hemos construído un gráfico semilogarítmico. En él se representan muy fácilmente las funciones exponenciales

$$y = c\,a^x,$$

pues tomando logaritmos en ambos miembros resulta

$$\lg y = \lg c + x \lg a,$$

o sea,

$$Y = C + A\,x,$$

si designamos con letras mayúsculas los logaritmos de las correspondientes letras minúsculas. La última relación es una recta en el sistema (x, Y) que se traza teniendo en cuenta que para $x = 0$ es $Y = C$ y que la pendiente es A o que pasa, además, por el punto $x = 1$, $y = c\,a$.

Así, para representar $y = 3{,}5\,e^x$ basta observar que para $x = 0$ es $y = 3{,}5$ y para $x = 1$, $y \sim 9{,}5$. El gráfico puede servir para tabular la función. Así resulta:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	3,5	4,27	5,22	6,38	7,8	9,5

Recíprocamente, se puede utilizar para calcular los valores de x correspondientes a valores equidistantes de y:

y	4	5	6	7	8	9
x	0,13	0,35	0,54	0,69	0,83	0,95

En estadística se emplean con frecuencia los gráficos semilogarítmicos porque ellos permiten hacer deducciones sobre el crecimiento relativo del atributo que se representa.

Por ejemplo, consideremos la tabla siguiente, donde se han registrado, en miles de pesos, las ventas de una compañía en 3 sucursales, A, B, C, del interior del país, el total de esas 3 sucursales y el total de ventas en el país:

Año	*A*	*B*	*C*	$A + B + C$	*Total del país*
1	305	105	465	875	5 000
2	310	100	480	890	5 400
3	400	200	500	1 100	6 000
4	425	250	575	1 250	5 200
5	300	125	465	890	6 400
6	400	130	600	1 130	8 200
7	700	300	800	1 800	9 700
8	760	350	740	1 850	8 300
9	630	320	750	1 700	8 100
10	650	400	775	1 825	9 200
11	900	500	1 050	2 450	10 000
12	500	250	750	1 500	6 500
13	650	300	950	1 900	8 000
14	750	425	1 025	2 200	9 500

Con estos datos hemos construído dos gráficos: uno con escalas uniformes y otro con ordenadas logarítmicas.

En el primero los *aumentos y disminuciones relativas* de *A*, *B*, *C*, $A + B + C$, no se pueden apreciar claramente.

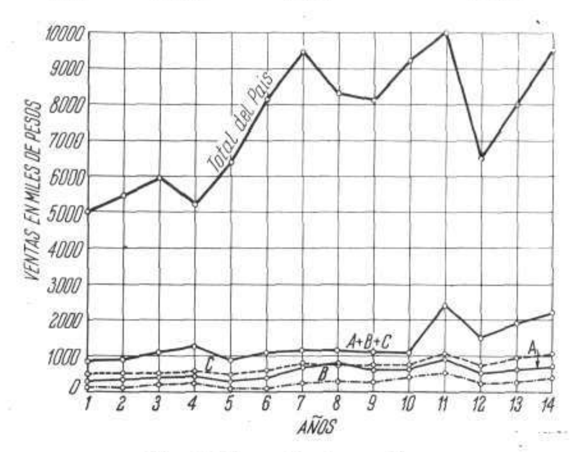


FIG. IV-9. — Escalas uniformes.

En cambio en el segundo resaltan esas *variaciones relativas*. La distancia entre 100 y 200 es la misma que entre 1 000 y 2 000; es decir, al aumento absoluto 100 de la primera corresponde el aumento 1 000 de la segunda, pero en ambos casos el aumento relativo es el mismo, pues la cantidad se ha *duplicado* (1).

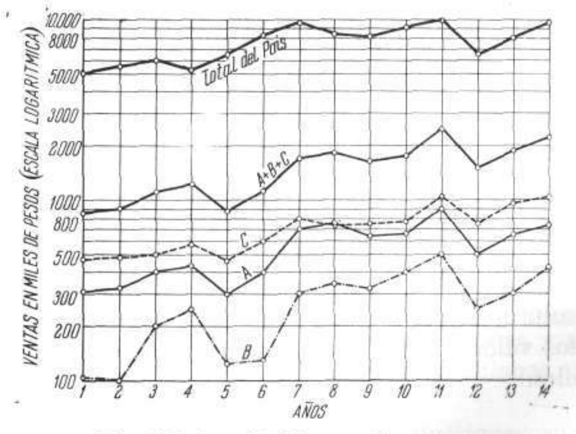


FIG. IV-10. — Gráfico semilogarítmico.

(1) Este ejemplo fué tomado de F. C. MILLS: ***Métodos estadísticos.*** Versión española, ed. Aguilar, 1940.

NOTA HISTÓRICA: La invención de los logaritmos fué realizada hacia 1600 por NEPER (1550-1617). El nombre *logaritmo* significa "número de la razón" (*logos* = razón, *aritmos* = número). Ya EUCLIDES, en los *Elementos* (VIII, 11, 12), dice que si a es la razón, a^2, a^3, ... son la razón duplicada, triplicada, etc., y para a^n, n es el *número de la razón*.

Las primeras tablas las calculó NEPER en 1614 con 7 decimales, eran tablas de senos de ángulos que variaban cada minuto y la base que utilizó era lo que hoy designaríamos e^{-1}. En 1617 y 1624 BRIGGS calculó los logaritmos de base 10; sus tablas eran de 14 decimales.

EJERCICIOS:

1. Representar en papel semilogarítmico (logarítmico simple) $y = 8(0{,}75)^x$.
2. Idem $y = 0{,}2\, e^{0{,}7\,x}$ para $x > 0$ y menor que 10, y en otro gráfico para x mayor que -1 y menor que 1.
3. Trazar en un gráfico semilogarítmico las rectas correspondientes a los tantos por uno $i = 0{,}04$; $0{,}05$; $0{,}06$; $0{,}07$ y $0{,}08$ en la fórmula del interés compuesto
$$M = C(1 + i)^n.$$
Verificar para esos valores de i que el capital se duplica en menos de 18, 15, 12, 11 ó 10 años, respectivamente, y se triplica en menos de 29, 23, 19, 17 y 15 años, respectivamente.

4. FUNCION POTENCIAL

Recibe este nombre la expresión
$$y = x^\alpha,$$
donde α es un exponente real cualquiera.

Si α es entero y positivo, se trata de una expresión racional entera, ya estudiada.

Si α es entero y negativo, es una función racional fraccionaria, que también ya hemos visto.

Si α es un número racional cualquiera, recordando que
$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, \quad x^{-\frac{m}{n}} = 1 : \sqrt[n]{x^m},$$
la expresión resulta ser del tipo irracional.

Si α es un número irracional, teniendo en cuenta que se puede escribir idénticamente
$$y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$
resulta la función exponencial definida para x positivo, pues sólo para estos valores tiene sentido el logaritmo en el campo de los números reales.

EJERCICIO:

Representar en un diagrama $y = x^\alpha$ para $\alpha = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm \frac{1}{2},\ \pm \frac{1}{3},\ \sqrt{2}$.

REPRESENTACIONES CON PAPEL LOGARÍTMICO: El papel logarítmico doble es particularmente apropiado para representar funciones potenciales.

EJEMPLO:

Sea representar

$$y = 2\,x^{0,8}$$

Tomando logaritmos en ambos miembros resulta

$$\lg y = \lg 2 + 0{,}8 \lg x.$$

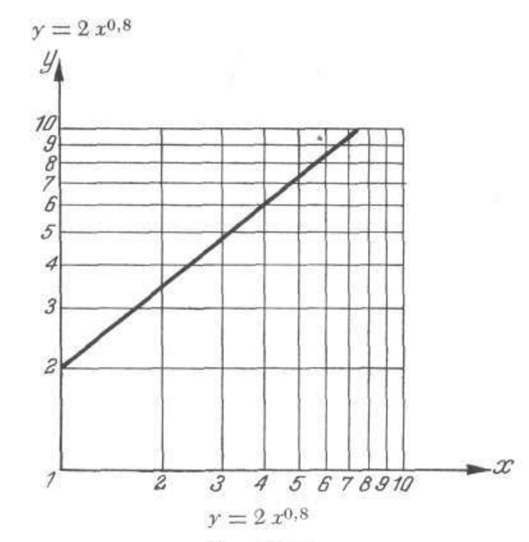
Llamando X a $\lg x$ e Y a $\lg y$, resulta

$$Y = A + BX,$$

con $A = \lg 2$; $B = 0{,}8$.

Esta es la ecuación de una recta en el plano (X, Y), es decir, en un diagrama doblemente logarítmico. Esta recta se dibuja conociendo un punto y su pendiente o 2 puntos.

Como para $x = 1$ es $y = 2$ y la pendiente de la recta es $B = 0{,}8$, el trazado de la gráfica de la función es inmediato.



$y = 2\,x^{0,8}$

FIG. IV-11.

De la lectura del gráfico resulta una tabla de valores:

x	1	2	3	4	5
y	2	3,5	4,8	6,0	7,2

También del gráfico pueden deducirse los valores de x correspondientes a valores dados de y:

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	1,7	2,4	3,1	4,0	4,8	5,7	6,5	7,5

EJERCICIOS:

1. Representar en papel logarítmico doble las funciones

$$y = 0{,}2\,x^{1,6}, \qquad y = 6\,x^{-1,2}.$$

Determinar gráficamente la intersección de las dos curvas.
R: $x = 3{,}36$.

2. Representar en papel logarítmico doble la fórmula del área del círculo $S = \pi r^2$. Calcular gráficamente las áreas de los círculos de radios 1,25 y 3,1. Calcular gráficamente los radios de los círculos de áreas 10 y 25.

5. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

En los cursos de trigonometría se estudian las definiciones y relaciones más importantes existentes entre las diversas funciones trigonométricas.

Recordaremos aquí brevemente las principales definiciones, y en el apéndice el lector encontrará una colección de fórmulas de aplicación frecuente en el desarrollo del cálculo infinitesimal.

MEDIDA NATURAL DE ÁNGULOS: Llamamos medida natural de un ángulo α de vértice O al *número abstracto* dado por la relación entre el arco determinado por α sobre una circunferencia de radio r y centro O y el radio r:

$$\alpha = \frac{\text{arco}}{\text{radio}}.$$

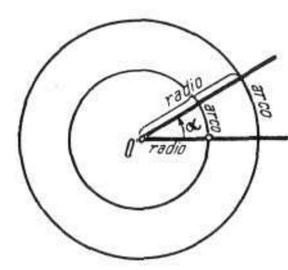


FIG. IV-12.

Esta definición de la medida de α es independiente de r, pues hay proporcionalidad entre los arcos y los radios correspondientes.

En particular, se tendrá un ángulo de medida 1 cuando la longitud del arco sea igual a la longitud del radio correspondiente. Este ángulo se llama *radián*.

Para calcular el valor del radián en el sistema de medida sexagesimal establecemos la relación basada en la proporcionalidad de los arcos y los ángulos centrales correspondientes:

$$\frac{\text{Longitud de la circunf.}}{\text{Angulo de un giro}} = \frac{2\pi r}{360°} = \frac{\text{arco de longitud } r}{1 \text{ radián}},$$

es decir,

$$1 \text{ radián} = \frac{360° r}{2\pi r} = \frac{180°}{\pi} = 57° 17' 44'',8 \dots .$$

Son de uso muy frecuente las siguientes relaciones:

2π radianes	$= 360°$.	$1° = 0{,}017453293\dots$ radianes.
π ,,	$= 180°$.	$1' = 0{,}000290888\dots$,, .
$\frac{1}{2}\pi$,,	$= 90°$.	$1'' = 0{,}000004848\dots$,, .

Como en las cuestiones matemáticas se utiliza casi siempre el sistema natural, mientras que los datos proporcionados por los instrumentos de medición (transportadores, teodolitos, etc.) están en grados sexagesimales, es útil contar con tablas que permitan pasar de uno a otro sistema.

Utilizando la tabla 13 del apéndice se pueden hacer los cálculos siguientes:

1º) Calcular en el sistema sexagesimal un ángulo de 1,25 radianes.

1 rad	———	57° 17′ 44″,81
0,2 ,,	———	11° 27′ 32″,96
0,05 ,,	———	2° 51′ 53″,24
1,25 rad	———	70° 95′ 131″,01 ≅ 71° 37′ 11″.

2º) Calcular a cuántos radianes equivale un ángulo de 213° 15′ 28″.

200°	———	3,490659 rad
10°	———	0,174533 „
3°	———	0,052360 „
10′	———	0,002909 „
5′	———	0,001454 „
20″	———	0,000097 „
8″	———	0,000039 „
213° 15′ 28″	———	3,722051 rad

(Para hallar el valor de 200° en radianes en la tabla se busca el valor correspondiente a 2° y se multiplica por 100).

EJERCICIOS:

1. Expresar en el sistema sexagesimal ángulos de 2,5 rad, 0,83 rad, 0,125 rad. R: 143° 14′ 22″,02; 47° 33′ 19″,8; 7° 9′ 43″,1.

2. Expresar en el sistema natural ángulos de 90°, 17° 35′ 45″, 1 300° 53′ 04″. R: 1,570796 rad; 0,307105 rad; 22,704717 rad.

DEFINICIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: Recordemos que para definir las funciones trigonométricas de un ángulo agudo $\alpha = P\hat{O}Q$ se traza $PQ \perp OQ$ y con los segmentos así determinados se definen los valores

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{PQ}{OP}, \qquad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{OP}{PQ},$$

$$\cos \alpha = \frac{OQ}{OP}, \qquad \sec \alpha = \frac{OP}{OQ},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PQ}{OQ}, \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{OQ}{PQ}.$$

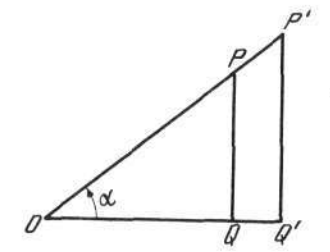


FIG. IV-13.

OBSERVACIONES:

1°) Los valores de estas funciones son *números*, pues se trata de cocientes de segmentos y, por consiguiente, al ser medidos ambos con la misma unidad de longitud, esa unidad queda eliminada en el cociente.

2°) Las relaciones que definen las funciones trigonométricas sólo dependen del ángulo α y no del punto P elegido. En efecto, si se considera otro punto P' cualquiera y el punto Q' correspondiente, en virtud de la semejanza de los triángulos OPQ y $OP'Q'$, las relaciones $\frac{P'Q'}{OP'}$, $\frac{OQ'}{OP'}$, etc., son iguales a $\frac{PQ}{OP}$, $\frac{OQ}{OP}$, etc., respectivamente.

Para generalizar las definiciones de las funciones trigonométricas del ángulo $POQ = \alpha$ al caso de ángulos mayores que un ángulo recto (o a ángulos negativos) se considera un sistema de ejes cartesianos de origen O cuyo eje de las abscisas coincida con la recta OQ.

En los cuatro cuadrantes el signo de las coordenadas de **P** es

	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

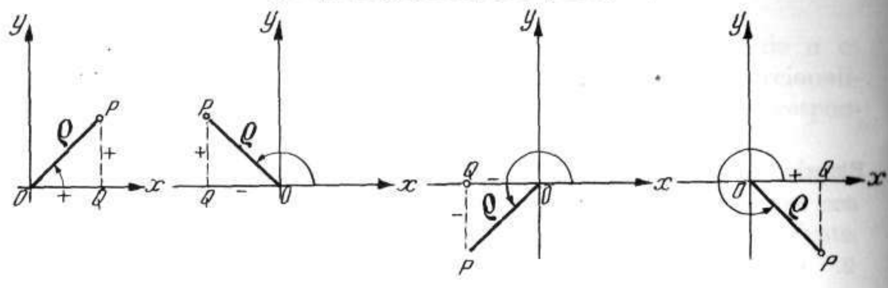


FIG. IV-14.

Al segmento OP se lo designa con la letra ϱ y se lo considera siempre positivo. Con las definiciones anteriores es

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{\varrho}; \quad \cos\alpha = \frac{x}{\varrho}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x};$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y}; \quad \sec\alpha = \frac{\varrho}{x}; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\varrho}{y},$$

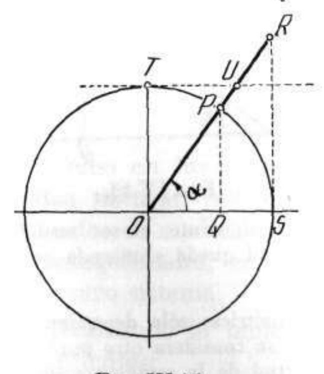


FIG. IV-15.

y de acuerdo a los signos de x y de y las funciones trigonométricas tendrán un signo determinado en cada uno de los cuadrantes. Así resulta:

	I	II	III	IV
sen α	+	+	−	−
cos α	+	−	−	+
tg α	+	−	+	−

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS: Si se traza una circunferencia de centro O y radio $\varrho = 1$, resulta, con las notaciones de la figura, para un ángulo $POQ = \alpha$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{PQ}{OP} = PQ; \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{OQ}{PQ} = \frac{TU}{OT} = TU;$$

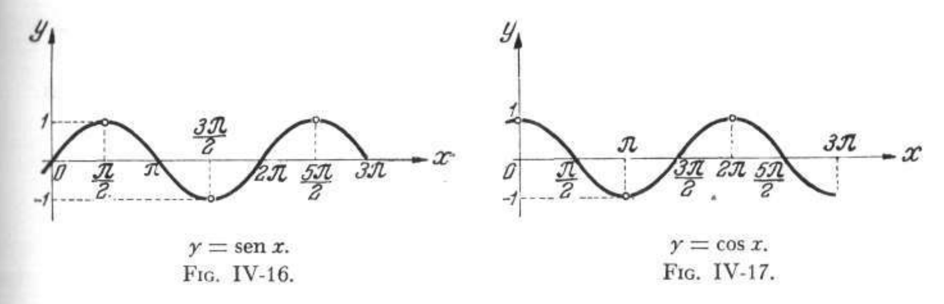
$$\cos\alpha = \frac{OQ}{OP} = OQ; \qquad \sec\alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{OR}{OS} = OR;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS} = RS; \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{OP}{PQ} = \frac{OU}{OT} = OU;$$

donde SR y TU son tangentes a la circunferencia en los puntos S y T, respectivamente.

Por consiguiente, las medidas de los segmentos PQ, OQ, RS, . . ., *cuando se toma como unidad el radio*, dan los valores de sen α, cos α, tg α, ...

A cada valor de α corresponde un valor de estas líneas trigonométricas.



$y = \text{sen } x$.
FIG. IV-16.

$y = \cos x$.
FIG. IV-17.

Si en un sistema cartesiano se llevan como abscisas los arcos PS (rectificados) y como ordenadas las líneas PQ, OQ, RS, . . ., se tienen las gráficas de las funciones trigonométricas.

$y = \text{tg } x$.
FIG. IV-18.

$y = \text{ctg } x$.
FIG. IV-19.

$y = \sec x$.
FIG. IV-20.

$y = \text{cosec } x$.
FIG. IV-21.

De acuerdo a las definiciones resulta que tanto el seno como el coseno toman valores comprendidos entre -1 y $+1$; la tangente y cotangente pueden tomar cualquier valor real, y la secante y cosecante son o bien mayores o iguales que 1 o menores o iguales que -1.

Evidentemente, si en lugar de α se considera el ángulo $\alpha + 2\pi$, los valores de las funciones trigonométricas $f(\alpha)$ son idénticos:

$$f(\alpha + 2\pi) = f(\alpha).$$

Se dice que las funciones trigonométricas son *periódicas* de período 2π.

En general, se dice que una función $f(x)$ es periódica de período p si se verifica la igualdad

$$f(x + p) = f(x)$$

cualquiera sea x.

EJERCICIOS:

1. Resolver gráficamente la ecuación

$$\operatorname{sen} x = \cos x.$$

R: Dibujando las curvas sinusoide y cosinusoide se observa fácilmente que las infinitas intersecciones se encuentran en los puntos $\frac{1}{4}\pi\,(1 + 4k)$ con $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$.

2. Idem

$$x = \operatorname{tg} x.$$

R: Dibujando la recta $y = x$ y la tangentoide resultan infinitas soluciones, de las cuales la primera positiva se encuentra en $x = 4{,}493 \text{ rad} = 257°\,27'\,13''$.

3. Idem

$$x \cdot \operatorname{tg} x = 1 \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi.$$

R: $x = 0{,}86$.

4. Representar gráficamente la función módulo de $\operatorname{sen} x$:

$$y = |\operatorname{sen} x|.$$

5. Representar

$$y = \operatorname{sen} 2x + \cos \frac{1}{2} x$$

para x comprendido entre 0° y 360°, variando cada 30°.
Es conveniente para este ejercicio y para el siguiente disponer la tabla de valores de la siguiente manera:

x	$2x$	$\frac{1}{2}x$	$\operatorname{sen} 2x$	$\cos\frac{1}{2}x$	y
0°	0°	0°	0	1	1
30°	60°	15°	0,866	0,966	1,832
60°	120°	30°	0,866	0,866	1,732
......	......	......	......	......	......

6. Representar la curva

$$y = 1 + \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x.$$

7. Resolver gráficamente la ecuación

$$\operatorname{sen} x = e^{-x}.$$

R: Hay infinitas soluciones, de las cuales la menor es $x = 0{,}588$.

8. Calcular los ángulos α y β dados por las relaciones

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{17}{425}, \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{3{,}24}{18{,}35}$$

y determinar el ángulo γ dado por la fórmula

$$\cos \gamma = [2 \operatorname{sen}^2 (\alpha + \beta)] : [45 \operatorname{tg}^3 (\alpha + 2\beta)].$$

(Empléese la regla de cálculo o las tablas de logaritmos del apéndice).

R: $\alpha = 2° 18'$; $\beta = 10° 10'$; $\gamma = 88° 12'$.

9. Demuéstrense las relaciones:

a) $\operatorname{sen} (\alpha + \beta) \operatorname{sen} (\alpha - \beta) = \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta$.

b) $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} (\alpha + \beta + \gamma) =$

$$= 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma + \alpha).$$

c) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos (\alpha + \beta + \gamma) =$

$$= 4 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\gamma + \alpha).$$

10. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$.	R: $67° 47'$.
b) $4 \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x = \cos^2 x$.	R: $16° 50'$; $-43° 37' 30''$.
c) $5 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$.	R: $41° 24'$; $-34° 21'$.
d) $\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{cotg} x = 4$.	R: $77° 20'$; $-24° 12'$.
e) $4 \operatorname{sen} x + 5 \cos x = 6$.	R: $18° 12'$; $59° 10'$.
f) $2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x = 1$.	R: $72° 25'$; $-139° 46'$.

(Hágase la sustitución $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = t$, con lo que resultará $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2}$; $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, y resuélvase la ecuación de 2º grado, en los casos e), f).

11. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + y = 3, \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1{,}5. \end{cases}$ R: $x = 127° 30'$; $y = 44° 21$.

(Aplíquense las fórmulas trigonométricas del apéndice).

b) $\begin{cases} x - y = -1, \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$ R: $x \sim -48° 40'$; $y \sim -8° 37'$.

(En la segunda ecuación llévese cada razón $\frac{A}{B}$ a la forma $\frac{A - B}{A + B}$).

c) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 0{,}351, \\ \cos x + \cos y = 1{,}172. \end{cases}$ R: $x \sim 68° 52' 30''$; $y \sim -35° 40' 30''$.

(Elévese al cuadrado cada ecuación y luego súmense; transfórmense las sumas de senos y cosenos en productos).

12. Es notable por sus propiedades la función

$$f(x) = -\ln \cos x$$

para $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$. Efectuar su representación gráfica.

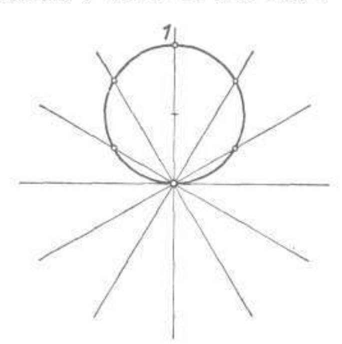
(Obsérvese que siendo la función par es suficiente calcular los valores entre 0 y $\frac{1}{2}\pi = 90°$. De acuerdo a la tabla del apéndice que da los logaritmos decimales de los cosenos se obtienen valores que, multiplicados por 2,3, dan los correspondientes valores de los logaritmos neperianos. Así, resulta para $x = 15°$, $\lg \cos 15° = \bar{1}{,}9849 = -1 + 0{,}9849 = -0{,}0151$; $-\ln \cos 15° = 0{,}03473$).

6. GRAFICOS EN COORDENADAS POLARES

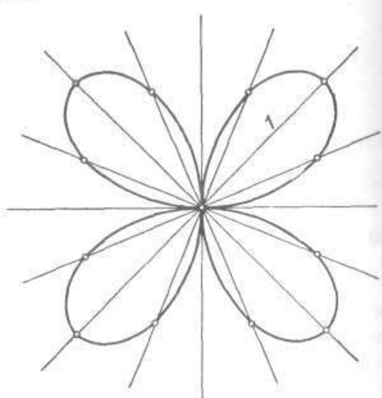
Sea representar en coordenadas polares la función

$$\varrho = \operatorname{sen} \theta$$

cuando θ varía de 0 a 360°.



$\varrho = \operatorname{sen} \theta$ en coordenadas polares.
Fig. IV-22.



$\varrho = \operatorname{sen} 2\theta$ en coordenadas polares.
Fig. IV-23.

De 0 a 180° resulta:

$\theta =$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\varrho = \operatorname{sen} \theta =$	0	0,500	0,866	1	0,866	0,500	0

De 180° a 360°, $\operatorname{sen} \theta$, y, por consiguiente, ϱ toma valores negativos. Así, para $\theta = 210°$ es $\varrho = \operatorname{sen} 210° = -\operatorname{sen} 30° = -0{,}500$, y el punto correspondiente coincide con el obtenido para $\theta = 30°$, pues cuando ϱ es negativo su valor se debe tomar sobre la semirrecta opuesta.

Si se tratara de representar

$$\varrho = \operatorname{sen} 2\theta,$$

se obtendría en cambio una curva de 4 hojas, pues no se produciría ninguna superposición.

Espirales: Para la representación gráfica en coordenadas polares de la relación

$$\varrho = a\theta$$

en el caso $a = 2$ prepararemos el cuadro:

$\theta°$	$= 0°$	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
θ (rad)	$= 0$	0,78	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28
ρ	$= 0$	1,56	3,14	4,72	6,28	7,86	9,42	11,00	12,56

Evidentemente, se puede continuar dando valores crecientes a θ: 405°, 450°, ..., y se obtendrán valores crecientes de ϱ.

Resulta así la *espiral de Arquimedes.*

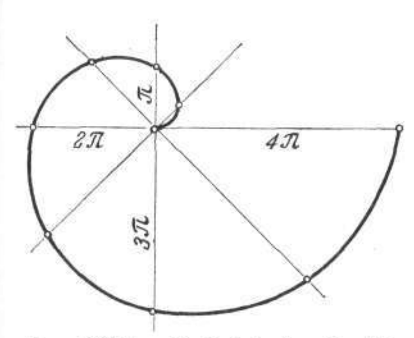


Fig. IV-24. — Espiral de Arquimedes.

Fig. IV-25. — Espiral logarítmica.

También es una espiral la representación gráfica de

$$\varrho = e^{a\theta},$$

llamada *espiral logarítmica* y donde θ puede tomar cualquier valor positivo o negativo.

El cuadro de valores es entonces, para $a = 0{,}1$:

$\theta°$	$= 0°$	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
θ (rad)	$= 0$	0,78	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28
$0{,}1\,\theta$	$= 0$	0,078	0,157	0,236	0,314	0,393	0,471	0,550	0,628
ρ	$= 1$	1,08	1,17	1,27	1,37	1,48	1,60	1,73	1,87

Si a θ se le dan valores negativos, resultan para ϱ valores menores que 1. Así, para $\theta = -45° = -\frac{1}{4}\pi$ rad es $\varrho = e^{-0{,}1\frac{1}{4}\pi} \sim e^{-0{,}078} = 0{,}924$.

Ejercicios:

1. Representar las siguientes curvas (cardioides), dadas en coordenadas polares:
   a) $\varrho = a(1 - \cos\theta)$;
   b) $\varrho = b - a\cos\theta$, con $b > a$ y $b < a$.
2. Verificar que la función
$$\varrho = 2\sec^2\frac{1}{2}\theta$$
   representa una parábola.
3. Verificar que las gráficas polares de las funciones
$$\varrho\theta = a; \quad \varrho^2\theta = a^2; \quad (\varrho - a)^2 = 4a\theta$$

son espirales, que se designan, respectivamente, con los nombres de hiperbólica, lituus y parabólica.

4. Representar la función

$$\varrho = a \cos n\theta$$

para $a = 2$ y $n = 2, 3, 4$.

5. Representar las funciones

a) $\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$ (lemniscata); b) $\varrho = a \dfrac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$ (estrofoide)

7. FUNCION SINUSOIDAL

Generalizando la función

$$y = \operatorname{sen} x$$

consideremos la función

$$f(x) = A \operatorname{sen} (Bx + C),$$

donde aparecen tres constantes: A, B y C.

Como $\operatorname{sen} x$ toma valores comprendidos entre -1 y $+1$, la función $f(x)$ tomará valores entre $-A$ y $+A$.

La constante A se llama *amplitud* de la función sinusoidal. El valor $(Bx + C)$ se llama *fase* de la función, y como para $x = 0$ (punto inicial), resulta igual a C, esta constante se llama *fase inicial* o *constante de fase.*

La función es periódica, es decir, verifica la relación

$$f(x + p) = f(x),$$

con $p = \dfrac{2\pi}{B}$. En efecto,

$$A \operatorname{sen} [B(x + p) + C] = A \operatorname{sen} [Bx + C] \quad \text{si es} \quad Bp = 2\pi.$$

El valor inverso del período $n = \dfrac{B}{2\pi}$ se llama *frecuencia* y el valor B se llama *pulsación.* (En las aplicaciones físicas se representa generalmente con la letra ω).

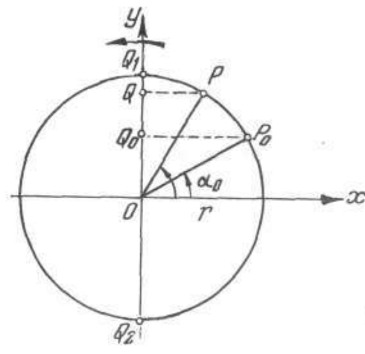


Fig. IV-26.

Movimiento vibratorio armónico: Consideremos sobre una circunferencia de centro O y radio r un punto P que se mueve con velocidad angular ω constante, a partir de una posición inicial P_0, caracterizada por el ángulo α_0, que forma el radio correspondiente con el semieje positivo de las x.

Al cabo de un segundo el ángulo descripto por el radio OP_0 será de ω radianes y al cabo de t segundos será de ωt radianes, de modo que el ángulo POx resulta $(\omega t + \alpha_0)$.

Si consideramos la proyección de este movimiento sobre el eje de las y, a cada punto P corresponderá un punto Q de ordenada y, de modo tal que se verifica

$$y = OQ = OP \cos P\hat{O}Q = OP \operatorname{sen} P\hat{O}x = r \operatorname{sen} (\omega t + \alpha_0). \qquad [1]$$

El movimiento de Q sobre el eje de las y se llama *movimiento vibratorio armónico.* Con las notaciones de [1] la amplitud del movimiento es r, la pulsación ω y la fase inicial α_0.

Obsérvese cómo varía la posición de Q a medida que transcurre el tiempo. Con las notaciones de la figura resulta que a partir de Q_0 la proyección de P_0 sube hasta Q_1 y luego desciende, pasando por O hasta llegar a Q_2, para volver a subir hasta Q_1, y así sucesivamente. Nótese que, mientras el punto P recorre espacios iguales en tiempos iguales (movimiento uniforme), los espacios correspondientes recorridos por Q no son proporcionales a los tiempos (movimiento variado). Más adelante veremos cómo se mide, en general, la variación del espacio con el tiempo (velocidad).

Si un tubo atravesara la Tierra, la teoría de la gravitación prevé que un punto material que partiera del reposo desde un punto P sería atraído hacia el centro O de la Tierra, y aun cuando al llegar a O se anulara la fuerza de la atracción, por la velocidad que lleva continuaría su movimiento cada vez más lentamente porque, a medida que se aleja de O, la atracción aumenta.

El cuerpo llegaría a la antípoda P' sin velocidad y la atracción hacia O le provocaría un movimiento análogo al anterior, y así indefinidamente.

El punto material realizaría en esas condiciones un *movimiento vibratorio armónico.*

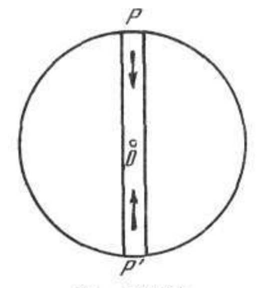


FIG. IV-27.

Se comprende en este ejemplo cómo el punto material se va "frenando" en las proximidades de los polos y se va "acelerando" en las cercanías del centro.

EJERCICIOS:

1. Representar las funciones

a) $y = 2 \operatorname{sen} (3x + 5)$; b) $y = 0{,}28 \operatorname{sen} (4x - 0{,}816)$.

(Si se desea utilizar la regla de cálculo, transfórmense los valores 5 y $-0{,}816$ radianes en grados sexagesimales).

2. Dada la función sinusoidal

$$y = A \operatorname{sen} (Bx + C)$$

calcular

a) la ordenada correspondiente al origen;

b) los valores x que anulan la función;

c) los intervalos donde la función es positiva y donde es negativa.

R: a) $A \operatorname{sen} C$;

b) $x = -\dfrac{C}{B} + k\dfrac{\pi}{B}$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

c) $y > 0$ si $\dfrac{-C + k\pi}{B} < x < \dfrac{-C + (k+1)\pi}{B}$, con k *par* e $y < 0$ si x verifica esas desigualdades con k *impar*.

3. Mostrar que toda expresión del tipo

$$p \operatorname{sen} bx + q \cos bx$$

se puede escribir en la forma $A \operatorname{sen}(bx + c)$. Calcular las expresiones de A y C.
(Desarróllese la expresión $A \operatorname{sen}(bx + C)$ e identifíquense los coeficientes con los de la función dada).

R: $A = \sqrt{p^2 + q^2}$; $C = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{q}{p}$.

4. La intensidad de una corriente eléctrica en un circuito está dada por

$$I = 50 \operatorname{sen} 628t, \quad \text{en amperios,}$$

y el voltaje por

$$E = 148 \operatorname{sen}(628t + 0{,}559), \quad \text{en voltios.}$$

La potencia es

$$W = I \cdot E, \quad \text{en vatios.}$$

Trazar las curvas representativas de I, E, W en función del tiempo t en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 0{,}01$ para t variando cada 0,001. Utilícese la regla de cálculo para hallar W.

5. Demostrar que la suma de 2 funciones sinusoidales de igual período es otra función sinusoidal.

Solución: Sea $2\pi : B$ el período común de ambas funciones.
Si es

$$y_1 = A_1 \operatorname{sen}(Bx + C_1); \quad y_2 = A_2 \operatorname{sen}(Bx + C_2),$$

resulta

$$y_1 + y_2 = A_1(\operatorname{sen} Bx \cos C_1 + \cos Bx \operatorname{sen} C_1) + A_2(\operatorname{sen} Bx \cos C_2 + \\ + \cos Bx \operatorname{sen} C_2) = \operatorname{sen} Bx(A_1 \cos C_1 + A_2 \cos C_2) + \\ + \cos Bx(A_1 \operatorname{sen} C_1 + A_2 \operatorname{sen} C_2).$$

Si se hace ahora

$$\begin{aligned} R \operatorname{sen} \varphi &= A_1 \operatorname{sen} C_1 + A_2 \operatorname{sen} C_2, \\ R \cos \varphi &= A_1 \cos C_1 + A_2 \cos C_2, \end{aligned} \qquad [1]$$

resulta

$$y_1 + y_2 = R(\operatorname{sen} Bx \cos \varphi + \cos Bx \operatorname{sen} \varphi) = R \operatorname{sen}(Bx + \varphi),$$

que es también una función sinusoidal del mismo período $2\pi : B$.

6. En el ejercicio anterior demostrar que la amplitud y la constante de fase de la función $y_1 + y_2$ están dadas por las expresiones

$$R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(C_1 - C_2),$$
$$\operatorname{tg} \quad = \frac{A_1 \operatorname{sen} C_1 + A_2 \operatorname{sen} C_2}{A_1 \cos C_1 + A_2 \cos C_2}$$

(La primera de estas relaciones se obtiene elevando al cuadrado y sumando las 2 ecuaciones [1] y la segunda, dividiéndolas ordenadamente).
(Gráficamente pueden obtenerse R y φ con la construcción de Fresnel, llevando, a partir de un eje, el vector de módulo A_1 y argumento C_1 y el

vector de módulo A_2 y argumento C_2 y sumando vectorialmente. Justifíquese la construcción de acuerdo a las fórmulas halladas analíticamente).

7. Estudiar en el ejercicio anterior los casos particulares

a) $A_1 = A_2 = A$; b) $C_1 - C_2 = 0$; c) $C_1 - C_2 = \pi$.

Trazar los gráficos correspondientes.

R: a) $\varphi = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) \pm 2n\pi$; $R = 2A \cos\frac{1}{2}(C - C_2)$;

b) $\varphi = C_1 = C_2$; $R = A_1 + A_2$;

c) $\varphi = C_1$ o $\varphi = C_2$; $R = A_1 - A_2$.

(Si en el caso c) es, además, $A_1 = A_2$, es $R = 0$, o sea, cinemáticamente, se tiene el reposo).

8. Generalizar los resultados anteriores al caso de n funciones sinusoidales del mismo período.

R: $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = R \operatorname{sen}(Bx + \varphi)$, con

$$\begin{cases} R \cos \varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \cos C_i, \\ R \operatorname{sen} \varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen} C_i. \end{cases}$$

Además, se calculan:

$$R^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \cos C_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \operatorname{sen} C_i \right)^2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum A_i \operatorname{sen} C_i}{\sum A_i \cos C_i}.$$

8. ECUACIONES PARAMETRICAS DE LAS CONICAS

Utilizando las funciones trigonométricas es posible dar ecuaciones paramétricas de las cónicas, esto es, expresar las variables x e y mediante un parámetro t de modo tal que, eliminando este parámetro t, las relaciones entre x e y correspondan a las ecuaciones ya vistas en la página 45.

ELIPSE: En este caso podemos escribir:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t, \end{cases}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos t, \\ \dfrac{y}{b} = \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

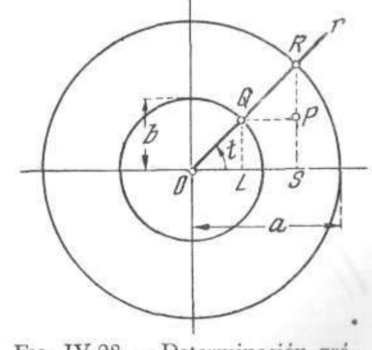


FIG. IV-28. — Determinación gráfica de los puntos de una elipse.

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro estas expresiones y recordando que $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, resulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En este caso, además, es muy fácil dar una interpretación geométrica sencilla del parámetro t, que varía entre 0 y 360° (¹). En efecto, trazadas 2 circunferencias concéntricas de radios a y b y una semirrecta que forma un ángulo t con el eje de las abscisas y que corta a las circunferencias en los puntos R y Q, las coordenadas del punto P, obtenido mediante las paralelas QP y RP a los ejes coordenados, son:

$$x_P = OS = OR \cos t = a \cos t,$$
$$y_P = PS = QL = OQ \operatorname{sen} t = b \operatorname{sen} t.$$

Digamos, de paso, que este procedimiento para determinar puntos de una elipse de semiejes a y b es de útil aplicación en el dibujo geométrico. Trazando, además de los ejes, 4 rectas con $t = 30°$, $60°$, $120°$ y $150°$, resultan 12 puntos de la elipse.

Como caso particular, si es $a = b = r$, resultan las relaciones

$$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t,$$

que son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de centro en el origen y radio r.

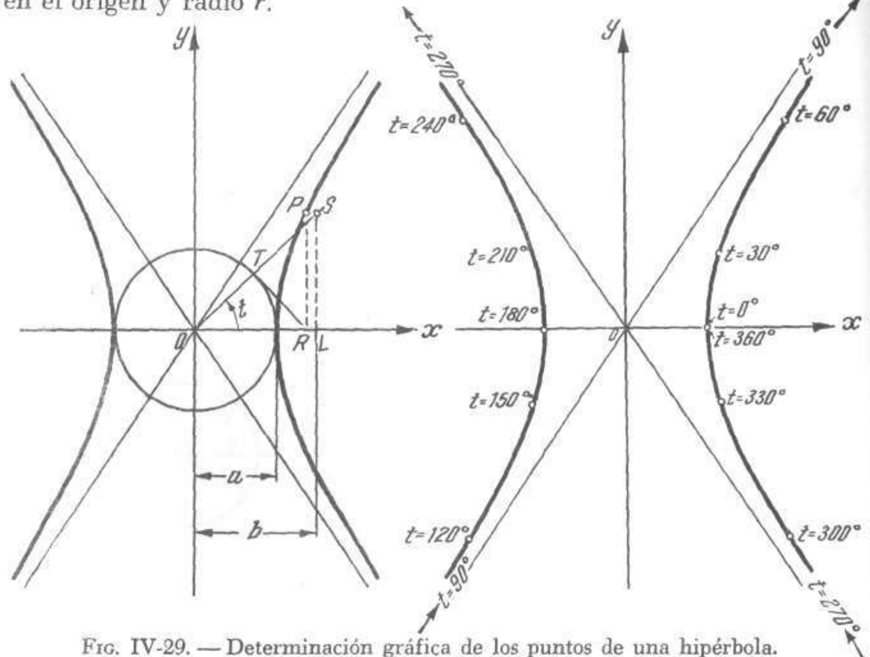


FIG. IV-29. — Determinación gráfica de los puntos de una hipérbola.

(¹) El parámetro t es la anomalía excéntrica que KEPLER introdujo en 1609 al estudiar el movimiento de los planetas en torno del Sol. La construcción geométrica es de DE LA HIRE (1685).

HIPÉRBOLA: Se pueden adoptar como ecuaciones paramétricas de una hipérbola de semiejes a y b las relaciones indicadas por Legendre:

$$\begin{cases} x = a \sec t, \\ y = b \operatorname{tg} t, \end{cases} \quad \text{o sea,} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{\cos t}, \\ \dfrac{y}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}. \end{cases}$$

Elevando al cuadrado y restando resulta

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que, como ya hemos visto, es la ecuación de la hipérbola.

La interpretación geométrica del parámetro t también es sencilla. Trazadas una circunferencia de radio a y una recta $x = b$, una semirrecta cualquiera que forma un ángulo t con el semieje positivo de las abscisas determina los puntos T y S; en T se traza la tangente TR y por S una paralela al eje de las abscisas; la intersección de RP y de SP da el punto P de la hipérbola. En efecto:

$$x_P = OR = \frac{OT}{\cos t} = a \sec t,$$

$$y_P = PR = SL = OL \operatorname{tg} t = b \operatorname{tg} t.$$

9. CURVAS DE LISSAJOUS

Consideremos la función definida paramétricamente mediante 2 funciones sinusoidales:

$$\begin{cases} x = A_1 \operatorname{sen} (B_1 t + C_1), \\ y = A_2 \operatorname{sen} (B_2 t + C_2). \end{cases} \quad [1]$$

Para estudiar la figura que se obtiene en un diagrama cartesiano distinguiremos varios casos:

I) Funciones de igual pulsación: $B_1 = B_2 = B$ (o sea, de igual período).

Es

$$\frac{x}{A_1} = \operatorname{sen} Bt \cos C_1 + \cos Bt \operatorname{sen} C_1$$

$$\frac{y}{A_2} = \operatorname{sen} Bt \cos C_2 + \cos Bt \operatorname{sen} C_2.$$

Multiplicamos la primera ecuación por $\cos C_2$ y la segunda por $\cos C_1$ y restamos

$$\frac{x}{A_1}\cos C_2 - \frac{y}{A_2}\cos C_1 = \cos Bt \operatorname{sen}(C_1 - C_2).$$

Análogamente multiplicamos, respectivamente, por $\operatorname{sen} C_2$ y $\operatorname{sen} C_1$:

$$\frac{x}{A_1}\operatorname{sen} C_2 - \frac{y}{A_2}\operatorname{sen} C_1 = \operatorname{sen} Bt \operatorname{sen}(C_2 - C_1).$$

Elevando al cuadrado y sumando ordenadamente estas 2 últimas ecuaciones se obtiene la siguiente expresión algebraica en x e y, sin intervención de las funciones trigonométricas de t:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(C_1 - C_2) = \operatorname{sen}^2(C_1 - C_2).$$

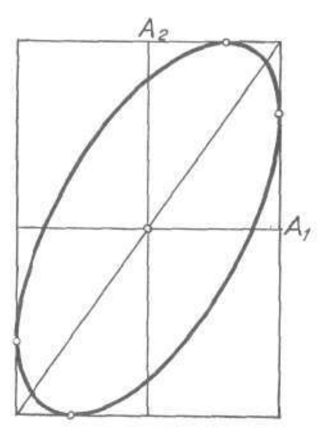


FIG. IV-30.

En los cursos de geometría analítica se ve que esta ecuación representa, si es $C_1 \neq C_2$, una elipse con centro en el origen de coordenadas y ejes oblicuos.

EJERCICIOS:

1. Estudiar los casos particulares que resultan en la curva [1] con $B_1 = B_2 = B$ para
   a) $C_1 = C_2$;
   b) $C_1 = C_2 + \pi$;
   c) $C_1 = C_2 + \frac{1}{2}\pi$.

R: a) $y = \frac{A_2}{A_1}x$, se trata de una recta;

b) $y = -\frac{A_2}{A_1}x$, es la recta simétrica de la anterior;

c) $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$, es una elipse de semiejes A_1 y A_2 situados sobre los ejes coordenados.

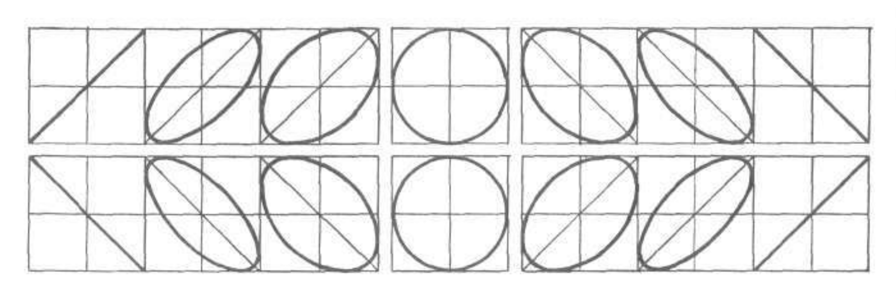


FIG. IV-31. — Curvas de LISSAJOUS correspondientes a movimientos ortogonales de igual amplitud y diversas diferencias de fases.

2. Establecer las ecuaciones y dibujar las curvas correspondientes a $B_1 = B_2 = 2\pi$ y $A_1 = A_2 = 1$ para

$$C_1 - C_2 = 0,\ \frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{11}{6}\pi,\ 2\pi.$$

(Véanse los gráficos de la fig. 31).

II) Funciones de diferentes pulsaciones: $B_2 = rB_1$, siendo r un número real cualquiera.

Distinguiremos dos casos: r número racional $\frac{p}{q}$ y r número irracional. Si r es racional, se pueden eliminar las funciones trigonométricas de t y resulta una *ecuación algebraica*. En cambio, si r es un número irracional, esta eliminación no es posible y la curva resultante es *trascendente*.

EJEMPLOS:

1º) Determinaremos analítica y gráficamente la curva correspondiente a

$$x = \operatorname{sen} 2t,$$
$$y = \operatorname{sen} 3t.$$

Recordando que es $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t$; $\operatorname{sen} 3t = \operatorname{sen} t\,(4 \cos^2 t - 1)$, resulta

$$\frac{y}{x} = \frac{4 \cos^2 t - 1}{2 \cos t},$$

y despejando $\cos t$, de acuerdo a la fórmula de la ecuación de 2º grado, se tiene

$$\cos t = \frac{1}{4x}\,(y \pm \sqrt{y^2 + 4x^2}).$$

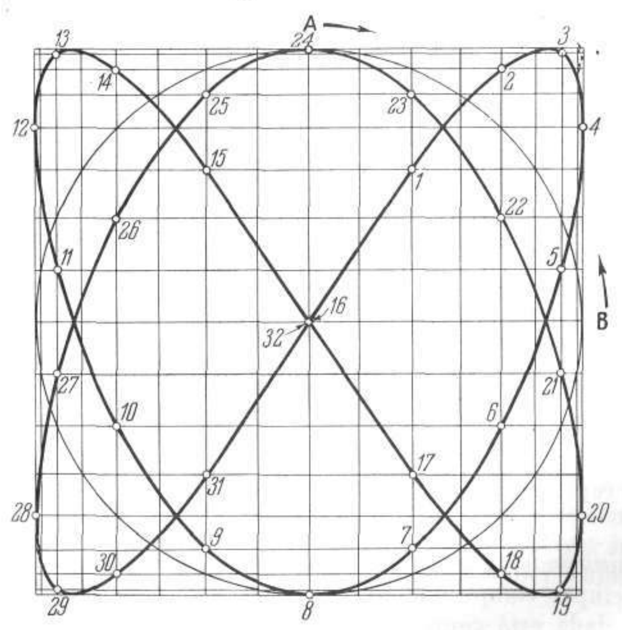


FIG. IV-32.

A partir de este valor se puede calcular sen t, y con ambos, la expresión de $x = 2 \operatorname{sen} t \cos t$, la cual da una relación algebraica (bastante complicada) entre x e y.

Gráficamente se procede en la siguiente forma: se divide la circunferencia de radio 1 en un cierto número de arcos iguales (en el caso de la figura, 32) y los puntos de división se unen mediante verticales y horizontales. Estos puntos tienen como coordenadas senos y cosenos de múltiplos del arco que ha quedado como fundamental (en nuestro caso es $\frac{1}{32}$ de la circunferencia).

Para $t = 1$ es $x = \operatorname{sen} 2$, $y = \operatorname{sen} 3$. Si se determina el punto de intersección de la vertical correspondiente al punto de la circunferencia que dista 2 arquitos a partir de A con la horizontal correspondiente al punto de la circunferencia que dista 3 arquitos a partir de B, se tendrá el punto 1. Análogamente para el punto 2 (4ª vertical a partir de A y 6ª horizontal a partir de B).

2º) Representaremos la curva de Lissajous correspondiente al caso de pulsaciones inconmensurables:

$$x = 4 \cos t, \qquad y = 3 \operatorname{sen} \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

FIG. IV-33.

FIG. IV-34.

No es posible establecer una relación algebraica entre x e y, por lo cual la curva será trascendente. Se prepara entonces un cuadro de valores haciendo $t = 0°$, $90°$, $90° \sqrt{2}$, $180°$, $180° \sqrt{2}$, etc. Así resulta la primer parte de la curva (fig. 33). La figura 34 se ha obtenido considerando valores positivos y negativos de t hasta un cierto valor t_0, debiendo suspenderse luego el trazado pues como la curva resultante pasa por todos los puntos del rectángulo $|x| \leqslant 4$, $|y| \leqslant 3$, se habría obtenido, al final, una mancha negra.

10. SINUSOIDE AMORTIGUADA

La representación gráfica de

$$y = e^{-ax} \operatorname{sen} (Bx + C), \quad \text{con } a > 0,$$

es una *sinusoide amortiguada*. En efecto, los valores de sen $(Bx + C)$ están siempre comprendidos entre $+1$ y -1 y, por consiguiente, la función dada está comprendida entre

$$y_1 = + e^{-ax} \quad \text{e} \quad y_2 = - e^{-ax}.$$

Según hemos visto anteriormente, la exponencial y_1 es una función decreciente que se va acercando a 0 a medida que x aumenta.

Este tipo de funciones aparece en los problemas de física donde se presentan amortiguamientos.

La función no es periódica, pero existe un pseudo período que corresponde al período del factor sinusoidal.

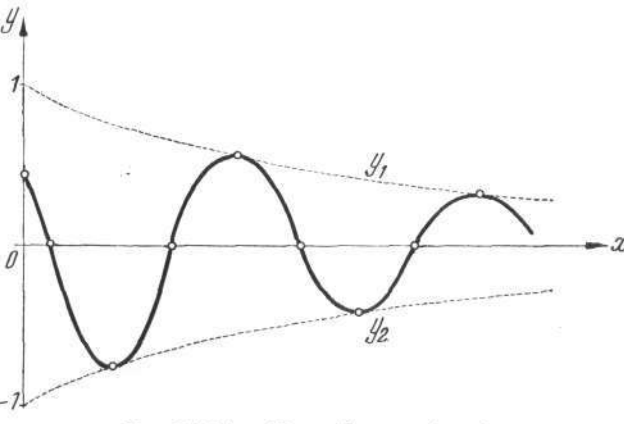


Fig. IV-35. — Sinusoide amortiguada.

11. FUNCIONES CICLOMETRICAS

Reciben este nombre las funciones inversas de las funciones circulares. Así, $y = \text{arc sen } x$ (se lee "el arco cuyo seno es x") es la función inversa de $y = \text{sen } x$. Si bien en esta última expresión a cada valor de x corresponde un solo valor de y, la proposición recíproca no es cierta.

A un valor de x $\left(\text{por ejemplo } \frac{1}{2}\right)$ corresponden infinitos arcos cuyo seno vale x (en el ejemplo: $\frac{\pi}{6} \pm 2k\pi$; $\frac{5}{6}\pi \pm 2k\pi$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$).

Para evitar esta ambigüedad definiremos:

$y = \text{arc sen } x$, considerando sen x en el intervalo $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant +\frac{1}{2}\pi$.

$y = \text{arc cos } x$, ,, cos x ,, ,, ,, $0 \leqslant x \leqslant +\pi$.

$y = \text{arc tg } x$, ,, tg x ,, ,, ,, $-\frac{1}{2}\pi < x < +\frac{1}{2}\pi$.

$y = \text{arc ctg } x$, ,, ctg x ,, ,, ,, $0 < x < +\pi$.

En esta forma a cada valor de x corresponde un único valor de y perfectamente definido. Las funciones arc sen x y arc cos x resultan definidas para x comprendido entre -1 y $+1$, mientras que las funciones arc tg x y arc ctg x toman valores para cualquier valor de x (positivo o negativo).

En la página 63 hemos explicado cómo se obtiene gráficamente la función inversa de una función dada tomando los puntos simétri-

cos respecto de la recta $y = x$. Procediendo en esta forma se obtienen rápidamente los diagramas de las funciones ciclométricas o circulares inversas.

Observaciones:

1°) En algunos libros, especialmente de lengua inglesa, se escribe $\operatorname{sen}^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\operatorname{tg}^{-1} x$, ..., para indicar las funciones $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, ... Convendrá tener presente esta designación al consultar tablas y tratados extranjeros.

2°) En el apéndice hemos incluído tablas de las funciones circulares inversas que facilitarán el trazado de los gráficos correspondientes.

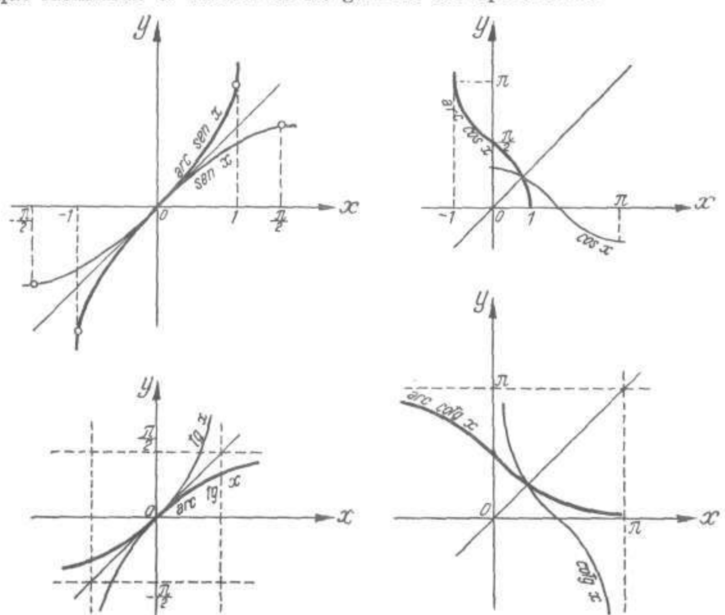


Fig. IV-36. — Determinación gráfica de las funciones ciclométricas a partir de las funciones circulares.

Ejercicios:

1. Calcular:

a) $\operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2}\sqrt{2}$; b) $\operatorname{arc\,cos} \frac{1}{2}\sqrt{3}$;

c) $\operatorname{arc\,tg} (-1)$; d) $\operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

R: a) $\frac{1}{4}\pi$; b) $\frac{1}{6}\pi$; c) $-\frac{1}{4}\pi$; d) $\frac{1}{3}\pi$.

2. ¿Cuánto vale la expresión $\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x$?

R: $\frac{1}{2}\pi$.

3. Verificar las siguientes relaciones:

a) $\operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{arc\,cos} \sqrt{1 - x^2} = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

b) $\operatorname{arc} \cos x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{1 - x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$;

c) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;

d) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x \pm \operatorname{arc} \operatorname{sen} y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} (x \sqrt{1 - y^2} \pm y \sqrt{1 - x^2})$;

e) $\operatorname{arc} \cos x \pm \operatorname{arc} \cos y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} (y \sqrt{1 - x^2} \pm x \sqrt{1 - y^2})$;

f) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$.

4. Verificar la igualdad

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\pi$$

para $x > 0$.

5. Verificar que $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x$ y $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ son funciones impares.

6. Demostrar la fórmula

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\pi + k\pi.$$

7. Verificar que la relación

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (k \operatorname{tg} x)$$

implica $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{k} \operatorname{tg} y\right)$.

8. Dada la función

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x,$$

determinar su valor cuando $x = \operatorname{sen} 2\alpha$ con $-\pi < \alpha < \pi$.

R: $y = 2\alpha$.

9. Idem

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a + x}{1 - ax},$$

cuando $a = \operatorname{tg} \alpha$, $x = \operatorname{tg} \zeta$.

R: $y = \alpha + \zeta$.

10. En el cálculo de probabilidades aparece la función

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{x}$$

para x variando entre 0 y 1. Efectuar su representación gráfica.

12. FUNCIONES HIPERBOLICAS

Definiremos las funciones hiperbólicas: seno hiperbólico ($\operatorname{Sh} x$), coseno hiperbólico ($\operatorname{Ch} x$), tangente hiperbólica ($\operatorname{Th} x$), cotangente hiperbólica ($\operatorname{Cth} x$), mediante las siguientes relaciones:

$$\operatorname{Sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}); \quad [1] \qquad \operatorname{Ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}); \quad [2]$$

$$\operatorname{Th} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad [3] \qquad \operatorname{Cth} x = \frac{\operatorname{Ch} x}{\operatorname{Sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \quad [4]$$

Empleando las tablas de la función exponencial se pueden cons-

truir las gráficas de las funciones hiperbólicas; pero, dado su uso frecuente, existen numerosas tablas de estas funciones.

En el apéndice hemos incluído una tabla de 5 decimales.

Resultan de inmediato las siguientes propiedades:

1°) Sumando [1] y [2] se obtiene: $\operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} x = e^{x}$. [5]

Restando [1] y [2] se llega a: $\operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x = e^{-x}$. [6]

Multiplicando ordenadamente estas igualdades se tiene la relación fundamental

$$\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x = 1, \qquad [7]$$

que corresponde a la de las funciones trigonométricas:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

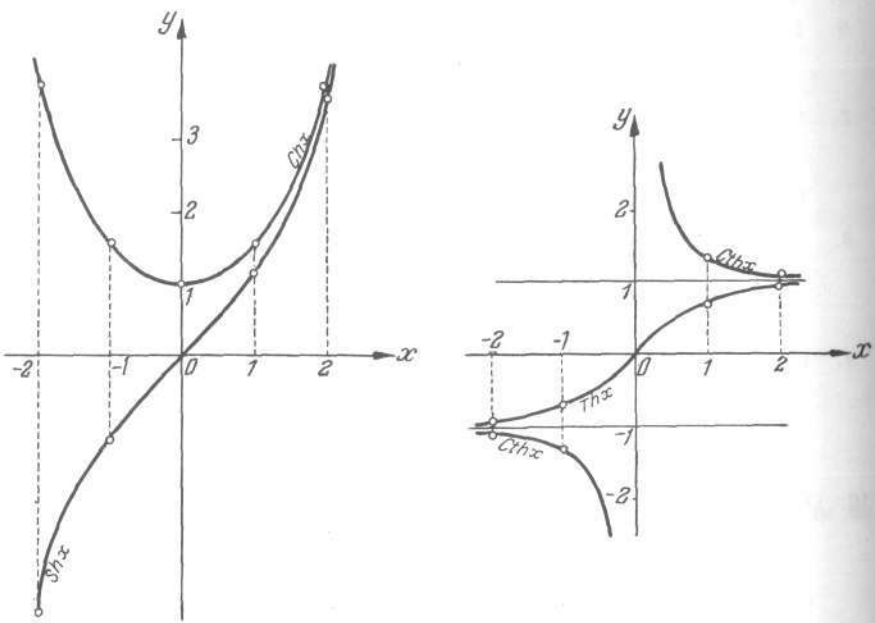


Fig. IV-37. — Funciones hiperbólicas.

2°) La función $\operatorname{Ch} x$ es *par*, mientras que las funciones $\operatorname{Sh} x$, $\operatorname{Th} x$, $\operatorname{Cth} x$ son *impares;* es decir:

$$\operatorname{Ch}(-x) = \operatorname{Ch} x;\ \operatorname{Sh}(-x) = -\operatorname{Sh} x;\ \operatorname{Th}(-x) = -\operatorname{Th} x;$$
$$\operatorname{Cth}(-x) = -\operatorname{Cth} x.$$

Demostraremos sólo la segunda relación. Las restantes las verificará el lector de acuerdo a las definiciones [2], [3] y [4].

$$\operatorname{Sh}(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{-(-x)}) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = -\operatorname{Sh} x.$$

3º) De acuerdo a las características ya estudiadas de las funciones e^x, e^{-x}, se tiene:

$$\mathrm{Sh}\, x < \mathrm{Ch}\, x \;\therefore\; |\mathrm{Th}\, x| < 1, \quad |\mathrm{Cth}\, x| > 1.$$
$$\mathrm{Sh}\, 0 = 0;\ \mathrm{Ch}\, 0 = 1;\ \mathrm{Th}\, 0 = 0.$$

4º) A medida que x crece, tomando valores positivos, e^{-x} se hace cada vez más pequeña y, por consiguiente, $\mathrm{Sh}\, x$ tiende a confundirse con $\mathrm{Ch}\, x$ y ambos se acercan a $\frac{1}{2}e^x$. Por lo tanto, $\mathrm{Th}\, x$ y $\mathrm{Cth}\, x$ se acercan a 1, la primera por valores inferiores a 1 y la segunda por valores superiores a 1.

5º) Vale una fórmula análoga a la de Moivre:

$$(\mathrm{Ch}\, x + \mathrm{Sh}\, x)^n = \mathrm{Ch}\, nx + \mathrm{Sh}\, nx.$$

En efecto, elevando ambos miembros de [5] a la n-sima potencia resulta

$$(\mathrm{Ch}\, x + \mathrm{Sh}\, x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \mathrm{Ch}\, nx + \mathrm{Sh}\, nx.$$

6º) Para la adición de argumentos se tienen las fórmulas

$$\mathrm{Sh}\,(x \pm y) = \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}\, y \pm \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Sh}\, y,$$
$$\mathrm{Ch}\,(x \pm y) = \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Ch}\, y \pm \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Sh}\, y,$$
$$\mathrm{Th}\,(x \pm y) = \frac{\mathrm{Th}\, x \pm \mathrm{Th}\, y}{1 \pm \mathrm{Th}\, x\, \mathrm{Th}\, y}.$$

Demostraremos sólo la primera; las otras puede demostrarlas el lector como ejercicio.

De acuerdo a la definición [1], y recordando [5] y [6], resulta:

$$\mathrm{Sh}(x + y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \frac{1}{2}(e^x e^y - e^{-x} e^{-y}) =$$
$$= \frac{1}{2}[(\mathrm{Ch}\, x + \mathrm{Sh}\, x)(\mathrm{Ch}\, y + \mathrm{Sh}\, y) - (\mathrm{Ch}\, x - \mathrm{Sh}\, x)(\mathrm{Ch}\, y - \mathrm{Sh}\, y)] =$$
$$= \mathrm{Ch}\, x\, \mathrm{Sh}\, y + \mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}\, y.$$

7º) Como casos particulares, haciendo $x = y$, resultan las fórmulas de duplicación de argumentos:

$$\mathrm{Sh}\, 2x = 2\mathrm{Sh}\, x\, \mathrm{Ch}\, x,$$
$$\mathrm{Ch}\, 2x = \mathrm{Ch}^2\, x + \mathrm{Sh}^2\, x, \qquad [8]$$
$$\mathrm{Th}\, 2x = \frac{2\mathrm{Th}\, x}{1 + \mathrm{Th}^2\, x}.$$

8º) Sumando y restando de la fórmula [8], que da $\mathrm{Ch}\, 2x$, la relación fundamental [7], $1 = \mathrm{Ch}^2\, x - \mathrm{Sh}^2\, x$, se obtiene

$$\mathrm{Ch}^2\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{Ch}\, 2x + 1),$$
$$\mathrm{Sh}^2\, x = \frac{1}{2}(\mathrm{Ch}\, 2x - 1).$$

EJERCICIOS:

1. a) Si $\text{Sh}\, x = 0{,}75$, calcular $\text{Ch}\, x$, $\text{Th}\, x$;
   b) Si $\text{Ch}\, x = 2{,}6$, calcular $\text{Sh}\, x$, $\text{Th}\, x$;
   c) Si $\text{Th}\, x = 0{,}8$, calcular $\text{Sh}\, x$, $\text{Ch}\, x$.
   R: a) $\text{Ch}\, x = 1{,}25$, $\text{Th}\, x = 0{,}6$;
   b) $\text{Sh}\, x = 2{,}40$, $\text{Th}\, x = 0{,}92$;
   c) $\text{Sh}\, x = 1{,}33$, $\text{Ch}\, x = 1{,}66$.

2. Verificar que la catenaria
$$y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$
se puede escribir $y = a\,\text{Ch}\,\frac{x}{a}$.

3. Verificar la relación
$$\text{Sh}^2 x - \text{Sh}^2 y = \text{Sh}\,(x + y)\,\text{Sh}\,(x - y).$$

4. Simplificar la expresión
$$\frac{\text{Ch}\, 2x + \text{Ch}\, 4y}{\text{Sh}\, 2x + \text{Sh}\, 4y}$$
R: $\text{Cth}\,(x + 2y)$.

5. Resolver gráficamente, en forma aproximada, las siguientes ecuaciones trascendentes, que se presentan con frecuencia en la teoría de la elasticidad:
   a) $\cos x\, \text{Ch}\, x + 1 = 0$. b) $\text{Th}\, x = \text{tg}\, x$.
   R: Hay infinitas soluciones. Las primeras (positivas) son respectivamente: a) 4,73 y b) 3,93.

6. Dibujar la *tractriz* dada en coordenadas paramétricas por las relaciones
$$x = t \quad a\,\text{Th}\,\frac{t}{a}, \qquad y = a\,\text{Sh}\,\frac{t}{a}$$
en el caso $a = 1$.

13. FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS

En la misma forma que hemos definido las inversas de otras funciones (de $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$; de $y = \text{sen}\, x$, $= \text{arc sen}\, x$) definiremos las inversas de las funciones hiperbólicas.

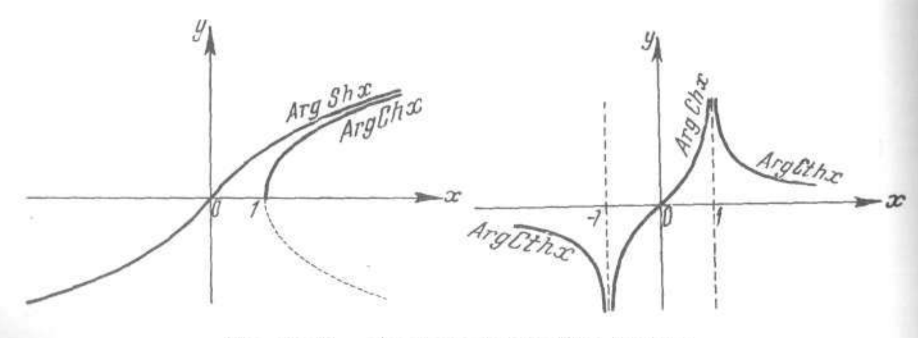


FIG. IV-38. — Funciones hiperbólicas inversas.

e $y = \operatorname{Sh} x$ es $y = \operatorname{Arg} \operatorname{Sh}$
"argumento cuyo seno hiperbólico es ");
$y = \operatorname{Ch} x$ es $y = \operatorname{Arg} \operatorname{Ch}$
$y = \operatorname{Th} x$ es $y = \operatorname{Arg} \operatorname{Th}$
$y = \operatorname{Cth} x$ es $y = \operatorname{Arg} \operatorname{Cth}$

n base a los valores de las tablas, o bien con el procedimiento de tomar los simétricos respecto de la recta $y = x$ de los pun- las curvas hiperbólicas, se obtienen los diagramas de las funcio- perbólicas inversas.

ELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS Y LOS TMOS NEPERIANOS: A partir de las definiciones de las funciones ólicas se pueden deducir las siguientes relaciones, que aplicare- n frecuencia en el cálculo de integrales:

$$\operatorname{Arg} \operatorname{Sh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad [1]$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{Ch} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}), \text{ si } |x| \geqslant 1; \quad [2]$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{Th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \text{ si } |x| \leqslant 1; \quad [3]$$

$$\operatorname{Arg} \operatorname{Cth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}, \text{ si } |x| \geqslant 1. \quad [4]$$

es $y = \operatorname{Arg} \operatorname{Sh} x$, resulta $x = \operatorname{Sh} y = \frac{1}{2} (e^y - e^{-y})$. Multipli- término a término por e^y resulta

$$x\, e^y = \frac{1}{2} (e^{2y} - e^0), \quad \text{o sea,} \quad e^{2y} - 2x\, e^y - 1 = 0,$$

ión en e^y que se puede resolver de acuerdo a la fórmula de la ón de 2º grado:

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

omo $\sqrt{x^2 + 1}$ es mayor que x, debe desecharse el signo $-$ ante- al radical, pues de lo contrario resultaría $e^y < 0$, lo cual no suceder, de acuerdo a lo visto al estudiar la función exponencial. esulta, por lo tanto,

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1},$$

ndo logaritmos neperianos obtenemos [1]

$$y = \operatorname{Arg} \operatorname{Sh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

n el caso del coseno hiperbólico debemos señalar que nos limi- al caso de la rama $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$, para evitar ambigüedades en ión inversa.

De $y = \text{Sh}\, x$ es $y = \text{Arg Sh}$
(se lee "argumento cuyo seno hiperbólico es ");

$y = \text{Ch}\, x$ es $y = \text{Arg Ch}$

$y = \text{Th}\, x$ es $y = \text{Arg Th}$

$y = \text{Cth}\, x$ es $y = \text{Arg Cth}$

En base a los valores de las tablas, o bien con el procedimiento gráfico de tomar los simétricos respecto de la recta $y = x$ de los puntos de las curvas hiperbólicas, se obtienen los diagramas de las funciones hiperbólicas inversas.

Relaciones entre las funciones hiperbólicas inversas y los logaritmos neperianos: A partir de las definiciones de las funciones hiperbólicas se pueden deducir las siguientes relaciones, que aplicaremos con frecuencia en el cálculo de integrales:

$$\text{Arg Sh}\, x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad [1]$$

$$\text{Arg Ch}\, x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}), \text{ si } |x| \geqslant 1; \quad [2]$$

$$\text{Arg Th}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \text{ si } |x| \leqslant 1; \quad [3]$$

$$\text{Arg Cth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}, \text{ si } |x| \geqslant 1. \quad [4]$$

Si es $y = \text{Arg Sh}\, x$, resulta $x = \text{Sh}\, y = \frac{1}{2} (e^y - e^{-y})$. Multiplicando término a término por e^y resulta

$$x\, e^y = \frac{1}{2} (e^{2y} - e^0), \quad \text{o sea,} \quad e^{2y} - 2x\, e^y - 1 = 0,$$

expresión en e^y que se puede resolver de acuerdo a la fórmula de la ecuación de 2º grado:

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Como $\sqrt{x^2 + 1}$ es mayor que x, debe desecharse el signo $-$ antepuesto al radical, pues de lo contrario resultaría $e^y < 0$. lo cual no puede suceder, de acuerdo a lo visto al estudiar la función exponencial.

Resulta, por lo tanto,

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1},$$

y tomando logaritmos neperianos obtenemos [1]

$$y = \text{Arg Sh}\, x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

En el caso del coseno hiperbólico debemos señalar que nos limitamos al caso de la rama $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$, para evitar ambigüedades en la función inversa.

De $y = \text{Arg Ch}\, x$ resulta $x = \text{Ch}\, y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$, y multiplicando ambos miembros por e^y y ordenando se tiene

$$e^{2y} - 2x\, e^y + 1 = 0,$$

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1};$$

tomando logaritmos neperianos es para $|x| \geqslant 1$,

$$y = \text{Arg Ch}\, x = \begin{matrix} \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}), \\ \ln (x - \sqrt{x^2 - 1}). \end{matrix}$$

Como las expresiones entre paréntesis son recíprocas (pues su producto es igual a 1), los logaritmos son valores opuestos.

Considerados estos dos valores del Arg Ch x se obtiene una curva simétrica respecto del eje de las x, de la cual sólo consideramos la rama que da ordenadas positivas y que corresponde a la expresión [2].

Finalmente, de $y = \text{Arg Th}\, x$ resulta $x = \text{Th}\, y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$, y multiplicando por e^y el numerador y denominador del último miembro es $x = \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$, o sea, $e^{2y} = \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

Considerando x comprendido entre -1 y $+1$ es $\dfrac{1 + x}{1 - x}$ positivo, y tomando logaritmos neperianos resulta [3]:

$$y = \text{Arg Th}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}.$$

En forma análoga se deduce [4].

EJERCICIOS:

1. Verificar las relaciones:

   a) $\text{Arg Sh}\, b\dfrac{u}{a} = \ln \dfrac{1}{a}(bu + \sqrt{b^2u^2 + a^2})$;

   b) $\text{Arg Ch}\, b\dfrac{u}{a} = \ln \dfrac{1}{a}(bu + \sqrt{b^2u^2 - a^2})$;

   c) $\text{Arg Th}\, b\dfrac{u}{a} = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{a + bu}{a - bu}$.

2. La función

$$y = \text{arc tg}\, (\text{Sh}\, x),$$

que aparece frecuentemente en matemática, se llama *gudermaniano* de x y se escribe $y = \text{gd}\, x$. Verificar que la función inversa es

$$y = \text{Arg Sh}\, (\text{tg}\, x),$$

o bien,

$$y = \ln (\sec x + \text{tg}\, x).$$

Relaciones entre las funciones circulares e hiperbólicas: Recordemos que la relación fundamental de las funciones circulares es

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1,$$

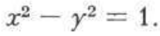
mientras que la de las funciones hiperbólicas es

$$\operatorname{Ch}^2 t - \operatorname{Sh}^2 t = 1.$$

Por otra parte, la ecuación de la circunferencia de radio 1 es

$$x^2 + y^2 = 1,$$

mientras que la ecuación de la hipérbola equilátera de semiejes unitarios es



$$x^2 - y^2 = 1.$$

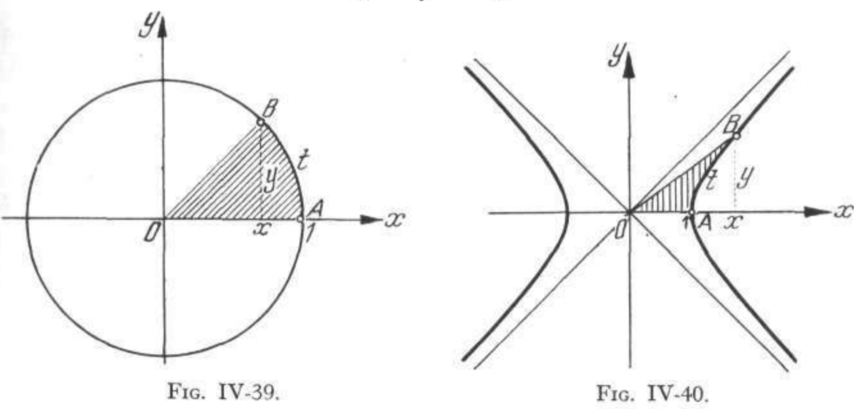


Fig. IV-39. Fig. IV-40.

La ecuación de la circunferencia se puede escribir

$$x = \cos t,$$
$$y = \operatorname{sen} t.$$

La ecuación de la hipérbola se puede escribir

$$x = \operatorname{Ch} t,$$
$$y = \operatorname{Sh} t,$$

pues elevando al cuadrado estas expresiones y sumando (y restando) se tiene la ecuación de la circunferencia (hipérbola).

La pendiente $m = y : x$ de la recta OB es, respectivamente, $\operatorname{tg} t$ y $\operatorname{Th} t$.

La correspondencia no se extiende al arco AB. Mientras en la primer figura la medida de este arco está dada por la medida del ángulo BOA, la medida del arco en la segunda figura es superior a dicho ángulo. Pero así como el área del sector circular AOB es $\frac{1}{2}t$, demostraremos con los recursos del cálculo integral, que también es $\frac{1}{2}t$ el área del sector AOB de la segunda figura.

El doble del área rayada es, respectivamente,

$$t = \text{arc cos}\, x = \text{arc sen}\, y, \qquad t = \text{Arg Ch}\, x = \text{Arg Sh}\, y.$$

Otras relaciones muy importantes entre las funciones circulares e hiperbólicas aparecerán al estudiar las series con números complejos en el Capítulo XV.

AMPLITUD HIPERBÓLICA: La ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ la escribiremos de 2 maneras:

$$\begin{cases} x = \text{Ch}\, t, \\ y = \text{Sh}\, t. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 : \cos\varphi, \\ y = \text{tg}\,\varphi. \end{cases}$$

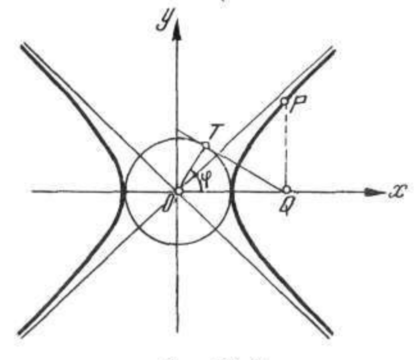


FIG. IV-41.

(En ambos casos, elevando al cuadrado y restando, se obtiene la unidad).

Igualando las expresiones de x y de y obtendremos

$$1 : \cos\varphi = \text{Ch}\, t; \qquad \text{tg}\,\varphi = \text{Sh}\, t.$$

El valor φ se llama *amplitud hiperbólica* de t. Su interpretación geométrica es inmediata. Dado un punto P cualquiera de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$, considérese el punto Q correspondiente sobre el eje de las abscisas; desde allí trácese la tangente en T a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. El $T\hat{O}Q$ es precisamente φ.

El lector podrá demostrar fácilmente que, siendo $OQ = x = 1 : \cos TOQ$ y $PQ = y = \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(1 : \cos T\hat{O}Q)^2 - 1} = \text{tg}\, TOQ$, el ángulo TOQ es el valor φ de la amplitud hiperbólica.

CAPÍTULO V

LÍMITES

1. LIMITE DE UNA FUNCION

Se dice que una función $y = f(x)$ tiende al límite L cuando x tiende al valor a si el valor absoluto de la diferencia $f(x) - L$ puede hacerse tan pequeño como se quiera en las proximidades del punto $x = a$ (sin interesarnos lo que ocurre precisamente en el punto $x = a$).

Así, $y = (x - 1)^3$ tiende a 0 cuando x tiende a 1, pues el valor absoluto de $(x - 1)^3$ puede hacerse tan pequeño como se quiera en las proximidades del punto $x = 1$. En efecto, supongamos que se desee hacer $(x - 1)^3$, en valor absoluto, menor que 1 milésimo. Basta para ello tomar valores de x que disten del punto $x = 1$ en más o menos 1 décima, pues si $(x - 1)$ es en valor absoluto menor que 0,1 será

$$|x - 1|^3 < 0{,}1^3 = 0{,}001.$$

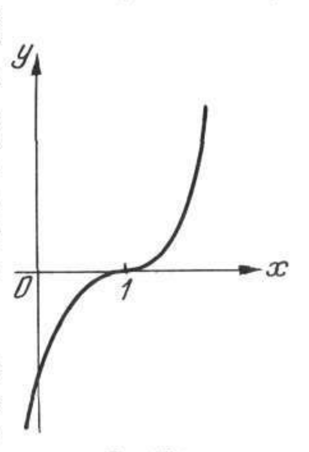


FIG. V-1.

Más general, si se desea que resulte $|x - 1|^3 < \varepsilon$, siendo ε, un número positivo *arbitrariamente pequeño*, habrá que tomar $|x - 1| < \sqrt[3]{\varepsilon}$ o, escribiendo lo mismo de otra manera, deberá verificarse

$$1 - \sqrt[3]{\varepsilon} < x \lesssim 1 + \sqrt[3]{\varepsilon}.$$

Gráficamente, la definición de límite puede interpretarse así:

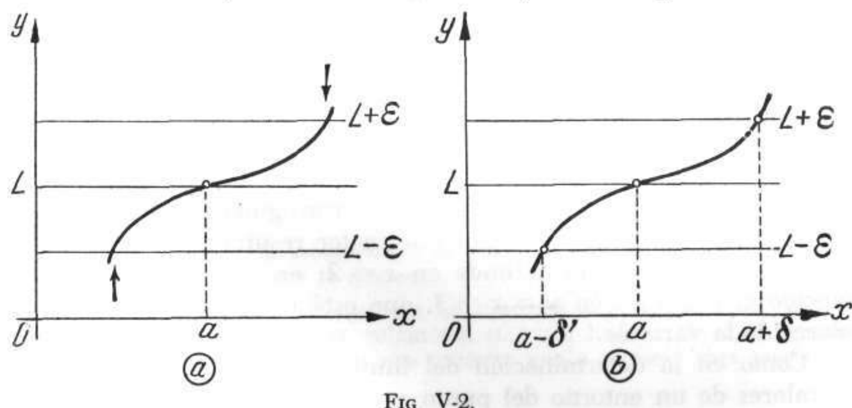


FIG V-2.

Dado un valor ε, se trazan las paralelas $y = L + \varepsilon$; $y = L - \varepsilon$. Quedan determinados los puntos que indican las flechas.

Se trazan entonces las verticales por los puntos así determinados.

Si para cualquier valor x del entorno $(a - \delta;\ a + \delta)$ así determinado, las ordenadas de $f(x)$ están entre las paralelas $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$, se dice que en el punto a el límite de la función $f(x)$ es L (¹).

En el ejemplo que hemos considerado, $y = (x - 1)^3$, la función está definida en el punto 1, hacia el cual tiende la variable x. Pero puede suceder que la función no esté definida en el punto $x = a$. Tal sería el caso de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2},$$

que no está definida en el punto $x = 2$. (Efectivamente, es $f(x) = \frac{4 + 2 - 6}{2 - 2} = \frac{0}{0}$, y este cociente está excluído de las operaciones aritméticas).

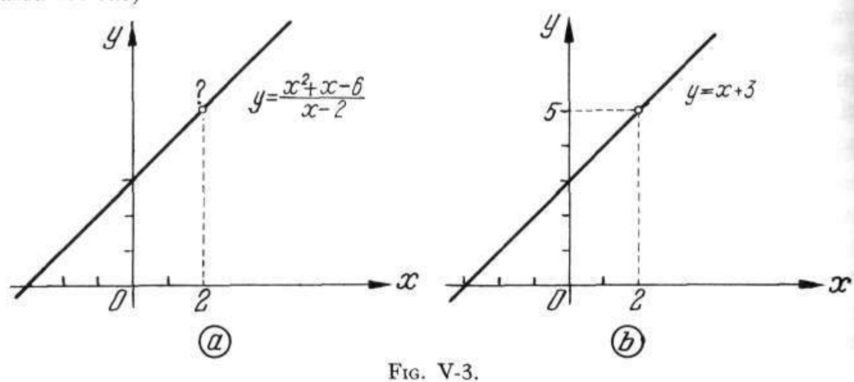


Fig. V-3.

Sin embargo, podremos calcular el límite de esta función cuando $x \to 2$ si observamos que en la definición anterior hemos dicho que *no consideramos lo que ocurre con la función precisamente en el punto* $x = 2$.

Como es

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{(x - 2)\ (x + 3)}{x - 2},$$

para todo $x \neq 2$ es $(x - 2) \neq 0$, y, por consiguiente, dividiendo el numerador y el denominador por este factor resulta $f(x) = (x + 3)$.

La función no está definida en $x = 2$; en los restantes puntos coincide con la función $y = x + 3$, que está definida para todos los valores de la variable.

Como en la determinación del límite para $x \to 2$ consideramos los valores de un entorno del punto $x = 2$, excepto, precisamente, el punto $x = 2$, utilizaremos la función $y = x + 3$, que coincide con

(¹) El entorno del punto a puede no ser simétrico; se adopta entonces como valor δ el menor de los dos semientornos que corresponden a un valor ε.

la función dada para todos los valores de x distintos de 2. Para $x \to 2$, $y \to 5$, pues si deseamos que sea

$$|(x+3)-5| = |x-2| < \varepsilon,$$

bastará tomar un valor x que satisfaga a las desigualdades:

$$2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon.$$

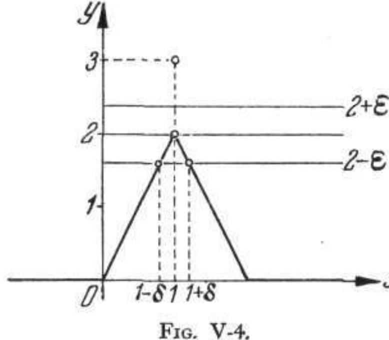


Fig. V-4.

Esta exclusión del punto $x = a$ se pone aun más en evidencia considerando el límite, cuando $x \to 1$, de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0; \\ 2x \text{ si } 0 < x < 1; \\ 3 \text{ si } x = 1; \\ -2x+4 \text{ si } 1 < x < 2; \\ 0 \text{ si } x \geqslant 2; \end{cases}$$

(ya considerada en la pág. 35).

La función está bien definida, pues a cada valor de x corresponde un valor de $f(x)$. En particular, para $x = 1$ es $f(1) = 3$. Pero, ¿cuál es el $\lim_{x\to 1} f(x)$? A poco que observemos veremos que para valores próximos a 1, $f(x)$ toma valores próximos a 2, y si bien en el punto 1 la función dista mucho de 2, esto no interesa. El límite de la función para $x = 1$ es 2.

Gráficamente, si trazamos 2 rectas de ordenadas, $2+\varepsilon$, $2-\varepsilon$, paralelas al eje de las x, podremos determinar 2 puntos que limitan el entorno, $1-\delta$, $1+\delta$, tales que para todo x de este entorno (excepto el punto $x = 1$) los valores de la función están comprendidos entre $2-\varepsilon$ y $2+\varepsilon$.

Observaciones:

I) La circunstancia de excluir en las desigualdades que aparecen en la definición lo que ocurre en el punto $x = a$, hacia el cual tiende la variable, es la que hace fecundo este concepto de límite. Gracias a la exclusión del "punto neurálgico" $x = a$ es posible evitar operaciones ilegales dentro del campo de la aritmética.

II) Hay que destacar la *arbitrariedad* de ε. Cualquiera sea su valor, *siempre* debe poder lograrse que la diferencia $|f(x) - L|$ llegue a ser menor que ε.

III) En el curso del libro veremos que los conceptos fundamentales del análisis (derivadas, integrales, áreas, volúmenes, etc.) son límites. De aquí la necesidad de entender claramente este concepto que a primera vista puede parecer trivial.

Ejercicios:

1. Demostrar que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$.
2. Demostrar que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

3. Demostrar que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \cos x = 0$.

$\left[\text{Puede escribirse } \cos x = \text{sen } \left(\frac{1}{2}\pi - x\right)\right]$.

4. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) = 0$.

5. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$.

[Se puede escribir $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, y el valor absoluto $|x^2 - 9| = |x - 3|\,|x + 3|$ puede hacerse menor que $7\,x - 3$ si x está comprendido entre 2 y 4. A su vez, $7\,|x - 3|$ puede hacerse menor que ε con tal de tomar $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{7}$; el valor de δ es, entonces, $\frac{\varepsilon}{7}$].

6. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

7. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$.

[Si deseamos que la diferencia $|x^3 - 8|$ sea menor que 0,015, es suficiente tomar $1{,}999 < x < 2{,}001$; si queremos hacer $|x^3 - 8| < \varepsilon$, es suficiente tomar $|x - 2| < \varepsilon : 19$, como se ve, escribiendo la identidad $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ y observando que para x del intervalo (1, 3) se verifica $|x^2 + 2x + 4| < |x|^2 + 2|x| + |4| < 19$].

2. INFINITESIMOS

Una función $f(x)$ cuyo límite es 0 cuando $x \to a$ se dice que es *infinitésima* en el punto $x = a$.

Ej.: $\text{sen } x$ es infinitésimo para $x = 0$.

$\cos x$ es infinitésimo para $x = \frac{1}{2}\pi$.

x^3 es infinitésimo para $x = 0$.

$\text{Sh } x$ es infinitésimo para $x = 0$.

$(2x - 1)^2$ es infinitésimo para $x = \frac{1}{2}$.

Observaciones:

I) No hay números infinitésimos, sino funciones infinitésimas en un punto. No se puede decir que un número sea pequeño o grande si no se toma algún punto de referencia. Un milímetro es una longitud pequeña para las mediciones habituales, pero muy grande para la escala atómica.

II) Las funciones no son infinitésimos *en general*, sino en ciertos puntos de x. Así, $\text{sen } x$ es infinitésimo para $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), pero no lo es para ningún otro valor de x.

Operaciones con infinitésimos:

I) *La suma de varios infinitésimos en un mismo punto $x = a$ es otro infinitésimo en el punto a.*

En efecto, si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos para $x = a$, ello sig-

nifica que se puede hacer $|f(x)| < \varepsilon$, $|g(x)| < \varepsilon$, para los valores x suficientemente próximos a a. Entonces es

$$|f(x) + g(x)| < |f(x)| + |g(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

y puesto que ε es tan pequeño como se quiera, queda demostrado que también $f(x) + g(x)$ puede hacerse, en valor absoluto, tan pequeño como se quiera, o, lo que es lo mismo, esta suma también es infinitésima para $x = a$.

II) *El producto de 2 infinitésimos es un infinitésimo.*
Con las notaciones del párrafo anterior resulta

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2,$$

es decir, el producto de las dos funciones, infinitésimos en un punto, puede hacerse, en el entorno de ese punto, tan pequeño como se quiera.

III) *El producto de un infinitésimo por una constante K cualquiera es un infinitésimo.*
Pues

$$|Kf(x)| = |K| \cdot |f(x)| < |K| \varepsilon,$$

y esta última expresión puede hacerse tan pequeña como se quiera en el entorno del punto considerado con tal de tomar ε suficientemente pequeño.

EJERCICIOS:

1. ¿Para qué valores de x la suma de los infinitésimos x^2, x^3 (en $x = 0$), puede hacerse menor que 0,01?
[Es suficiente que $|x^2|$ sea $< 0{,}005$ y $|x^3| < 0{,}005$. La primer desigualdad se satisface para $|x| < 0{,}07$ y la segunda para $|x| < 0{,}1$. Luego, para $|x| < 0{,}07$ la suma $(x^2 + x^3)$ es menor, en valor absoluto, que 0,01].
2. ¿Para qué valores de x es la suma de los infinitésimos x, $\operatorname{sen} x$, x^2 (para $x = 0$) inferior a 0,001?
(Obsérvese que siempre es $|\operatorname{sen} x| < |x|$).
3. ¿Para qué valores del entorno del origen es el producto $x^2 \operatorname{sen} x$ inferior a 0,01?
R: $|x| < 0{,}216$.
4. Si bien la suma de un número *finito* de infinitésimos es otro infinitésimo, no puede decirse lo mismo de un número *infinito* de infinitésimos.
Consideremos la función $\frac{1}{n}$, donde n toma sólo valores naturales. Cuando n toma valores tan grandes como se quiera, o, como se acostumbra a decir, n tiende a infinito, esta función es infinitésima. La suma de n sumandos, $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$, cada uno de los cuales es infinitésimo para $n \to \infty$, no tiende a 0, sino a 1, pues n veces $\frac{1}{n}$ es constantemente igual a 1.

COCIENTE DE INFINITÉSIMOS. ORDENES INFINITESIMALES: A diferencia de lo que sucede con la suma (resta) y producto de infinité-

simos, no podemos asegurar nada en general sobre el cociente de infinitésimos. Basta considerar algunos ejemplos:

1º) El cociente $\frac{x^5}{x^2}$ de los infinitésimos x^5, x^2 para $x = 0$, es igual a x^3, que también es infinitésimo en el origen.

2º) El cociente $\frac{x^2}{x^5}$ es igual a $\frac{1}{x^3}$, expresión que se hace tan grande como se quiera si se toma x suficientemente próximo al origen.

3º) El cociente $\frac{x^2}{2x^2}$ de los infinitésimos x^2 y $2x^2$ en el origen es igual al número fijo $\frac{1}{2}$.

En general, si $f(x)$ y $g(x)$ son 2 infinitésimos y $f(x) : g(x) \to 0$, se dice que $f(x)$ es un *infinitésimo de orden superior* respecto de $g(x)$. Se escribe $f = O(g)$.

Si $f(x) : g(x)$ tiende a un valor constante K, se dice que los infinitésimos son del mismo orden. Se escribe $f \sim Kg$.

Si el cociente $f(x) : g(x)$, como en el segundo ejemplo, puede hacerse tan grande como se quiera, se dice que $f(x)$ es un *infinitésimo de orden inferior* respecto de $g(x)$. Se escribe $g = O(f)$.

Las funciones $x, x^2, x^3, x^4, \ldots,$ son todas infinitésimas en el origen y se acostumbra tomarlas como referencia de comparación con cualquier infinitésimo en el origen.

Si el límite de $f(x) : x^r$ es una constante, se dice que $f(x)$ es un infinitésimo de orden r. En particular, si $f(x) : x^r \to 1$, se dice que $f(x)$ es un infinitésimo *equivalente* a x^r.

Si la función es infinitésima para $x = a$, para conocer su orden infinitesimal r se la compara con $(x - a)^r$.

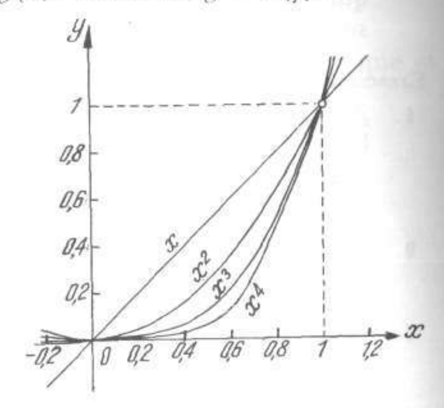


FIG. V-5. — Las funciones $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, ... son infinitésimos en el origen.

3. CALCULO DE LIMITES

Puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ cuando la diferencia $f(x) - L$ tiene límite cero, o sea, cuando la diferencia es un infinitésimo $\varepsilon(x)$, podemos escribir, en un entorno del punto $x = a$,

$$f(x) = L + \varepsilon(x), \text{ con } \varepsilon(x) \to 0 \text{ si } x \to a. \quad [1]$$

Recíprocamente, si una función es igual a un número L más un infinitésimo para $x \to a$, el límite de la función cuando $x \to a$ es L.

En base a la igualdad [1] probaremos los siguientes teoremas:

I) *El límite de una suma algebraica de varias funciones es igual a la suma de los límites.*

Si $f(x) \to L$; $g(x) \to L'$; $h(x) \to L''$ cuando $x \to a$, se tiene $[f(x) - g(x) + h(x)] \to L - L' + L''$ cuando $x \to a$.

En efecto, se puede escribir

$f(x) = L + \varepsilon(x)$; $g(x) = L' + \varepsilon'(x)$; $h(x) = L'' + \varepsilon''(x)$.

Resulta, entonces,

$f(x) - g(x) + h(x) = (L - L' + L'') + (\varepsilon - \varepsilon' + \varepsilon'')$.

Siendo $(\varepsilon - \varepsilon' + \varepsilon'')$ infinitésima (pág. 100), queda demostrada la proposición.

II) *El límite del producto de varias funciones es igual al producto de los límites.*

Con las notaciones anteriores,

$$f(x) \cdot g(x) = LL' + L\varepsilon'(x) + L'\varepsilon(x) + \varepsilon(x)\,\varepsilon'(x).$$

Los tres últimos términos son infinitésimos y, por consiguiente, su suma también de acuerdo a lo ya visto. Luego, si $f(x) \cdot g(x) = LL' +$ *infinitésimo*, es $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = LL'$.

III) *El límite del cociente de 2 funciones* $\frac{f(x)}{g(x)}$, *cuando* $f(x) \to L$ *y* $g(x) \to L' \neq 0$, *es el cociente* $L : L'$ *de sus límites.*

En efecto:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{L'} = \frac{L + \varepsilon(x)}{L' + \varepsilon'(x)} - \frac{L}{L'} = \frac{L'\varepsilon(x) - L\varepsilon'(x)}{L'^2 + L'\varepsilon'(x)},$$

y si $L' \neq 0$, siendo el numerador un infinitésimo resulta

$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{L'} =$ infinitésimo; por consiguiente, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{L'}$.

Un límite importante: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Si en una circunferencia de radio 1 se considera un ángulo central de x radianes, la medida del arco AB que queda determinado sobre la circunferencia es x.

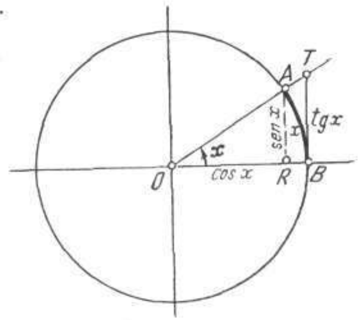


Fig. V-6.

En B se traza la tangente TB, y entre las superficies de los triángulos AOR y TOB y el sector circular AOB valen las relaciones

$$\triangle AOR < \text{sector } AOB < \triangle TOB.$$

Las áreas correspondientes se pueden expresar en función de x, de modo que resulta

$$\frac{1}{2}\cos x \cdot \operatorname{sen} x < \frac{1}{2}x \cdot 1 < \frac{1}{2}1 \cdot \operatorname{tg} x, \qquad [1]$$

y dividiendo por $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ (que es un factor positivo si es x positivo),

$$\cos x < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Esta desigualdad vale también si cambiamos x por $-x$, pues en este caso $(-x) : \operatorname{sen}(-x) = x : \operatorname{sen} x$ y $\cos(-x) = \cos x$.

Si hacemos tender x a 0, $\cos x \to 1$, y, por consiguiente, debe ser

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \text{ y también } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 .$$

Se dice entonces que, en el origen, $\operatorname{sen} x$ es un *infinitésimo equivalente* a x.

El lector demostrará en forma análoga que $\operatorname{tg} x$ es un *infinitésimo equivalente* a x dividiendo los 3 términos de [1] por $\operatorname{tg} x$.

En la tabla de funciones de $\operatorname{sen} x$, para x variando en radianes, se encuentran los siguientes valores:

x (rad)	$= 1$;	0,5 ;	0,1 ;	0,05 ;	0,01 ;	0,001 ;
$\operatorname{sen} x$	$= 0{,}841$;	0,479;	0,0998;	0,4998;	$\sim 0{,}0100$;	$\sim 0{,}0010$;
$\operatorname{sen} x : x$	$= 0{,}841$;	0,958;	0,998 ;	0,9996;	~ 1 ;	~ 1

Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$: La función es par, pues $f(-x) = f(x)$; es suficiente, entonces, considerar sólo valores positivos.

Siendo $\operatorname{sen} x < x$ para los valores positivos de x, es $f(x) < 1$ y sólo $f(x) \to 1$ cuando $x \to 0$.

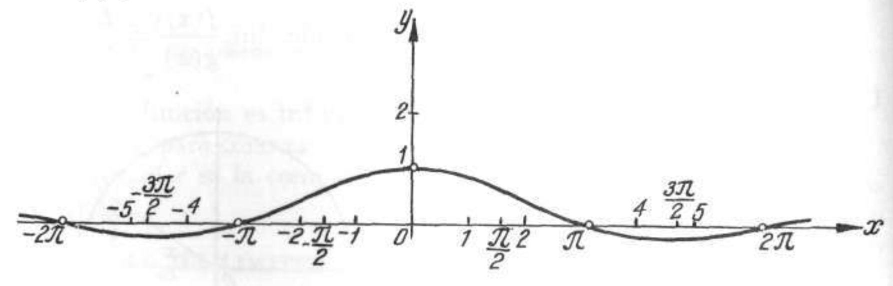


Fig. V-7.

Puesto que es $f(0) = \frac{0}{0}$ y esta expresión no está definida, agregamos a la definición de $f(x)$ la igualdad $f(0) = 1$.

Como los valores de $\operatorname{sen} x$ están siempre comprendidos entre $+1$

y -1, los valores de $f(x)$ están comprendidos entre $y_1 = +\frac{1}{x}$ e $y_2 = -\frac{1}{x}$.

4. "VERDADERO VALOR"

Si una función $f(x)$ tiene una expresión analítica que carece de sentido preciso cuando $x = a$ y en cambio está bien definido el límite L de $f(x)$ cuando $x \to a$, se considera a este límite L como el "verdadero valor" de la función en a.

EJEMPLOS:

1°) La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15}$ toma para $x = 5$ la forma $\dfrac{0}{0}$ expresión que en aritmética carece de significado. En cambio, es

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^3 - 3x^2 - 13x + 15} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+1)}{(x-5)(x^2+2x-3)} =$$
$$= \lim_{x \to 5} \frac{x+1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{16} = v.v.f(5),$$

indicando con *v.v.* el *verdadero valor.*

Siempre que se trate de una expresión racional fraccionaria $P(x) : Q(x)$ se puede calcular el "verdadero valor" para aquellos valores $x = a$ para los cuales resulte $0 : 0$. Pues si $P(x)$ y $Q(x)$ se anulan para $x = a$, se puede escribir $P(x) = (x - a)P_1(x)$, $Q(x) = (x - a)Q_1(x)$, y en lugar del cociente $P(x) : Q(x)$ se considera, para el cálculo del límite, el cociente $P_1(x) : Q_1(x)$. Si este nuevo cociente también es de la forma $0 : 0$, se vuelve a reiterar el procedimiento.

2°) Calcular $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$.

Como el numerador y el denominador se anulan para $x = 2$, resulta, aplicando la regla de Ruffini y simplificando, que este límite es igual a $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6}$.

También en esta expresión el numerador y el denominador se anulan para $x = 2$. Aplicando nuevamente la regla de Ruffini y simplificando se llega a

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-3} = \frac{3}{-1} = -3.$$

EJERCICIOS:

1. Verificar que el verdadero valor de

$$\frac{3x^3 + 6x^2}{2x^4 - 15x^2}$$

en el punto $x = 0$ es $-\frac{2}{5}$.

2. Verificar que el v.v. de

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

para $h = 0$ es $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

(Para calcular el límite correspondiente multiplíquese el numerador y denominador por la expresión $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$, conjugada del numerador).

3. Idem de

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

para $x = 0$ es $\dfrac{1}{2}$.

Verificar los siguientes límites:

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4.$ 5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \dfrac{1}{6}.$ 6. $\lím\limits_{a\to 2} \dfrac{a^4-16}{a^2-4} = 8.$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2+2x}{x} = 2.$ 8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+4x^2}{x^3-2x^2} = -2.$ 9. $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{s^5+9s^2}{s^4-3s^2} = -3.$

10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2-3x-1}{x^2-1} = \dfrac{5}{2}.$ 11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}.$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+x^3+x}{x^2-2x} = -\dfrac{1}{2}.$ 13. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a+c)x+ac} = \dfrac{a-b}{a-c}.$

14. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^2-2t+1}{t^2-3t+2} = 0.$ 15. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2} = -\dfrac{1}{3}.$

[Téngase en cuenta que $x^3-2x^2-x+2 = (x-2)(x^2-1)$].

16. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^3-7x^2+15x-9} = \dfrac{1}{2}.$ 17. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1} = 3.$ 18. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{x^3-b^3}{x-b} = 3b^2.$

19. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x-1} = 5.$ 20. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}.$

21. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = -\dfrac{1}{56}.$ 22. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-\sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax}-a} = 3a.$

[Téngase en cuenta que se puede escribir $x^2 - \sqrt{a^3x} = \sqrt{x}\,(\sqrt{x^3} - \sqrt{a^3}) = \sqrt{x}\,(x + \sqrt{ax} + a)\,(\sqrt{x} - \sqrt{a})$; $\sqrt{ax} - a = \sqrt{a}\,(\sqrt{x} - \sqrt{a})$, puesto que es $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$].

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1.$ 24 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}} = 0.$

25 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} = \dfrac{9}{8}.$ 26 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x} = 0.$

27 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} = 0.$ 28. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = 3a.$

29. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{bx+a}}{\sqrt{cx+d}-\sqrt{dx+c}} = \dfrac{(a-b)\sqrt{c+d}}{(c-d)\sqrt{a+b}}$

30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(b+x)^2-b^2}{x} = 2b.$

31. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2-9}{h} = 6.$

32. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3-8}{h} = 12.$

33. Basándose en la equivalencia de los infinitésimos $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{tg} x$, x para $x=0$, hallar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x}$$

Solución: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{3x} = \dfrac{5}{3}.$

34. Idem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx}.$$

R: $\dfrac{m}{n}.$

Verificar los siguientes límites:

35. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{\cos x}{x-\frac{1}{2}\pi} = -1.$

36. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{t} = 0.$

37. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} px}\right)^n = p^{-n}.$

38. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2t}{3t} = \dfrac{2}{3}.$

39. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{\operatorname{cotg} x}{x-\frac{1}{2}\pi} = -1.$

40. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}\pi x = \dfrac{2}{\pi}.$

(Hágase $1-x=z$ y téngase en cuenta que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{\operatorname{tg} z} = 1$).

41. Demostrar la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(Téngase en cuenta que es $1-\cos x = 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x$).

42. Idem

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x} = 2.$$

43. Verificar

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}} = \sqrt{2}.$$

[Recuérdese que $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$; $1 - \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$, y sustitúyase por los infinitésimos equivalentes].

Verificar los siguientes límites:

44. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{cosec} 4x = \frac{1}{2}$.

45. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}\pi} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

46. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{1}{2}$.

47. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{\cos x + \cos 2x} = -\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

[Ténganse en cuenta las siguientes relaciones: $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{\cos x + \cos 2x} =$

$$= \frac{\operatorname{sen} 3x}{2\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\frac{1}{2}x} = \frac{\operatorname{sen}\frac{3}{2}x}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos\frac{1}{2}x}$$]

48. Hallar el v.v. de

$$\frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h}$$

para $h = 0$.

Solución: $\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)}{\cos(x+h)} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{h} = \dfrac{\operatorname{sen}(x+h)\cos x - \operatorname{sen} x \cos(x+h)}{\cos x \cos(x+h)\cdot h} =$

$= \dfrac{\operatorname{sen}[(x+h) - x]}{\cos x \cos(x+h)h} = \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \dfrac{1}{\cos x \cos(x+h)}$;

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \dfrac{1}{\cos x \cos(x+h)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\cos x \cos(x+h)} = 1 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.

49. Idem de

$$\frac{\operatorname{cotg}(x+h) - \operatorname{cotg} x}{h}$$

para $h = 0$.

R: $-\operatorname{cosec}^2 x$.

5. LIMITES INFINITOS

Hemos insistido varias veces en que la división por cero carece de sentido en aritmética.

¿Qué sucede cuando en la función $f(x) = \frac{1}{x}$ damos a x valores próximos a 0?

A medida que x toma valores positivos cada vez más próximos a 0, $f(x)$ toma valores cada vez mayores. Así resulta

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	10	100	1 000	10 000

Si x toma valores negativos, los correspondientes de $f(x)$ también son negativos.

Si queremos que sea $f(x) > K$ (siendo K un número positivo), bastará tomar $x < \frac{1}{K}$, pues siendo $f(x) = \frac{1}{x}$, es $f\left(\frac{1}{K}\right) = 1 : \frac{1}{K} = K$.

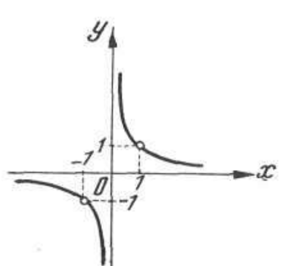


Fig. V-8.

Para valores negativos resulta

$$f(x) < -K \quad \text{si} \quad x > -\frac{1}{K}.$$

Se dice entonces que el límite de $\frac{1}{x}$, cuando x tiende a 0, es infinito, o, en símbolos, que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ (1), entendiendo con ello no que infinito sea un *número*, sino que la función puede tomar, en módulo, valores tan grandes como se quiera.

Definición: Se dice que la función $f(x)$ tiene límite infinito cuando $x \to a$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

si se puede hacer $f(x)$, en valor absoluto, tan grande como se quiera, con tal de tomar x suficientemente próximo a a.

Aquí tampoco interesa el valor de la función en el punto a, donde generalmente no está definida, sino los valores de un entorno del punto a.

Ejemplos:

1º) En el caso de la función $y = \frac{1}{(x-2)^2}$, ¿en qué entorno del punto 2 debe variar x para que sea $y > 1\,000\,000$?, ¿y para que sea $y > K$?

La primera condición se cumple si es $(x-2)^2 < 0{,}000001$, o sea, $|x - 2| < 0{,}001$. Luego, si x está comprendida entre 1,999 y 2,001 (con exclusión del valor $x = 2$, donde la función no está definida), es $y > 10^6$.

(1) El símbolo ∞ lo usó por primera vez el matemático inglés Wallis en 1655.

La segunda condición se cumple si es $|x-2| < 1 : \sqrt{K}$.
Como la función es esencialmente positiva, es $\lim\limits_{x \to 2} y = +\infty$.

2°) Verificar que es $\lim\limits_{x \to 0} \ln |x| = \infty$

Para que sea $\ln |x| < -K$, con K positivo, debe ser $|x| < e^{-K}$.

Gráficamente,

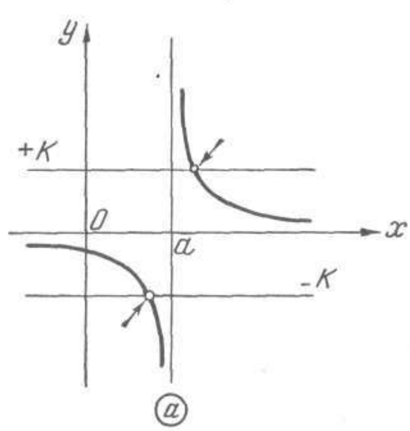


Fig. V-9.

Dado un valor K se trazan las rectas $y = K$; $y = -K$. Quedan determinados los puntos señalados por las flechas.

Por estos puntos se trazan verticales que determinan el entorno del punto a, para cuyos puntos es $f(x) > K$ o $f(x) < -K$.

Ejercicios:

Verificar los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-3}{x} = -\infty$.

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5}{(x-2)^2} = \infty$.

3. $\lim\limits_{t \to 3} \dfrac{2}{t-3} = \infty$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^8 - 2x^4}{4x^7 - x^5} = \infty$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2} - 1} = \infty$.

Variable infinita: Hasta ahora hemos considerado límites (finitos e infinitos) para $x \to a$, donde a es un valor finito.

Veamos ahora el límite de una función $f(x)$ cuando $x \to \infty$. Sea, por ejemplo,

$$f(x) = \frac{2x-5}{x-3};$$

cuando $x \to \infty$, también tienden a ∞ el numerador y el denomina-

dor y sobre el cociente no se podría decir nada. Pero si previamente dividimos ambos términos por x, resulta

$$f(x) = \frac{2x - 5}{x - 3} = \frac{2 - \dfrac{5}{x}}{1 - \dfrac{3}{x}}.$$

Si $x \to \infty$, $\dfrac{5}{x} \to 0$; $\dfrac{3}{x} \to 0$ y resulta $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{2}{1} = 2$.

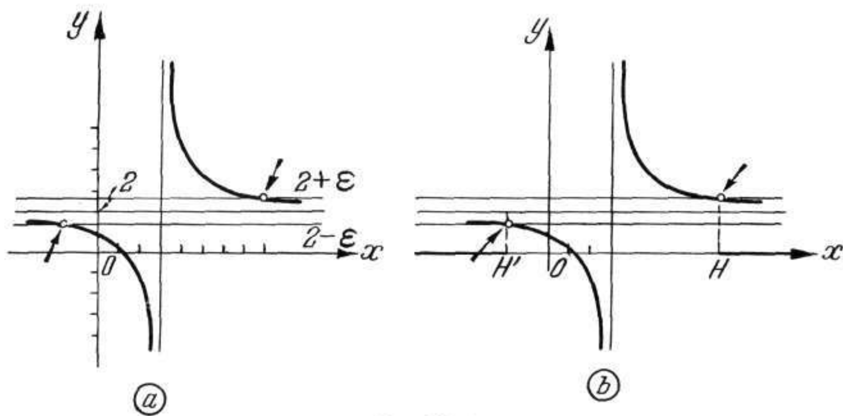


Fig. V-10.

Trazadas las rectas $y = 2 + \varepsilon$, $y = 2 - \varepsilon$, quedan determinados los puntos señalados por las flechas.

A partir de estos puntos se determinan los valores H y H' sobre el eje de las x, de modo que si $x > H$ o $x < H'$, resulta $f(x)$ comprendida entre las dos paralelas.

En símbolos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

si se puede hacer la diferencia $f(x) - L$, en valor absoluto, menor que cualquier número ε arbitrariamente pequeño, con tal de tomar valores de x suficientemente grandes: $x > H$ o $x < H'$ (o también $|x| > H$, llamando H a aquel de los valores H y H' que sea mayor en valor absoluto).

Ejercicios:

Verificar los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + 2}{x^5 + 8x^3 - 1} = 0$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 4x - 8} = \dfrac{1}{2}$.

(En todos los casos divídase por la mayor potencia de x que aparece en el numerador y denominador).

3. Generalizando los resultados de los ejercicios precedentes, demostrar que si se tiene un cociente de dos polinomios

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m},$$

resulta

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & \text{si } n=m.\\ 0 & \text{si } n<m.\\ \infty & \text{si } n>m.\end{cases}$$

Verificar los siguientes límites:

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2+2x}=3.$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+1}=0.$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4}{4x^3+x}=\dfrac{1}{2}\cdot$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^4-b}{ax^4+b}=1.$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x^2+1)\,(5x+3)}{(2x^3-1)\,(x+4)}=0.$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)\,(3x-5)\,(x+1)^2}{x^2\,(2x-3)\,(4x+1)}=\dfrac{3}{4}\cdot$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-1+\sqrt[3]{4x^6+3x-2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}.$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x}{4x+1+\sqrt{16x^2+x+1}}=\dfrac{7}{8}\cdot$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=1.$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=3.$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)=-4.$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{x(x+a)}-x]=\dfrac{1}{2}a.$

(Multiplíquese y divídase por $\sqrt{x(x+a)}+x$).

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=1.$

(Multiplíquese y divídase por el binomio conjugado y se llegará a salvar la indeterminación).

17. $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{(x+a)\,(x+b)}-x]=\dfrac{1}{2}\,(a+b).$

18. Calcular para qué valores de x el cociente $\dfrac{\ln x}{x}$ puede hacerse inferior a 0,001. ¿Y a 0,0001?

Solución: La tabla de valores de los logaritmos naturales indica que el cociente es menor que 0,001 si es $x > 9\,200$ y menor que 0,0001 si es $x > 120\,000$. En general, se puede hacer este cociente tan pequeño como se quiera tomando x suficientemente grande. Por eso es $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

19. Verificar que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1.$$

Solución: Sea L el límite buscado, es decir,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = L;$$

tomando logaritmos neperianos en ambos miembros de la igualdad, resulta

$$\ln L = \ln \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \lim_{x\to\infty} \ln \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Por consiguiente,

$$L = e^0 = 1.$$

20. Demostrar que es $\lim_{x\to\infty} \text{Th}\, x = 1$.

Solución: Podemos escribir, de acuerdo a la definición de Th x (pág. 89):

$$|\text{Th}\, x - 1| = \left|\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1\right| = \left|\frac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right| < \frac{2|e^{-x}|}{2} = e^{-x}.$$

Para que sea e^{-x} menor que un ε arbitrariamente pequeño habrá que considerar $x > -\ln \varepsilon$ (como se puede ver tomando logaritmos neperianos en los dos miembros de la desigualdad $e^{-x} < \varepsilon$).

En particular, si

$\varepsilon = 0{,}1$, debe ser $x > \ln 10 = 2{,}3$;
$\varepsilon = 0{,}01$, debe ser $x > \ln 100 = 4{,}6$;
$\varepsilon = 0{,}001$, debe ser $x > \ln 1\,000 = 6{,}9$.

En realidad, estas sucesivas acotaciones hacen tomar valores de x demasiado grandes; la simple inspección de la tabla de Th x muestra que si

$x > 1{,}5$, Th x difiere de 1 en menos de 0,1 ;
si $x > 2{,}65$, Th x difiere de 1 en menos de 0,01 ,
y si $x > 3{,}80$, Th x difiere de 1 en menos de 0,001, etc.

Verificar los siguientes límites:

21. $\lim_{x\to-\infty} 10^x = 0$.

22. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x = 0$.

23. $\lim_{x\to+\infty} 10^{-x} = 0$.

24. $\lim_{x\to+\infty} b^x = 0$ si $0 < b < 1$.

25. $\lim_{x\to\infty} x \,\text{sen}\, \frac{1}{x} = 1$.
(Hágase $\frac{1}{x} = t$).

26. $\lim_{y\to\infty} 2y \cdot \text{tg}\, \frac{\pi}{y} = 2\pi$.

27. $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

Completando las definiciones anteriores decimos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

si el valor absoluto de $f(x)$ puede hacerse mayor que cualquier nú-

mero K por grande que sea con tal de tomar x mayor, en valor absoluto, que un cierto número H que depende de K.

Gráficamente

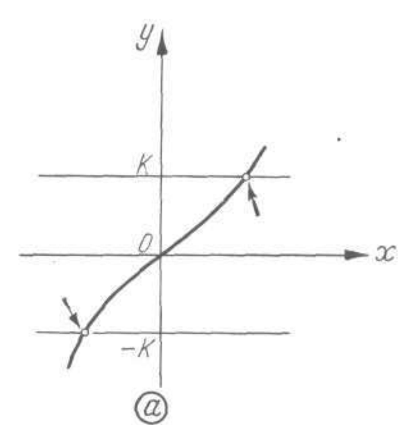


Fig. V-11.

Trazadas las rectas

$y = K, \quad y = -K,$

quedan determinados los puntos que señalan las flechas.

Las abscisas de esos puntos son los valores H y H' tales que si $x > H$ o $x < H'$, resulta $f(x) > K$ o $f(x) < -K$.

Ejemplos:

Demostraremos que $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$.

En efecto, $x^2 > K$ si $x > +\sqrt{K}$ o $x < -\sqrt{K}$.

Análogamente, es $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{Sh} x = \infty$.

Siendo $\operatorname{Sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, resulta, para $x > 0$, $\operatorname{Sh} x > \frac{1}{2}(e^x - 1)$, y esta expresión es mayor que K si es $x > \ln(2K + 1)$. Para $x < 0$ se obtiene un valor análogo por simetría para que sea $\operatorname{Sh} x < -K$.

Ejercicios:

Verificar los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 2x - 1}{4x^2 + 10} = \infty$.

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \infty$

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x - 3)^2 (4x + 7)^3}{(3x - 4)^2 (5x^2 + 1)} = \infty$.

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \infty$

(Compárese con el ejercicio 12 de la pág. 112).

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} 10^x = +\infty$.

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{\frac{x}{100}} = +\infty$.

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = +\infty$.

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ si $a > 1$.

9. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2+3^x}{3+2^x} = +\infty.$ 10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{7+5^x}{3+5^x} = 1.$

6. CONTINUIDAD DE UNA FUNCION

En la definición de $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se consideraban los valores x de un entorno del punto a, con excepción del punto $x = a$, donde la función podía o no estar definida y podía o no coincidir con el valor $f(a)$ de la función.

Si se verifican las tres condiciones:

I) Existe $\lim_{x\to a} f(x)$;

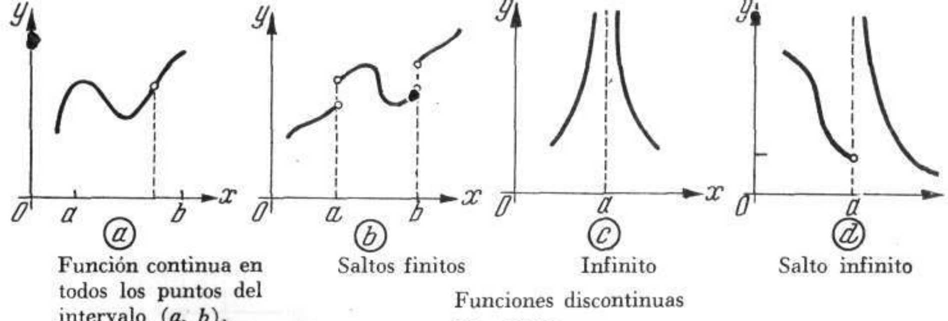
II) está definido $f(a)$, y

III) vale la igualdad $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a)$,

se dice que la función $f(x)$ es *continua* en el punto $x = a$.

Por esto se suele decir que cuando la función es continua *el límite de la función es igual a la función del límite.*

Cuando no se verifica alguna de las 3 condiciones se dice que la función es *discontinua.*



Función continua en todos los puntos del intervalo (a, b). Saltos finitos Infinito Salto infinito

Funciones discontinuas

Fig. V-12.

Cuando se verifican I y II, pero no III, se tiene el caso de *discontinuidad evitable.* Basta "corregir" la definición de la función en el punto a para transformar la función de discontinua en continua.

Si se cumple I y no II, se tiene el caso de "verdadero valor" que ya hemos tratado.

Ejercicios:

Indicar, en las siguientes funciones, los puntos donde la función es discontinua:

1. $y = -\frac{4}{x}$. 2. $y = -\frac{2}{x^2}$. 3. $y = \frac{2-x}{x-3}$. 4. $y = \frac{4}{x^2-4}$.

5. $y = \frac{x}{x^2+1}$. 6. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. 7. $y = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$.

8. $y = \dfrac{7}{(\sqrt{2}\cos x + 1)^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$. 9. $y = \dfrac{b}{a\cos x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

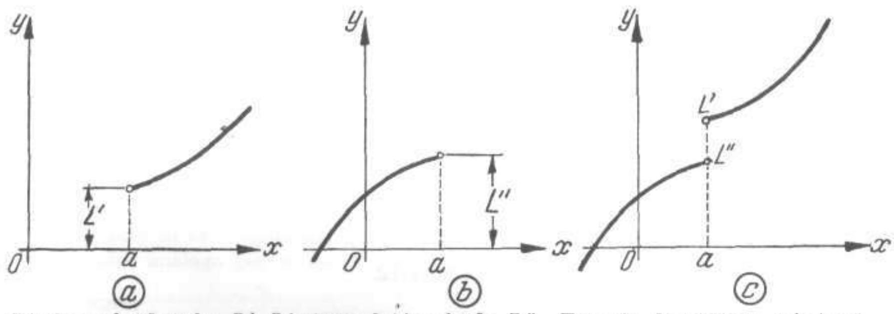
10. $y = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ 11. $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x}$.

12. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 5x + 2}$. 13. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4x - 5}$. 14. $y = \dfrac{x - 1}{(2x - 1)^2}$.

15. $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + x + 1}$. 16. $y = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{1}{x}$.

R: 1. $x = 0$; 2. $x = 0$; 3. $x = 3$; 4. $x = 2$, $x = -2$; 5. No tiene; 6. $x = 1$, $x = -1$; 7. $x = 2$, $x = 3$; 8. $x = \frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$; 9. $x = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$; 10. $x = \frac{1}{2}\pi$; 11. $x = 0$, $x = 1$; 12. $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$; 13. $x = -1$, $x = 5$; 14. $x = \frac{1}{2}$; 15. No tiene; 16. $x = 0$.

Tipos de discontinuidades: Una función $f(x)$ puede tener límite cuando x tiende a a tomando x sólo valores superiores a a. En ese caso se dice que la función $f(x)$ tiene *límite a la derecha* y se escribe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L'$.



Límite a la derecha L'. Límite a la izquierda L''. Función discontinua $L' \neq L''$.

Fig. V-13.

Análogamente, cuando x tiende a a tomando sólo valores inferiores a a se dice que $f(x)$ tiende a un valor L'' que se llama el *límite a la izquierda* de $f(x)$ y se escribe $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L''$.

Si es $L' = L'' = L$, evidentemente es $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$; pero si es $L' \neq L''$, la función es discontinua.

El valor $L' - L''$ se llama *salto* de la función.

EJEMPLO:

Recordemos la función signo de x, que escribimos $sgn\, x$ y que vale 1 si x es positivo, -1 si x es negativo y 0 si es $x = 0$. Evidentemente, es $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$. El *salto* es igual a 2. El valor para $x = 0$ es el promedio de los valores L' y L''; en general, se define así: $f(a) = = \frac{1}{2}(L' + L'')$.

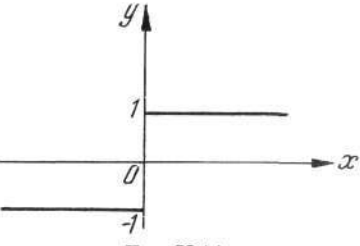


FIG. V-14.

Los límites a la derecha y a la izquierda (*límites laterales*) pueden también ser infinitos. En este caso la discontinuidad es infinita.

EJERCICIOS:

1. Verificar que la función $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ tiene límites laterales en el origen que valen $+\frac{1}{2}\pi$ y $-\frac{1}{2}\pi$. Hacer la representación gráfica.

2. Verificar que la función

$$f(x) = \frac{1 - 10^{\frac{1}{x}}}{1 + 10^{\frac{1}{x}}}$$

tiene un salto igual a 2 en el origen.

3. Verificar que es $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

4. Verificar que es $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

OPERACIONES CON FUNCIONES CONTINUAS: La suma y el producto de un número finito de funciones continuas son continuos.

Sean $f(x)$, $g(x)$, dos funciones continuas en el punto $x = a$, es decir, sea

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

De acuerdo a lo visto en el cálculo de límites será, para $x \to a$:

$$\lim\,[f(x) + g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) = f(a) + g(a);$$
$$\lim\,[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = f(a) \cdot g(a).$$

Como caso particular resulta que, siendo $f(x) = x$ una función continua, también lo son x^2, x^3, $\ldots$, x^n y cualquier combinación lineal de las mismas: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$. Por consiguiente, *un polinomio es una función continua.*

Obsérvese cuán fundamental es la restricción de que se trate de un número *finito* de funciones continuas. Así, la expresión $1 + x +$

$+ x^2 + \ldots + x^n + \ldots$, con infinitos términos, cada uno de los cuales es continuo en $x = 1$, no es continua para $x = 1$.

También el cociente de funciones continuas en un punto $x = a$ es una función continua si el denominador no se anula en el punto $x = a$.

Las expresiones racionales fraccionarias $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ son continuas, excepto eventualmente en aquellos puntos $x = a$ en los cuales se anula $Q(x)$.

7. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Ya hemos demostrado la continuidad de un polinomio $P(x)$ para cualquier valor de x.

Veamos ahora la continuidad de algunas funciones trascendentes.

1°) La función $\operatorname{sen} x$ es continua para todo valor de x, es decir, .

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a.$$

En efecto, siendo $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x-a) \cos \frac{1}{2}(x+a)$, y recordando que el seno de un arco es menor que el arco y el coseno es menor o igual que 1, resulta

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| < 2 \cdot \frac{1}{2}|x-a| = |x-a|.$$

Tomando x suficientemente próximo a a se puede hacer que la diferencia $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a|$ sea tan pequeña como se quiera.

Análogamente, se demuestra:

2°) La función $\cos x$ es continua para todo valor de x.

3°) La función $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es continua para todo valor de $x \neq \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi$, pues se trata de un cociente de funciones continuas donde hay que excluir los valores de x que anulen el denominador.

4°) La función e^x es continua para todo valor finito de x. Supongamos que queremos demostrar que es $\lim\limits_{x\to 2} e^x = e^2$. Si suponemos $x > 2$, será $x = 2 + \delta$, y la diferencia $e^x - e^2$, que puede escribirse $e^2(e^\delta - 1)$, puede hacerse $< \varepsilon$ si se toma $\delta < \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{e^2}\right)$

Análogamente, si es $x < 2$, o sea, $x = 2 - \delta$, resulta que con

$\delta < -\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{e^2}\right)$ se obtiene que la función difiera de e^2 en menos de ε.

En la misma forma se hace la demostración para cualquier valor $x = a$ y también para cualquier exponencial de base positiva.

5º) La función logarítmica $y = \ln x$ es la inversa de la función exponencial, como ya hemos dicho. Siendo ésta una función creciente, también debe serlo la inversa. Además, de acuerdo a la definición de continuidad, ambas funciones deben ser continuas. (Obsérvese la representación gráfica de la pág. 64 y aplíquese la definición de continuidad).

En general, *toda función creciente (o decreciente) que tiene una función inversa en un intervalo (a, b) es continua en ese intervalo, así como la función inversa lo es en el intervalo* $[f(a), f(b)]$.

TEOREMAS GENERALES SOBRE LA CONTINUIDAD: Enunciaremos algunos teoremas fundamentales sobre continuidad:

I) Toda función continua de una función continua es una función continua. Así, por la continuidad de la función exponencial y de la función sinusoidal resulta que $e^{\operatorname{sen} x}$ es una función continua.

II) Toda función continua en un intervalo *cerrado* $[a, b]$ es acotada en ese intervalo.
Obsérvese bien cuán importante es la exigencia de que el intervalo sea cerrado, esto es, que los extremos a y b formen parte del intervalo. La función $\frac{1}{x}$, que es continua en el intervalo *abierto* $(0, 1)$, no está acotada en él. (Constrúyase la gráfica).

III) Toda función continua en un intervalo *cerrado* $[a, b]$ toma un valor menor que todos los otros (mínimo) y uno mayor que todos los otros (máximo). Este es el enunciado de un célebre teorema de WEIERSTRASS.

IV) Si en un intervalo cerrado $[a, b]$ resultan $f(a)$ y $f(b)$ de signo opuesto, hay un valor c interior al intervalo en el cual se anula la función: $f(c) = 0$.
Este teorema de BOLZANO constituye el fundamento teórico de los métodos de resolución aproximada de ecuaciones.
Más general aún:

V) Una función continua no puede pasar de un valor $f(x_1)$ distinto $f(x_2)$ sin pasar por todos los valores intermedios.

$\delta < -\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{e^2}\right)$ se obtiene que la función difiera de e^2 en menos de ε.

En la misma forma se hace la demostración para cualquier valor $x = a$ y también para cualquier exponencial de base positiva.

5º) La función logarítmica $y = \ln x$ es la inversa de la función exponencial, como ya hemos dicho. Siendo ésta una función creciente, también debe serlo la inversa. Además, de acuerdo a la definición de continuidad, ambas funciones deben ser continuas. (Obsérvese la representación gráfica de la pág. 64 y aplíquese la definición de continuidad).

En general, *toda función creciente (o decreciente) que tiene una función inversa en un intervalo (a, b) es continua en ese intervalo, así como la función inversa lo es en el intervalo* $[f(a), f(b)]$.

TEOREMAS GENERALES SOBRE LA CONTINUIDAD: Enunciaremos algunos teoremas fundamentales sobre continuidad:

I) Toda función continua de una función continua es una función continua. Así, por la continuidad de la función exponencial y de la función sinusoidal resulta que $e^{\operatorname{sen} x}$ es una función continua.

II) Toda función continua en un intervalo *cerrado* $[a, b]$ es acotada en ese intervalo.
Obsérvese bien cuán importante es la exigencia de que el intervalo sea cerrado, esto es, que los extremos a y b formen parte del intervalo. La función $\frac{1}{x}$, que es continua en el intervalo *abierto* $(0, 1)$, no está acotada en él. (Constrúyase la gráfica).

III) Toda función continua en un intervalo *cerrado* $[a, b]$ toma un valor menor que todos los otros (mínimo) y uno mayor que todos los otros (máximo). Este es el enunciado de un célebre teorema de WEIERSTRASS.

IV) Si en un intervalo cerrado $[a, b]$ resultan $f(a)$ y $f(b)$ de signo opuesto, hay un valor c interior al intervalo en el cual se anula la función: $f(c) = 0$.
Este teorema de BOLZANO constituye el fundamento teórico de los métodos de resolución aproximada de ecuaciones.
Más general aún:

V) Una función continua no puede pasar de un valor $f(x_1)$ distinto $f(x_2)$ sin pasar por todos los valores intermedios.

UNA FUNCIÓN SIN LÍMITE: Si bien todas las funciones que estudiaremos y que interesan en las aplicaciones prácticas tienen límite, es útil considerar algún ejemplo de función que en uno o varios de sus puntos carezca de él, a fin de destacar mejor cuáles son las condiciones que deben cumplirse para la existencia de un límite.

Sea $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ para todos los valores de $x \neq 0$; se trata de determinar el $\lim f(x)$ cuando $x \to 0$.

Tratemos de hacer el diagrama de esta función. Por lo pronto, por tratarse de un seno, los valores de $f(x)$ están todos comprendidos entre $+1$ y -1.

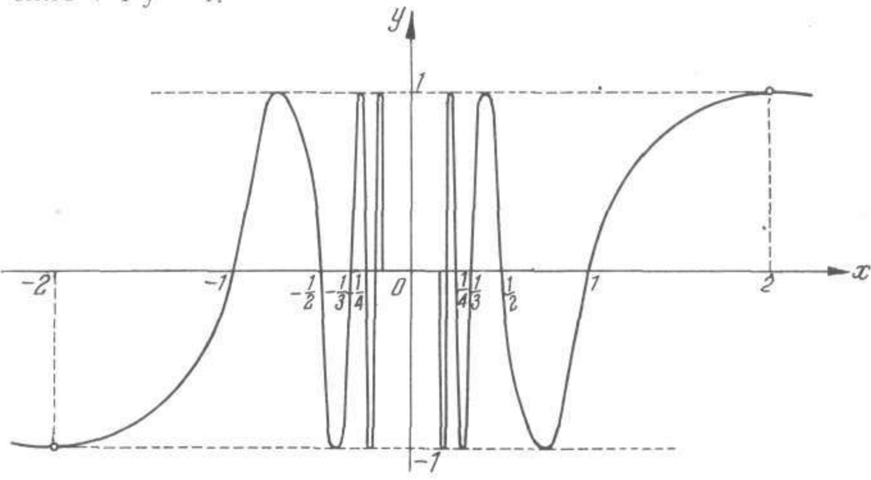


FIG. V-15.

Para $\frac{\pi}{x} = n\pi$, es decir, para $x = \frac{1}{n}$, la función se anula; esto es, en los puntos $x = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$, es $f(x) = 0$.

Para $\frac{\pi}{x} = \frac{1}{2}(4n + 1)\pi$, es decir, para $x = 2 : (4n + 1)$, la función alcanza el valor 1. Por consiguiente, si $x = 2; \frac{2}{5}; \frac{2}{9}; \frac{2}{13}; \ldots$, es $f(x) = 1$.

Análogamente, para $x = \frac{2}{3}; \frac{2}{7}; \frac{2}{11}; \ldots; \frac{2}{4n + 3}; \ldots$, es $f(x) = -1$.

Con estos valores fundamentales ya se puede trazar el diagrama. Además, la función es impar $f(-x) = -f(x)$.

¿Qué sucederá en el entorno del punto $x = 0$? Evidentemente, habrá infinitas ondas y los valores de la función no tienden a ningún valor cuando $x \to 0$.

Gráficamente, no es posible *encerrar* la función en el entorno de $x = 0$, entre 2 rectas $y = L + \varepsilon$, $y = L - \varepsilon$, para ningún valor de L.

Esta función es discontinua en el punto $x = 0$, y esta discontinuidad no es evitable, es *esencial*.

EJERCICIOS:

1. En la función recién definida, ¿para qué valores de x resulta $f(x) = \frac{1}{2}$?, ¿y $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

   R: Para los infinitos valores $x = 6 : (1 + 12k)$; $x = 6 : (5 + 12k)$; $x = 3 : (1 + 6k)$; $x = 3 : (2 + 6k)$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Dibujar la función $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$. ¿Tiene esta función límite cuando $x \to 0$?

   R: Sí, el límite existe y es 0. [Basta ver que $|f(x)| < |x|$].
   [Compárese el dibujo obtenido con la figura 4 del Capítulo XII].

3. Dibujar la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$. Calcúlese su límite cuando $x \to 0$.

   R: 0.

   [Obsérvese para hacer el diagrama que $f(x)$ está comprendida entre las parábolas $y_1 = + x^2$; $y_2 = - x^2$].

8. LIMITE DE SUCESIONES

DEFINICIÓN: Dar una *sucesión* $\{a_n\}$ es dar una ley que permita asignar un valor determinado a_n para cada valor natural del índice n.

EJEMPLOS:

1°) Si $a_n = \frac{1}{n}$, es $\{a_n\} = 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ \ldots$

2°) Si $a_n = \frac{n-1}{n}$, es $\{a_n\} = 0;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \ldots;\ 1 - \frac{1}{n};\ \ldots$

3°) Si $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, es $\{a_n\} = 2;\ 2{,}25;\ 2{,}37;\ 2{,}44 \ldots$

4°) Si $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, con $a_1 = 0$; $a_2 = 1$, resulta la sucesión de Fibonacci: $a_n = 0;\ 1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ \ldots$

5°) En espectroscopía aparece la sucesión de Balmer:

$$a_n = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \text{ para } n = 3,\ 4,\ \ldots,$$

siendo $R = 3{,}290 \times 10^{15}\ \text{seg}^{-1}$ la constante de Rydberg.

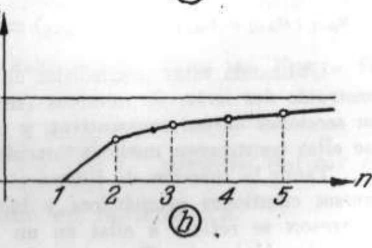
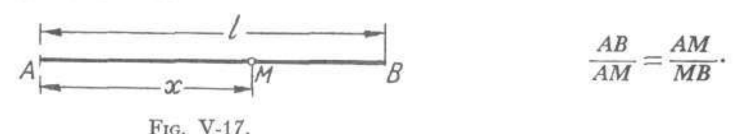


FIG. V-16.
Dos representaciones gráficas de la sucesión $a_n = (n-1) : n$.

Las sucesiones son funciones $a_n = f(n)$ donde la variable independiente toma sólo valores naturales. Se puede representar sea sobre una recta (fig. 16 *a*) o en un gráfico cartesiano (fig. 16 *b*).

En este último caso conviene unir con segmentos rectilíneos los puntos (n, a_n) representativos de los valores de la sucesión.

Sucesión de Fibonacci y secciones áureas: Dado un segmento AB de longitud l se dice que un punto M lo divide en *media y extrema razón* si se verifica la relación



$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}.$$

Fig. V-17.

Al segmento AM de longitud x se lo denomina *sección áurea* del segmento dado. En base a la relación anterior es $x^2 = l\,(l - x)$, y resuelta esta ecuación de 2º grado se obtiene

$$x_1 = \tfrac{1}{2}l\,(\sqrt{5} - 1), \qquad x_2 = -\tfrac{1}{2}l\,(\sqrt{5} + 1).$$

El valor x_1 determina un punto interior al segmento AB y el valor x_2 un punto exterior. Los valores

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \phi', \qquad \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = \phi,$$

son recíprocos entre sí como se ve efectuando su producto. Además es $\phi' + 1 = \phi$.

Si ahora se parte de 2 segmentos a y b, de modo que la longitud del primero sea la sección áurea del segundo, y se construye la correspondiente sucesión de Fibonacci (ver pág. 15)

$$a;\ b;\ a + b;\ a + 2b;\ 2a + 3b;\ \ldots,$$

se verifica que cada término es la sección áurea del siguiente.

Así, si

$$a : b = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{es} \quad b : (a + b) = 1 : \left(\frac{a}{b} + 1\right) = 1 : \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1),$$

y racionalizando esta expresión resulta

$$b : (a + b) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

En general, como es $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ y se verifica $a_n : a_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, resulta

$$a_{n+1} : a_{n+2} = a_{n+1} : (a_n + a_{n+1}) = 1 : \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} + 1\right) = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Utilizando estas propiedades de la sucesión de Fibonacci, Le Corbusier ha construido dos series de números (serie roja y serie azul), que *aproximadamente* son secciones áureas consecutivas, y con consideraciones harto discutibles pretende que ellas constituyen medidas "nacidas de las dimensiones humanas".

Tanto la sucesión de Fibonacci como la sección áurea aparecen en las más diversas cuestiones geométricas y biológicas. El investigador inglés D'Arcy W. Thompson se refiere a ellas en un libro extraordinario *On Growth and Form*, Cambridge University Press (2ª edición, 1942).

Verifíquese que la expresión del término general de la sucesión de Fibonacci que empieza con los números 0, 1

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN: Se dice que el límite de una sucesión a_n tiende a un valor A cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

si la diferencia $A - a_n$ puede hacerse, en valor absoluto, tan pequeña como se quiere.

Así resulta $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, pues $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$ puede hacerse menor que un valor arbitrario ε sin más que tomar $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Análogamente, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = 1$, pues $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n}$ puede hacerse arbitrariamente pequeño.

Si los valores que puede tomar la sucesión son mayores que cualquier número, en valor absoluto, se dice que la sucesión tiende a infinito:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \to \infty.$$

Más precisamente, la sucesión anterior tiende a $+\infty$, mientras que la sucesión

$$-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots, \text{ tiende a } -\infty.$$

Una sucesión está *acotada* si todos sus términos son menores, en valor absoluto, que un número fijo o cota C.

Si una sucesión está acotada, sus puntos representativos están dentro del segmento $(-C; +C)$.

Una sucesión es *monótona creciente* cuando $a_n \leqslant a_{n+1}$ y *monótona decreciente* cuando $a_n \geqslant a_{n+1}$.

Admitiremos, sin demostración, el siguiente *principio fundamental:*

I) Toda sucesión acotada monótona creciente tiene un límite finito inferior o igual a la cota.

II) Toda sucesión acotada monótona decreciente tiene un límite finito superior o igual a la cota.

EL NÚMERO e: La sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ permite definir el número e, de importancia principalísima en matemática.

Demostraremos:

1º Que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente.

2º Que esta sucesión está acotada.

En efecto, aplicando la fórmula del binomio de Newton resulta

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} +$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

y puesto que todos los paréntesis son positivos, resulta $\{a_n\}$ monótona creciente. Además, como los paréntesis de la expresión anterior son todos inferiores a 1, se tiene

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} +$$

$$+ \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

pues $n! > 2^{n-1}$ para $n > 2$. La última expresión, a partir del segundo término. es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$. Por ello resulta

$$a_n < 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Por grande que sea n esta expresión es siempre menor que 3, con lo cual queda demostrada la acotación.

Aplicando el *principio fundamental*, que afirma que toda sucesión monótonamente creciente y acotada tiene un límite finito (*), resultará que $\{a_n\}$ tiene un límite 2.7182... que se designa universalmente con la letra e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

GENERALIZACIÓN:

Si en lugar de la sucesión a_n consideramos la función

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

siendo x un número *real* cualquiera, demostraremos que también es e su límite cuando $x \to \infty$.

(*) Véanse los "Complementos teóricos" que integran esta edición.

Limitémonos al caso en que x toma sólo valores *positivos* y tiende, por consiguiente, a $+\infty$.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ una sucesión de valores reales que tiende a $+\infty$. Cada uno de estos valores está comprendido entre 2 números naturales consecutivos: $m < x_n < m + 1$, y, por consiguiente, es: $\frac{1}{m} > \frac{1}{x_n} > \frac{1}{m+1}$

Sumando 1 a los tres términos y elevando a la potencia indicada, resulta

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m},$$

que se puede escribir

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\left(1 + \frac{1}{m}\right) > \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} : \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)$$

Puesto que con n también tienden a ∞, m y x_n, resulta, de acuerdo a la definición de e,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} = e,$$

y como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m+1}\right) = 1$$

se tendrá

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Si hacemos el cambio de notación

$$\frac{1}{x} = t,$$

se tendrá, para $x \to \infty$, que $t \to 0$, y la definición de e se podrá escribir

$$e = \lim_{t\to 0}(1 + t)^{\frac{1}{t}}.$$

EJERCICIOS:

1. Demuéstrese que $\lim_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e.$

   (Obsérvese que debe ser $x < -1$ y considérese una sucesión de números enteros y negativos).

Verificar los siguientes límites:

2. $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1}.$

3. $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = e^{3}$

4. $\lim_{h\to 0}(1 + h)^{\frac{5}{h}} = e^{5}.$

5. $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n} = e^{4}.$

6. $\lim_{x\to 0}(1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^{2}.$

7. $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n} = e^{6}.$

8. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{x}} = e^{-6}$.

9. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

10. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + mx)^{\frac{n}{x}} = e^{mn}$.

11. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{iy}{n}\right)^n = e^{iy}$.

12. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$.

13. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \infty$.

14. Verificar

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e.$$

Verificar los límites:

15. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^x = e^2$.

16. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n = e^{-2}$.

9. ASINTOTAS DE CURVAS PLANAS

En las funciones homográficas $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ hemos visto que, cuando $x \to -\frac{a}{c}$ (valor obtenido resolviendo la ecuación $cx + d = 0$), $y \to \infty$.

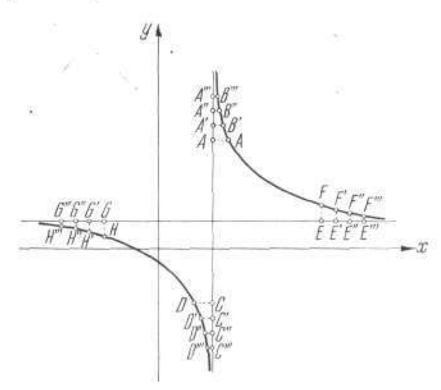


FIG. V-18. — Función homográfica.

Si trazamos la recta $x = -\frac{d}{c}$ (que es una paralela al eje de las y), se ve en la figura que las distancias AB, $A'B'$, ..., CD, $C'D'$, ..., de puntos de la curva a la recta son cada vez menores.

Se dice que la recta $x = -\frac{d}{c}$ es una *asíntota vertical*.

Por otra parte, dividiendo el numerador y el denominador de la función homográfica por x resulta $y = \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}}$. Cuando $x \to \infty$, $y \to \frac{a}{c}$.

La recta $y = \frac{a}{c}$ es una *asíntota horizontal*, pues las distancias EF, $E'F'$, ..., GH, $G'H'$, ... (en la figura), de los puntos de la curva

a la recta horizontal $y = \frac{a}{c}$ son cada vez menores a medida que las abscisas tienden a $+\infty$ o $-\infty$.

En ciertas curvas hay otras rectas que tienen la propiedad de que sus puntos disten de la curva un valor que tiende a 0 cuando la abscisa crece infinitamente.

Tal es el caso para $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$. Hay una *asíntota vertical* $x = 1$.

En cambio, si $x \to \infty$, $y \to \infty$ y, por consiguiente, no hay asíntota horizontal. Pero si se efectúa la división

$$\frac{x^2 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x - 1},$$

se ve que entre las ordenadas de la curva dada y las ordenadas de la recta

$$y = x + 1$$

existe una diferencia $\frac{2}{x - 1}$ que tiende a 0 cuando $x \to \infty$. Se dice que la recta $y = x + 1$ es una *asíntota* de la curva.

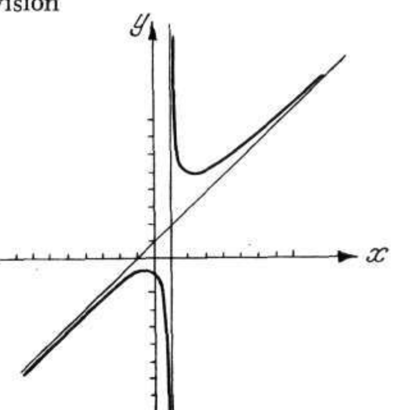


FIG. V-19. — Gráfico de la hipérbola $y = (x^2 + 1) : (x - 1)$.

En general, se dice que una recta $mx + b$ es una *asíntota* de la curva $y = f(x)$ si la diferencia $f(x) - (mx + b)$ tiende a cero cuando $x \to \infty$.

Para hallar el valor de m basta dividir la función $f(x)$ por x y calcular el límite del cociente para $x \to \infty$, pues de

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - (mx + b)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] = 0$$

resulta $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, dado que $\frac{b}{x} \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Calculado así el valor de m se calcula el valor de b en virtud de la relación $\lim_{x \to \infty} [f(x) - mx - b] = 0$.

EJEMPLO:

Calcular la asíntota de la curva $y = \frac{x^3}{4 + x^2}$.

Como es $\frac{y}{x} = \frac{x^2}{4 + x^2}$ y $\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = 1$, resulta $m = 1$. La asíntota será $y = x + b$

y la diferencia de ordenadas $\frac{x^3}{4+x^2} - (x+b) = -\frac{4x}{4+x^2} - b$ tiende a 0 cuando $x \to \infty$ si $b = 0$. La asíntota es, por consiguiente, la recta $y = x$.

EJERCICIOS:

1. Verificar que la única asíntota de la curva $y = \frac{x^3 - 1}{3x^2 + 1}$ es la recta $y = \frac{1}{3}x$.

2. Verificar que las asíntotas de la curva $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$ son las rectas $x = 0$; $y = x - 3$.

3. Verificar que las asíntotas de la cónica

$$3x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$$

son las rectas $y = x$; $y = 3x - 2$.

Solución: Se puede proceder de 2 maneras:

1º Buscando las direcciones asintóticas, es decir, determinando el $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x}$.

Como es

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 3 - \frac{2}{x} + 2\frac{y}{x}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0, \text{ resulta}$$

$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 3 = 0$ si $x \to \infty$, pues entonces los 3 últimos términos tienden a 0. De acuerdo a esta ecuación resulta $\frac{y}{x}$ igual a 1 y a 3.

Las asíntotas serán del tipo $y = x + b$; $y = 3x + b'$. Los valores b y b' se determinan reemplazando en la ecuación dada de la curva y estableciendo que deben tener un punto común en el infinito $(x \to \infty)$. Para la primera asíntota resulta $3x^2 - 4x(x+b) + (x+b)^2 - 2x + 2(x+b) - 1 = 0$. Efectuadas las simplificaciones y dividiendo por x, es $-2b + \frac{b^2 + 2b - 1}{x} = 0$. Si $x \to \infty$, $b = 0$.

Para la segunda asíntota resulta $(2b' + 4) + \frac{b'^2 + 2b' - 1}{x} = 0$. Si $x \to \infty$, $b' = -2$.

2º Ordenando la ecuación dada respecto de las potencias de y, resulta

$$y^2 - 2y(2x - 1) + 3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Considerando esta expresión como una ecuación de 2º grado en y, es $y = 2x - 1 \pm \sqrt{(2x-1)^2 - (3x^2 - 2x - 1)} = 2x - 1 \pm \sqrt{(x-1)^2 + 1}$.

Cuando $x \to \infty$, $\sqrt{(x-1)^2 + 1}$ se puede sustituir por $(x - 1)$, pues la diferencia es infinitésima. (En efecto, si su diferencia es multiplicada y dividida por su conjugada, se ve que tiende a 0 si $x \to \infty$). Resultan, por consiguiente, las rectas

$$y = (2x - 1) + (x - 1) = 3x - 2;$$
$$y = (2x - 1) - (x - 1) = x.$$

Este segundo procedimiento es más directo y es el más indicado para hallar las asíntotas de una hipérbola.

4. Verificar que las asíntotas de la curva

$$2x^2 - 3xy + y^2 + 7x - 4y - 3 = 0$$

son las rectas $y = 2x + 1$; $y = x + 3$.

5. Verificar que las asíntotas de la curva $y = \dfrac{ax + 1}{x^2 - 1}$ son las rectas $y = 0$; $x = 1$; $x = -1$.

6. Verificar que la curva $y = \dfrac{7x^2 + px + q}{x^2 + 2x - 3}$ tiene las asíntotas verticales $x = -3$; $x = 1$ y la asíntota horizontal $y = 7$.

7. Verificar que la curva $y = \dfrac{3x^2 + x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$ tiene la única asíntota $y = 1$.

8. Verificar que las asíntotas de la curva $y = \dfrac{(1 - a)\, x^2 - 4x + 4}{x^2}$ son los ejes de coordenadas.

9. Hallar las asíntotas del folio de Descartes

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Solución: Dividiendo por x^3 resulta $\dfrac{y^3}{x^3} = -1 + 3\dfrac{ay}{x^2}$. El segundo miembro tiende a -1 cuando $x \to \infty$. Luego, $\left(\dfrac{y}{x}\right)^3 \to -1$ cuando $x \to \infty$ y, por consiguiente, $\dfrac{y}{x} \to -1$.

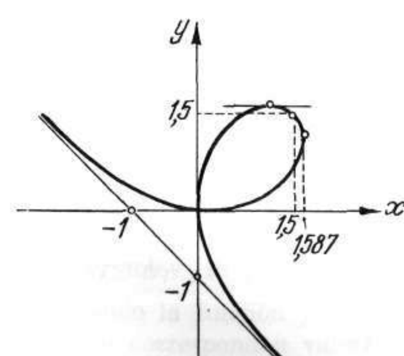


FIG. V-20.

La única asíntota debe ser entonces del tipo $y = -x + b$. Reemplazando en la ecuación de la curva, simplificando y dividiendo por x^2, resulta

$$3\,(b + a) - \frac{3b\,(1 + a)}{x} + \frac{n^2}{x^2} = 0.$$

Para $x \to \infty$ la igualdad se satisface (es decir, hay intersección entre la curva y la recta) si $b = -a$. Por consiguiente, la ecuación de la asíntota es $y = -x - a$. La figura 20 representa el folio de Descartes para $a = 1$.

10. Verificar que la asíntota de $y^3 = x^2\,(2a - x)$ es $y = -x + \frac{2}{3}a$.
(Procédase como en el ejercicio anterior).

11. Mostrar que la curva $(x + 1)\, y^2 = (y + 2)\, x^2$ tiene las asíntotas $x + 1 = 0$; $y + 2 = 0$; $y = x + 1$.

CAPÍTULO VI

DERIVADA

1. PENDIENTES E INCREMENTOS

Hemos visto que la representación gráfica de la función lineal $y = mx + b$ en un sistema de ejes cartesianos es una recta.

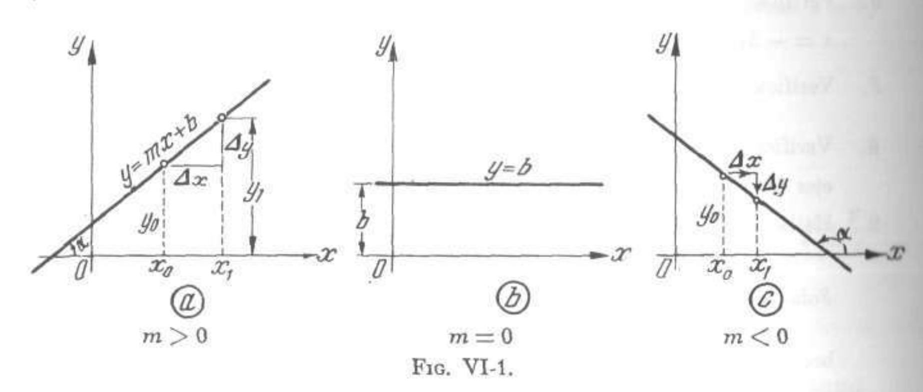


Fig. VI-1.

Si además el sistema cartesiano es ortogonal y se ha adoptado la misma unidad en ambos ejes coordenados, el parámetro m mide la *pendiente* de la recta, es decir, la *tangente trigonométrica* del ángulo α (*inclinación*) que la recta forma con el semieje positivo de las x.

Cuando del valor x_0 pasamos a un valor x_1 decimos que esta variable ha experimentado un *incremento* Δx (se lee "delta x"):

$$\Delta x = x_1 - x_0.$$

Correspondientemente, la ordenada ha pasado del valor y_0 al valor y_1 y el incremento Δy es

$$\Delta y = y_1 - y_0.$$

Es fácil mostrar que a un incremento Δx positivo corresponde un incremento Δy, que es positivo si es m positivo y negativo si éste es el signo de m. En efecto, por ser

$$\Delta y = y_1 - y_0 = (mx_1 + b) - (mx_0 + b) = m(x_1 - x_0) = m\Delta x$$

resulta que el signo de Δy es igual o distinto que el de Δx, según que sea $m > 0$ o $m < 0$, tal como lo muestran las figuras.

Lo característico de la función lineal (es decir, de las rectas) es que la *relación incremental* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ es constantemente igual a la *pendiente m*, cualquiera sea el punto x.

Esto no ocurre con las otras funciones. Veamos, por ejemplo, lo que sucede con la función cuadrática $y = x^2$.

Con las notaciones anteriores resulta

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1^2 \\ y_0 = x_0^2 \end{array}\right\} \Delta y = y_1 - y_0 = x_1^2 - x_0^2 = (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = (x_1 + x_0)\Delta x.$$

El cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1 + x_0 = 2x_0 + \Delta x$ es variable y crece a medida que aumenta x_0.

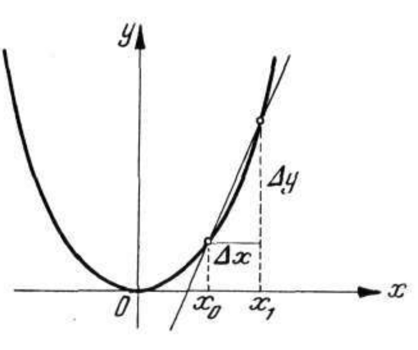


Fig. VI-2.

Como se ve en la figura, este cociente incremental, en el intervalo (x_0, x_1), es igual a la pendiente de la recta que une los puntos correspondientes de la curva representativa de la función $y = f(x)$.

Consideremos en particular el punto $x_0 = 1$. Calculemos para diversos valores Δx los correspondientes valores Δy y los cocientes incrementales.

De acuerdo a los resultados anteriores se obtiene, con $x_0 = 1$:

Δx	1	0,5	0,1	0,05	0,01	0,001
$x_1 = 1 + \Delta x$	2	1,5	1,1	1,05	1,01	1,001
Δy	3	1,25	0,21	0,1025	0,0201	0,002001
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3	2,50	2,1	2,05	2,01	$2{,}001 \to 2$

2. LIMITE DEL COCIENTE INCREMENTAL

Siendo la función $y = x^2$ continua, a valores Δx cada vez más pequeños corresponden valores cada vez más pequeños de Δy. Esto significa que el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a tomar la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ cuando Δx tiende a cero. Pero a pesar de ello el límite de este cociente es un número perfectamente determinado.

En el caso concreto antes analizado: $y = x^2$; $x_0 = 1$, parece resultar de la tabla de valores que el límite del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es 2.

Así es en efecto; como para $y = x^2$ ha resultado que el cociente incremental a partir de un valor x_0 es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$, se tiene $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 \cdot$

Para la función cuadrática $y = x^2$ el límite del cociente incremental correspondiente a un punto de abscisa x_0 es el doble del valor x_0.

3. DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Sea $y = f(x)$ una función continua en un intervalo (a, b) y sea x_0 un punto interior a este intervalo. El punto P correspondiente de la curva tiene una ordenada y_0.

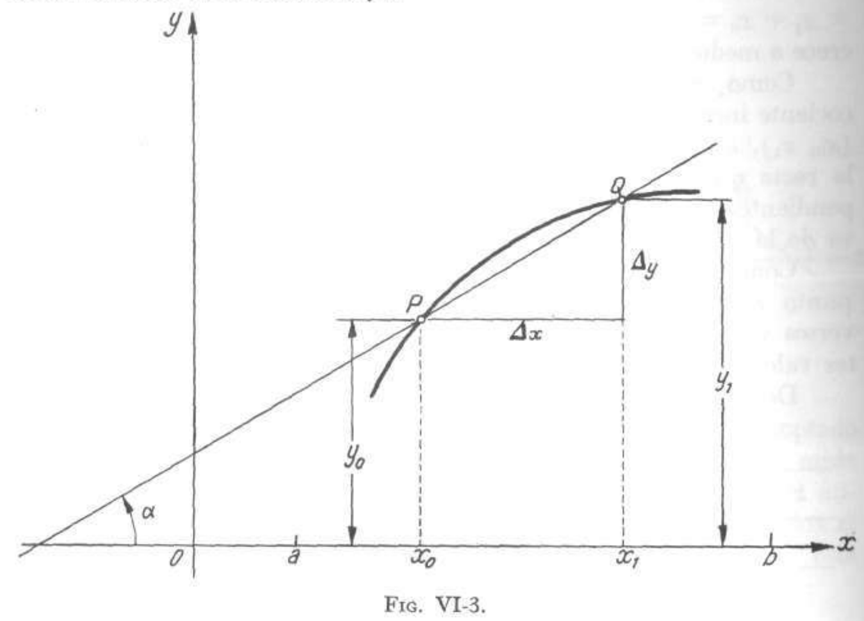


FIG. VI-3.

¿Cómo medir la pendiente de la curva en P? Daremos a x_0 un incremento Δx, obteniendo así un punto x_1, al cual corresponde en la curva el punto Q de ordenada y_1. La ordenada ha variado, pues del valor y_0 ha pasado a otro valor y_1, que puede ser mayor (como en el caso de la figura), menor o igual a y_0. El incremento de la función es $\Delta y = y_1 - y_0$ y la relación incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ mide la pendiente de la recta PQ, es decir, es igual a la tangente del ángulo α, que forma la secante PQ con el semieje positivo de las x.

Intuitivamente se comprende que esta pendiente no puede considerarse como *la* pendiente de la curva en P, pues si en lugar del incremento Δx considerado se toma otro menor, resultará una pendiente distinta (en el caso de la figura resultará una pendiente *mayor*).

Por definición, *llamaremos derivada de una función $y = f(x)$ o pendiente de la curva correspondiente en un punto $P(x_0, y_0)$ al límite del cociente incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$.*

Cuando $\Delta x \to 0$ el punto Q tiende al punto P y la posición límite de la recta secante PQ es la *recta tangente PT*, que forma con el semieje positivo de las x un ángulo φ.

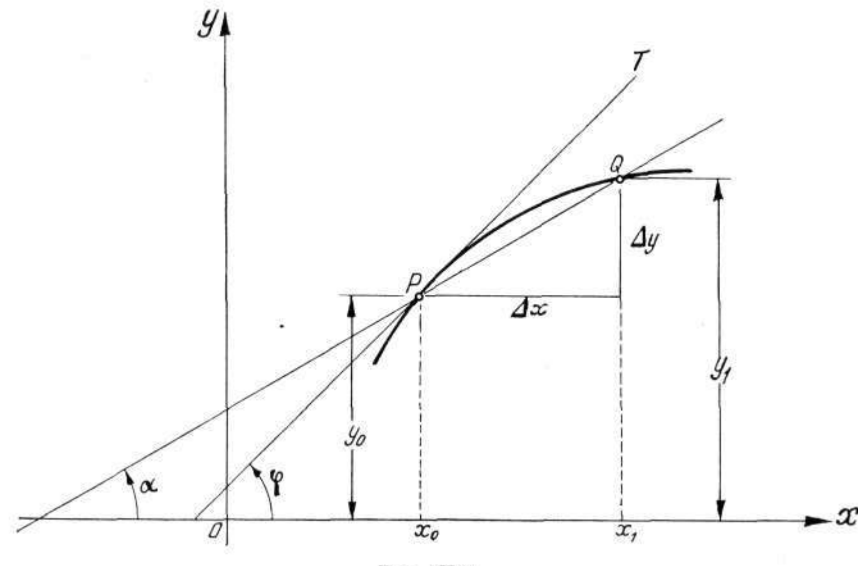


FIG. VI-4.

Este ángulo φ, límite de los ángulos α que forman las diversas secantes PQ cuando $\Delta x \to 0$, es la *inclinación* de la curva en el punto P, y la tangente del ángulo φ es la *pendiente* de la curva en ese punto.

La derivada se escribe con distintas notaciones:

$$y'; \; D_y; \; f'(x); \; [f(x)]'; \; Df(x); \; D_x f(x); \; \frac{dy}{dx}; \; \dot{y}.$$

También se designa el incremento Δx con la letra h y el incremento Δy con la letra k. Resulta entonces

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En física, en general, la variable es el tiempo, que se representa con la letra t. Si el espacio es $s(t)$, la derivada del espacio con respecto al tiempo $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ se escribe $\dot{s}(t)$.

Esta es la notación que utilizó NEWTON (1642-1727), uno de los creadores del cálculo infinitesimal, en sus célebres *Principia.* Para NEWTON una curva estaba descripta por el movimiento de un punto que *fluye* y el cociente incremental era para él "el cociente entre el *momento de la fluente* y un *tiempo infinitamente pequeño*". Por su parte LEIBNIZ (1646-1716), que creó simultánea e independientemente el cálculo infinitesimal, utilizó la notación $\frac{dy}{dx}$ que actualmente usamos.

A partir de entonces y por obra especialmente de los BERNOUILLI y de EULER, el cálculo alcanzó un desarrollo prodigioso. Su conjunción con el método experimental de GALILEO, ha constituido el fundamento de la fisicomatemática clásica.

Para conocer la evolución histórica del cálculo infinitesimal recomendamos la lectura del capítulo correspondiente de J. REY PASTOR y J. BABINI: *Historia de la Matemática*, Espasa-Calpe, 1951.

Los problemas filosóficos vinculados a estas cuestiones están ampliamente tratados en LEON BRUNSCHVICG: *Las etapas de la filosofía matemática* (Trad. de Cora Ratto de Sadosky. Lautaro, 1945).

DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD:

Hagamos notar, además, que siendo $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ se puede escribir (pág. 102) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$, siendo ε un infinitésimo, o, lo que es lo mismo, $\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon \Delta x$.

Por consiguiente, si $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, es decir, si una función es derivable, es *continua*. La proposición recíproca no es cierta: *hay funciones continuas que no son derivables*, o, en términos geométricos, *hay curvas que no tienen tangente*, como se verá más adelante (pág. 167, ej. 10).

El lector podrá verificar fácilmente que la función continua $f(x) = |x|$ que se ha estudiado en la página 33 no tiene derivada en el origen.

TÉCNICA DE LA DERIVACIÓN: Obsérvese cuál ha de ser la *técnica* para calcular la derivada de una función en un punto x_0:

1. Dar a la variable x un incremento (positivo o negativo) Δx, a partir de x_0, con lo que se obtiene $x_1 = x_0 + \Delta x$.
2. Calcular el valor y_1 correspondiente a x_1.
3. Calcular el incremento $\Delta y = y_1 - y_0$.
4. Formar el cociente incremental. En esta expresión tratar de eliminar todos aquellos factores que hacen que el cociente tienda a tomar la forma $0:0$.
5. Calcular el límite del cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$.

EJEMPLOS:

1º) Sea calcular la derivada de $y = ax^2$ en el punto de abscisa x_0, es decir, en un punto cuyas coordenadas son $(x_0;\ ax_0^2)$.

1. A la variable x le damos un incremento Δx, es decir, consideramos un punto $x_1 = x_0 + \Delta x$.
2. Calculamos el valor correspondiente a este punto x_1: $y_1 = a(x_0 + \Delta x)^2$.
3. Calculamos el incremento $\Delta y = y_1 - y_0 = a(x_0 + \Delta x)^2 - ax_0^2 = a(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \overline{\Delta x}^2) - ax_0^2 = 2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2$.

4. Formamos el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2}{\Delta x}$ y simplificamos el factor Δx (si $\Delta x \neq 0$), con lo que resulta $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax_0 + a\Delta x$.

5. Calculamos la derivada y', es decir, el límite de este cociente incremental, cuando $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2ax_0 + a\Delta x) = 2ax_0$$

Por consiguiente, *la derivada de la función $y = ax^2$ en el punto de abscisa x_0 es igual a $2ax_0$.*

2º) Calcular la derivada de $y = \frac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x_0 \neq 0$.

1. Sea $x_1 = x_0 + \Delta x$.

2. El valor de la función en x_1 es $y_1 = \frac{4}{x_1} = \frac{4}{(x_0 + \Delta x)}$.

3. El incremento experimentado por la función es

$$\Delta y = y_1 - y_0 = \frac{4}{(x_0 + \Delta x)} - \frac{4}{x_0} = \frac{4[x_0 - (x_0 + \Delta x)]}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-4\Delta x}{x_0^2 + x_0\Delta x}.$$

4. El cociente incremental es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{x_0^2 + x_0\Delta x}$.

5. La derivada y' es el límite de este cociente incremental:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{4}{x_0^2}.$$

En particular, para $x_0 = 1$ es $y'_0 = -4$

Repitiendo los mismos pasos de este cálculo se demuestra que la derivada de $y = \frac{k}{x}$ es $y' = -\frac{k}{x^2}$.

EJERCICIOS:

1. Demostrar que la derivada de $y = ax^3$ en el punto de abscisa x_0 es $y' = 3ax_0^2$.
2. Demostrar que la derivada de la función $y = \frac{c}{x^2}$ en el punto de abscisa $x_0 \neq 0$ es $-2c : x_0^3$.
3. Demostrar que la derivada de $y = ax^2 + bx + c$ en el punto de abscisa x_0 es $y' = 2ax_0 + b$.

4. ECUACION DE LA RECTA TANGENTE Y DE LA RECTA NORMAL

Si en la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

sustituimos m por la derivada y'_0, de acuerdo a la interpretación geométrica de la derivada, se tendrá la ecuación de la recta tangente en el punto P:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0).$$

La recta normal en P es, por definición, la recta perpendicular a la tangente en el punto P y, por consiguiente, su coeficiente angular debe ser el valor recíproco cambiado de signo de y_0'.

La ecuación de la recta normal es

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0).$$

EJERCICIOS:

1. Trazar la recta tangente t y la recta normal n a la curva

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

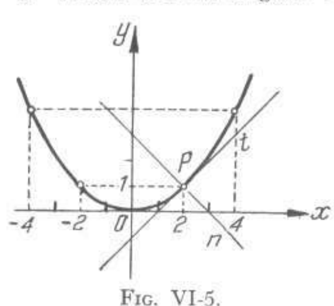


FIG. VI-5.

en el punto de abscisa $x_0 = 2$.
Siendo $y' = 2ax$ la derivada de $y = ax^2$, resulta en este caso $y' = \frac{1}{2}x$, y en el punto P es $y_0' = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.

La recta tangente en $P(2, 1)$ tendrá por ecuación

$$y - 1 = 1(x - 2),$$

es decir, $y = x - 1$.

La recta normal en el mismo punto será

$$y - 1 = -1\,(x - 2),$$

es decir, $y = -x + 3$.

2. Trazar la recta tangente y la recta normal a la curva

$$y = \frac{4}{x}$$

en el punto P de abscisa $x_0 = 1$.

Como ya hemos visto, es $y' = -\frac{4}{x^2}$, y en P es $y_0' = -4$.

La ecuación de la tangente en P resulta

$$y - 4 = -4\,(x - 1),$$

o sea, $y = -4x + 8$.

La ecuación de la normal será

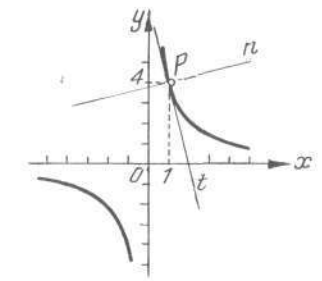


FIG. VI-6.

$$y - 4 = \frac{1}{4}(x - 1),$$

o sea, $y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{4}$.

3. **Demostrar que la recta tangente** en el punto $P(x_0, y_0)$, de la parábola

$$y = ax^2,$$

corta al eje y **en el punto** $R(0; -y_0)$.

Determinar un **procedimiento** geométrico para el trazado de la tangente a la parábola.

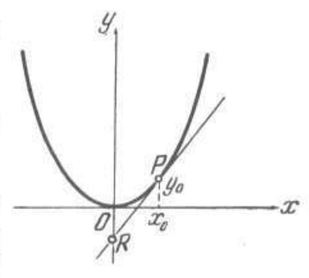


Fig. VI-7.

Solución: Siendo $2ax_0$ la pendiente de la recta tangente en P, su ecuación resulta

$$y - y_0 = 2ax_0\,(x - x_0).$$

La intersección con el eje y se obtiene haciendo $x = 0$:

$$y = y_0 - 2ax_0^2 = y_0 - 2y_0 = -\,y_0.$$

Tenemos así la regla práctica para trazar la tangente en cualquier punto P de esta parábola. Es suficiente señalar sobre el eje y el punto R cuya ordenada sea opuesta a la de P y unir los puntos P y R.

4. Demostrar que la tangente a la curva

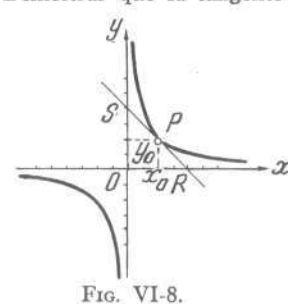


Fig. VI-8.

$$y = \frac{k}{x}$$

en un punto $P(x_0,\, y_0)$ se obtiene uniendo el punto P con el punto $R(2x_0,\, 0)$.

Solución: La pendiente m de la recta tangente es la derivada de la función en dicho punto:

$$m = y'_0 = -\frac{k}{x_0^2} = -\frac{y_0}{x_0}.$$

La ecuación de la tangente en P será

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0).$$

La intersección R con el eje de las x se obtiene haciendo $y = 0$:

$$-\,y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x_R - x_0),$$

o sea, $x_R = 2x_0$.

Demuéstrese análogamente que es $OS = 2y_0$.

5. FUNCION DERIVADA. DERIVACION GRAFICA

Hemos calculado la derivada en un punto de abscisa x_0 y hemos obtenido un *número* que mide la pendiente de la curva en ese punto. Así, para $y = ax^2$ hemos obtenido $y'(x_0) = 2ax_0$, entendiendo con

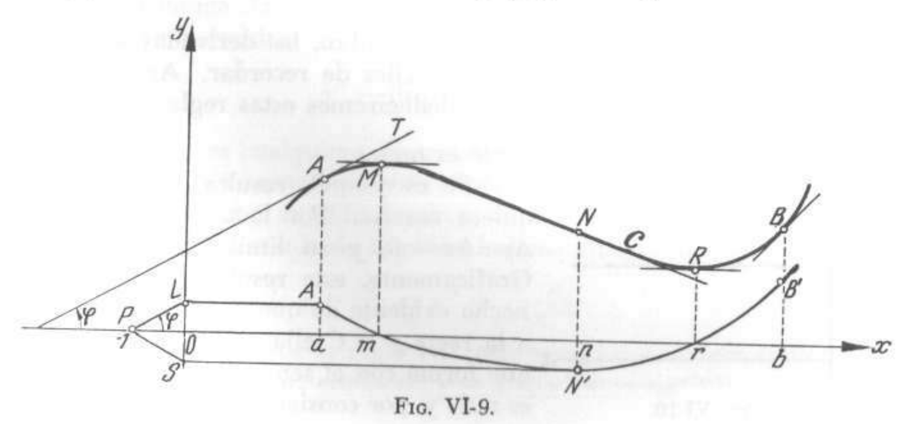


Fig. VI-9.

la notación $y'(x_0)$ el valor de la derivada de la función y en el punto $x = x_0$.

Considerando x_0 variable se tiene la función $y' = 2ax$, *derivada de la función* $y = ax^2$.

Veamos cómo podemos obtener en forma *aproximada*, gráficamente. la función derivada de $y = f(x)$ cuyo diagrama es una curva C.

La derivada para $x = a$ es la pendiente de la curva en el punto A, esto es, la pendiente de la recta tangente AT, que forma el ángulo φ con el semieje positivo de las x: $\operatorname{tg} \varphi = y'(a)$. Por el punto P (polo) de abscisa -1 trazamos una paralela a AT que corta al eje de las y en un punto L. Evidentemente, es $LO = \operatorname{tg} \varphi$ (puesto que es $PO = 1$) y, por consiguiente, $LO = y'(a)$. Trazando por L una paralela al eje de las abscisas se obtiene sobre la ordenada Aa un punto A', cuyas coordenadas son $x = a$, $y = y'(a)$. A' es un punto de la *curva derivada*. En la misma forma se procede con los otros puntos: M, N, R, B. En la figura 9 se ha dibujado sólo la construcción correspondiente a los puntos A y N.

Ejercicios:

1. Dibujar la curva

$$y = \frac{1}{3}x^3$$

en el intervalo $(-2, +2)$. Efectuar la derivación gráfica que aproximadamente resulta la curva $y = x^2$.

2. Dibujar la función

$$y = \ln x$$

y verificar que la derivación gráfica da aproximadamente la curva $y = \frac{1}{x}$.

3. Verificar que la derivación gráfica de la función

$$y = \operatorname{sen} x$$

da aproximadamente la función $y = \cos x$.

6. CALCULO DE DERIVADAS

Como veremos en el desarrollo del libro, las derivadas se calculan en base a una serie de reglas fáciles de recordar. Aplicando la técnica empleada en los ejemplos deduciremos estas reglas.

I) *La derivada de una constante es nula.*

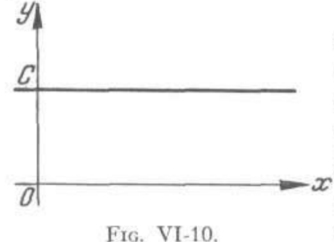


Fig. VI-10.

Si es $y = C$, resulta $\Delta y = 0$ cualquiera sea Δx. Por lo tanto, el cociente $\Delta y : \Delta x = 0$, y su límite también es 0. Gráficamente, este resultado confirma el hecho evidente de que, siendo la tangente a la recta $y = C$ ella misma, el ángulo φ que forma con el semieje positivo de las x es nulo y, por consiguiente, $y' = \operatorname{tg} \varphi = 0$.

II) *La derivada de la variable independiente es la unidad.*

Es decir, si es $y = x$, resulta $y' = 1$. En efecto, por ser $y = x$ es $\Delta y = y_1 - y_0 = x_1 - x_0 = \Delta x$; el cociente incremental $\Delta y : \Delta x$ es constantemente igual a la unidad, por lo cual y', que es su límite, también es 1.

Gráficamente, este resultado es evidente, pues la tangente a la recta $y = x$ es la misma bisectriz del primer y tercer cuadrante, que forma con el semieje positivo de las x un ángulo constante $\varphi = 45°$. Por ello $y' = \operatorname{tg} 45° = 1$.

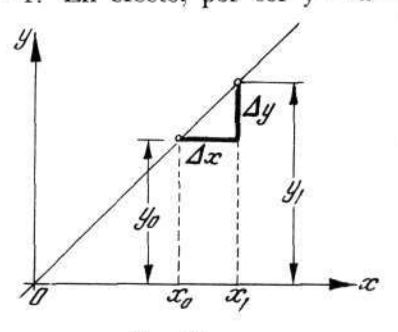


FIG. VI-11.

III) *La derivada de $y = x^n$ (con n entero y positivo) es $y' = nx^{n-1}$.*

He aquí los pasos a seguir:

1. Consideramos $x_1 = x_0 + \Delta x$.
2. Calculamos el valor $y_1 = x_1^n$.
3. Calculamos el incremento $\Delta y = y_1 - y_0 = x_1^n - x_0^n$. Como esta diferencia es divisible por $(x_1 - x_0)$ (pág. 48), se puede escribir

$$\Delta y = x_1^n - x_0^n = (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + x_1^{n-3}x_0^2 + \dots + x_0^{n-1}).$$

4. Formamos el cociente incremental, recordando que es $\Delta x = x_1 - x_0$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + x_1^{n-3}x_0^2 + \dots + x_0^{n-1}.$$

5. Cuando $\Delta x \to 0$, $x_1 \to x_0$, y, como hay n sumandos, la derivada resulta

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx_0^{n-1}.$$

Si x_0 es cualquiera, se trata de la función derivada.

Hagamos notar que esta regla contiene, como caso particular, a II), como se ve haciendo $n = 1$. Además, si es $n = 2$, resulta $y' = 2x$, resultado también hallado anteriormente.

III') *La derivada de $y = \dfrac{1}{x^n}$ es $y' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.*

Esto significa que la regla III) vale aún si n es *entero cualquiera*, pues se podrá escribir, entonces, $y = x^{-n}$, $y' = -nx^{-(n+1)}$.

En efecto, es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_1^{-n} - x_0^{-n})}{x_1 - x_0} = -\frac{(x_1^n - x_0^n)}{x_1 - x_0} \cdot \frac{1}{x_1^n x_0^n} \cdot$$

Cuando $x_1 \to x_0$, de acuerdo a III) el primer factor tiende a nx_0^{n-1} y el segundo a x_0^{-2n}. Por consiguiente, resulta

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\, nx_0^{n-1} \cdot x_0^{-2n} = -\, nx_0^{-(n+1)}.$$

IV) *La derivada de* $y = \sqrt{x}$ *es* $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot$

Procedemos de acuerdo a lo indicado:

1. Consideremos el valor $x_1 = x_0 + \Delta x$.
2. Calculemos el valor $y_1 = \sqrt{x_0 + \Delta x}$.
3. Calculemos el incremento de la función $\Delta y = y_1 - y_0 = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$.

   Para facilitar el cuarto paso multiplicamos y dividimos la expresión anterior por su conjugada: $\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}$, con lo que resulta

$$\Delta y = \frac{\sqrt{(x_0 + \Delta x)^2} - \sqrt{(x_0)^2}}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}\cdot$$

4. El cociente incremental resulta, entonces,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}\cdot$$

5. La derivada es el límite de este cociente incremental

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot$$

   Obsérvese que la expresión formal de la regla III) también vale en este caso, pues, de $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ha resultado $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

V) ***La derivada de una suma algebraica** de funciones es igual a la **suma algebraica** de las derivadas de las funciones sumandos.*

En símbolos, si $y = u(x) - v(x) + w(x)$,

es $y' = u'(x) - v'(x) + w'(x)$.

En efecto, a un incremento Δx de la variable independiente corresponden sendos incrementos Δu, Δv, Δw, que sumados algebraicamente dan Δy:

$$\Delta y = \Delta u - \Delta v + \Delta w.$$

Dividiendo por Δx y pasando al límite se tiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x},$$

que escrita con la notación anterior es

$$y' = u' - v' + w'.$$

VI) *La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.*

Si $y = K f(x)$, resulta $y' = K f'(x)$, pues si a un incremento Δx le corresponde un incremento $\Delta f(x)$ de la función $f(x)$, a la función $K f(x)$ le corresponderá el incremento $K \Delta f(x)$. Dividiendo por Δx y pasando al límite se tendrá

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{K \Delta f(x)}{\Delta x} = K \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = K f'(x).$$

En base a estos dos últimos teoremas resulta:

VII) *La derivada de una combinación lineal de funciones*

$$y = K_1 f_1(x) + K_2 f_2(x) + \ldots + K_n f_n(x)$$

(con $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$, constantes) *es*

$$y' = K_1 f_1'(x) + K_2 f_2'(x) + \ldots + K_n f_n'(x).$$

En particular, la función derivada de un polinomio de grado n:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

es otro polinomio:

$$P'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1},$$

de grado $(n-1)$.

VIII) *La derivada de un producto de dos funciones $u(x) \cdot v(x)$ es igual a la derivada de la primer función por la segunda sin derivar, más la primer función por la derivada de la segunda.*

En símbolos, si $y = u(x) \cdot v(x)$,

$$\text{es } y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

En efecto, al incremento Δx de la variable corresponden los incrementos Δu y Δv de las funciones. El incremento del producto será

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v,$$

y el cociente incremental,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

Siendo las funciones $u(x)$ y $v(x)$ derivables (y, por consiguien-

te, continuas) cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta u \to 0$ y $\Delta v \to 0$. Pasando al límite en la última igualdad resulta:

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' + u' \cdot 0 = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

IX) *La derivada de un cociente de dos funciones $u(x) : v(x)$ es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos la derivada del denominador por el numerador, dividida esta diferencia por el cuadrado del denominador.*

En símbolos, si $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$,

$$\text{es } y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

En efecto, siendo el cociente incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \dfrac{u}{v}}{\Delta x} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x} v - u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}$$

cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta u \to 0$ y $\Delta v \to 0$, y pasando al límite resulta

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Ejercicios:

Verificar las siguientes relaciones, donde el símbolo D significa *derivada* respecto de la variable correspondiente:

1. $D(2x^3 - 3x^2 + 4) = 6x\,(x - 1)$.
2. $D(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4) = x\,(x^2 + 1)$.
3. $D(mt^4 - 2nt^2) = 4t\,(mt^2 - n)$.

Dado y calcular y', siendo y' la derivada de y respecto de x:

4. $y = x\,(1 - x)$. R: $y' = 1 - 2x$.
5. $y = (3x + 5)\,(2x - 1)$. R: $y' = 12x + 7$.

En las expresiones del segundo miembro efectúense las operaciones indicadas y calcúlense las correspondientes derivadas:

6. $y = 13x\,(2 + 5x^2)$. R: $y' = 26 + 195x^2$.
7. $y = (x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3)$. R: $y' = 3x^2 - 12x + 11$.
8. $y = (x - 1)\,(x + 1)\,(1 - 5x^2)\,(1 + 5x^2)$. R: $y' = 2x\,(1 + 50x^2 - 75x^4)$.
9. $y = \dfrac{x + 2}{x}$. R: $y' = -2 : x^2$.

10. $y = (a - x)\, x^{-1}$. R: $y' = -ax^{-2}$.

Verificar las siguientes igualdades:

11. $D(4x - x^4) = 4\,(1 - x^3)$.
12. $D[(1 - 3x)^2] = -6\,(1 - 3x)$.
(Desarróllese la potencia).
13. $D[(ax + 1)\,(a + x)] = a^2 + 2ax + 1$.
(Efectúese el producto y derívese luego).
14. $D(x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 2x + 1) = 4x^3 - 15x^2 + 16x - 2$.
15. $D(-4ax^3 + 6a^2x^2 - 3a^3x + 2a^4) = -3a\,(2x - a)^2$.
16. $D[1 + 2t^2]^3 = 12t\,(1 + 2t^2)^2$.
(Desarróllese la potencia).
17. Verificar que la derivada de

$$y = \frac{3x + 2}{2x + 3} \quad \text{es} \quad y' = \frac{5}{(2x + 3)^2}.$$

Verificar las siguientes derivadas de cocientes:

18. $D\dfrac{x}{1 - x} = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$.

19. $D\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2} = \dfrac{4x}{(1 - x^2)^2}$.

20. $D\dfrac{2x + 3}{3x + 2} = \dfrac{-5}{(3x + 2)^2}$.

21. Dada la curva

$y = x^3 - 3x^2 + 1$

hallar:

a) Inclinación φ en el punto de abscisa $x_0 = -0{,}5$.

b) Inclinación en los puntos de intersección con la recta $x = +1$.

c) Puntos cuya pendiente sea igual a la de la recta $15x - 4y - 15 = 0$.

d) Puntos cuya tangente sea paralela a la recta $y = x$.

e) Puntos cuya tangente sea horizontal.

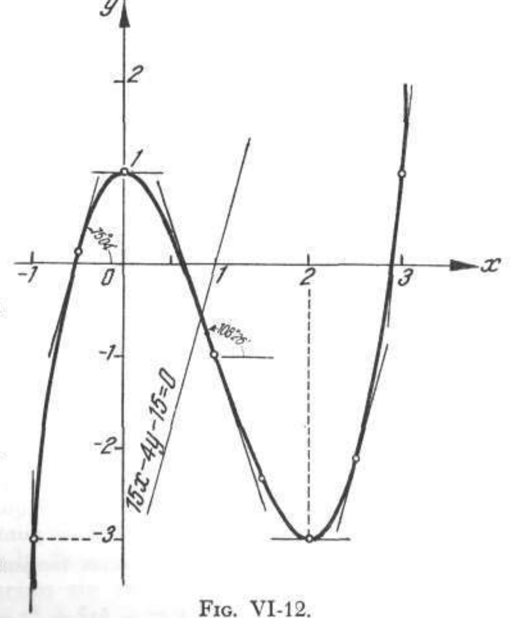


FIG. VI-12.

Solución:

a) Derivando la **función** dada se tiene

$y' = 3x^2 - 6x = \operatorname{tg}\varphi$. [1]

En el punto $x_0 = -0{,}5$ resulta $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{15}{4}$ y, por consiguiente, $\varphi \sim 75°\,04'$.

b) El valor [1] en el punto de intersección con la recta $x = +1$, será $\operatorname{tg}\varphi = 3 - 6 = -3$, y resulta $\varphi \sim 108°\,26'$.

c) Llamando m a la pendiente de la recta $15x - 4y - 15 = 0$, es $m = \dfrac{15}{4}$;

igualando este valor a la expresión [1] resulta $3x^2 - 6x = \frac{15}{4}$, ecuación de 2º grado que se satisface para $x_1 = 2,5$; $x_2 = -0,5$.

d) Los puntos cuya tangente sea paralela a la recta $y = x$ deben tener pendiente $m = 1$, esto es, $3x^2 - 6x = 1$. Las raíces de esta ecuación: $x_1 \sim -0,15$; $x_2 \sim 2,15$, dan las abscisas de los puntos buscados.

e) La tangente es horizontal en los puntos de pendiente nula, o sea, donde $y' = 0$. En este caso, cuando $3x^2 - 6x = 0$, es decir, en los puntos de abscisa, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

22. Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola

$$y = x^2 - 2x + 1$$

que forme un ángulo de 135° con el eje x.

R: $y = -x + \frac{3}{4}$.

Ecuación de las rectas tangente t y normal n de las siguientes curvas, en los puntos indicados:

23. $y = 2x^3 - x$ en $x_0 = 1$.

R: t: $5x - y = 4$.
n: $x + 5y = 6$.

24. $y = \frac{x+2}{3x+1}$ en $x_0 = 0$.

t: $5x + y = 2$.
n: $x - 5y = -10$.

25. Hallar el área del triángulo formado por el eje y y las rectas tangente y normal de la curva

$$y = x^2 - 2x$$

en el punto $x_0 = 2$.

R: $A = 5u^2$.

(Trácese el gráfico; obsérvese que las rectas tangente y normal cortan al eje de las y en los puntos -4 y 1, respectivamente).

26. Determinar el punto en que la tangente a la curva

$$y = x^3$$

en el punto (1, 1) la corta de nuevo.

R: $(-2, -8)$.

27 Determinar en qué puntos de la curva

$$y = \frac{x}{1 - x^2}$$

la tangente tiene una inclinación de 45°. Efectúese la representación gráfica.

R: En el origen y en los puntos de abscisas $+\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$.
(Obsérvese que es una función impar y que su derivada es siempre positiva. ¿Cuál es el valor de la función en los puntos $x = +1$; $x = -1$?).

28. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes que pueden trazarse desde el origen a la curva

$$y = -4x^2 + 3x - 1.$$

¿En qué punto la tangente es paralela al eje x? Trácese el gráfico correspondiente.

Solución: La ecuación de todas las rectas que pasan por el origen es $y = mx$, donde m es la pendiente variable. Si la recta es tangente a la curva en el punto (x_0, y_0), su pendiente será

$$m = y'_0 = -8x_0 + 3,$$

y la recta tangente por el origen resulta

$$y = (-8x_0 + 3)x.$$

Como esta recta pasa por el punto (x_0, y_0), debe verificarse para estas coordenadas, es decir, debe ser $y_0 = (-8x_0 + 3)x_0$. Además, como el punto pertenece a la curva dada, debe verificarse $y_0 = -4x_0^2 + 3x_0 - 1$. Igualando los valores y_0 se obtiene $x_0^2 = \frac{1}{4}$, o sea, $x_0 = \pm\frac{1}{2}$.

Las rectas tangentes son, entonces,

$$y = -x,$$
$$y = 7x.$$

El punto donde la tangente es horizontal, o sea, de pendiente nula, tiene abscisa $\frac{3}{8}$.

29. Ecuación de las rectas tangente t y normal n de la curva

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

en el punto $x_0 = 1$. Verificar gráficamente los resultados.

R: t: $x - 2y - 1 = 0$.
n: $2x + y - 2 = 0$.

30. Dada la curva

$$y = \frac{x-1}{2-x}$$

determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a ella en el punto $(3, -2)$.

R: t: $y = x - 5$.
n: $y = -x + 1$.

31. Estudiar las variaciones de signo de la derivada primera de la función

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1.$$

Solución: La derivada

$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$$

puede escribirse también en la siguiente forma: $y' = 5x^2(x-1)(x-3)$, con lo que resulta negativa entre 1 y 3, se anula en esos puntos y es positiva para los restantes valores.

X) *La derivada del logaritmo neperiano de x es igual al recíproco de x.* En símbolos, si $y = \ln x$,

$$\text{es } y' = \frac{1}{x}.$$

El incremento Δy de la función es igual a la función incrementada en Δx menos la función sin incrementar:

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\frac{x + \Delta x}{x} = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

El cociente incremental será, multiplicando y dividiendo por x,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Si hacemos $\frac{\Delta x}{x} = t$ cuando $\Delta x \to 0$, también $t \to 0$. Además será $\frac{x}{\Delta x} = \frac{1}{t}$.

Consideraremos valores positivos de x, pues sólo para ellos está definida la función logarítmica.

El límite del cociente incremental será

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln (1 + t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{t \to 0} \ln (1 + t)^{\frac{1}{t}}.$$

Tratándose del logaritmo de una función continua, el límite buscado será el logaritmo del límite, y como es

$$\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

de acuerdo a lo visto en página 125, resulta entonces

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \ln e = \frac{1}{x}.$$

X') *La derivada del logaritmo en base a de x es igual al recíproco de x multiplicado por el logaritmo en base a del número e.*

En efecto, por ser $y = \log_a x = \ln x \cdot \log_a e$, y siendo $\log_a e$ una constante, se tiene, de acuerdo con la regla VI,

$$y' = D(\ln x) \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \log_a e.$$

X") En particular, *la derivada del logaritmo decimal de x es igual al recíproco de x por el logaritmo decimal de e.*

Como es $\log_{10} e = M = 0{,}43429\ldots$, resulta $y' = \frac{M}{x}$.

EJERCICIOS:

1. Verificar que la derivada de la función:
$y = x \cdot \ln x$ es $y' = 1 + \ln x$.

Verificar las relaciones:

2. $D(x^2 \ln x + 3x) = x(2 \ln x + 1) + 3$.
3. $D\frac{3 \ln x}{x} = \frac{3(1 - \ln x)}{x^2}$.
4. Determinar en qué punto es horizontal la tangente a la curva
$y = \frac{\ln x}{x}$ R: $x = e$.
5. Ecuación de las rectas tangente t y normal n de la curva
$y = \ln x$
en el punto $x_0 = e$.
R: t: $y = e^{-1} x$. n: $y = -e x + e^2 + 1$.

XI) *La derivada de la función* sen x *es la función* cos x.
En símbolos, si $y = \text{sen}\, x$,
es $y' = \cos x$.

En efecto, el cociente incremental es $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\text{sen}\,(x + \Delta x) - \text{sen}\, x}{\Delta x}$.
El numerador puede transformarse en un producto de acuerdo a las fórmulas trigonométricas del apéndice, con lo que resulta

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\Delta x \cos\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right)}{\Delta x} = \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cdot \cos\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right).$$

Si ahora se hace tender Δx a 0, el cociente $\left[\text{sen}\,\frac{1}{2}\Delta x : \frac{1}{2}\Delta x\right]$ tenderá a la unidad, de acuerdo a lo visto anteriormente (pág. 103), y como $\cos\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right)$ tiende a $\cos x$, resulta

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x.$$

EJERCICIOS:

1. Demostrar que la derivada de $y = \text{sen}\, ax$ es $y' = a \cos ax$. (Adáptese la demostración del texto).
2. Idem de $y = k\,\text{sen}\,(ax + b)$ es $y' = ka \cos(ax + b)$.
3. Demostrar que la tangente a la sinusoide $y = \text{sen}\, x$ en el origen de coordenadas es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
4. Hallar las ecuaciones de la recta tangente t y de la recta normal n de $y = \text{sen}\, x$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{3}\pi$.

   R: t: $x - 2y + \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi = 0$. n: $4x + 2y - \sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi = 0$.
5. Demostrar que el área del triángulo limitado por los ejes coordenados y la tangente a la curva $y = \text{sen}\, x$ en el punto de abscisa $x_0 = \frac{1}{3}\pi$ es igual a $(3\sqrt{3} - \pi)^2 : 36 \sim 0{,}12$.

7. DERIVADA DE FUNCION DE FUNCION

Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, se dice que y es una *función de función de* x:

$$y = f[g(x)].$$

Para calcular la derivada de y respecto de x observemos que a un incremento Δx corresponde un incremento Δu [de acuerdo a la función $g(x)$] y que a éste corresponde un incremento Δy [de acuerdo a la función $f(u)$].

Siendo $y'_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f(u)}{\Delta u}$, resulta $\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \varepsilon$, o sea, $\Delta y = f'(u)\Delta u + \varepsilon \Delta u$, con $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$.

Dividiendo por Δx se tiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon\,\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$ (en cuyo caso $\varepsilon \to 0$) es

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x).$$

EJEMPLOS:

1°) Si es $y = \ln(\operatorname{sen} x)$, resulta $y = \ln u = f(u)$, con $u = \operatorname{sen} x = g(x)$. Por ello

$$y' = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{ctg} x.$$

2°) Si es $y = \sqrt{1 + x^3}$, es $y = \sqrt{u} = f(u)$; $u = 1 + x^3 = g(x)$.

La regla indica

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{1 + x^3}}.$$

Análogamente, si

$$y = f(u);\ u = g(t) \text{ y } t = h(x), \text{ es}$$
$$y' = f'(u) \cdot g'(t) \cdot h'(x).$$

EJEMPLO:

Si es $y = \sqrt{\ln \operatorname{sen} x}$, es $y = \sqrt{u} = f(u)$; $u = \ln t = u(t)$; $t = \operatorname{sen} x = h(x)$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{t} \cdot \cos x = \frac{1}{2\sqrt{\ln t}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x = \frac{\operatorname{cotg} x}{2\sqrt{\ln \operatorname{sen} x}}.$$

EJERCICIOS:

1. Derívese la función

$$y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2. \qquad \text{R: } y' = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right).$$

(Puede procederse por 3 caminos: desarrollando la potencia; tomando el producto de 2 factores, o derivando como función de función).

2. Idem

$$\varrho = \left(A + \frac{B}{\alpha}\right)^2,$$

siendo A, B constantes y α la variable.

R: $\varrho' = -\frac{2B}{\alpha^2}\left(A + \frac{B}{\alpha}\right)$.

Derivar las siguientes funciones:

3. $y = (1 - x)^4$. R: $y' = 4(x - 1)^3$.

4. $y = \left(1 - \frac{x}{3}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{3}\right)^2$. R: $y' = \frac{4}{9}x\left(\frac{x^2}{9} - 1\right)$.

5. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$. R: $y' = \frac{(x+1)^2\,(x-5)}{(x-1)^3}$.

6. $y = \frac{(x-1)^2\,(2x+1)}{(x+1)^2\,(2x-1)}$ R: $y' = \frac{12x^2\,(x^2-1)}{(x+1)^3\,(2x-1)^2}$.

7. $y = (m - nx^2)^3$. R: $y' = -6nx\,(m - nx^2)^2$.

8. $s = \sqrt{4t^2 - 25}$. R: $s' = 4t : s$.

9. $\varrho = \sqrt{9 + \theta^2}$. R: $\varrho' = \frac{\theta}{\varrho}$.

10. $y = \sqrt{2x^2 - 6x + 1}$. R: $y' = (2x - 3) : y$.

11. $y = \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{2x^2 + 1}$. R: $y' = -2xy\,(4x^4 - 1)^{-\frac{1}{2}}$.

12. $y = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1}$. R: $y' = x\,(3x^2 - 1)\,(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$.

13. $y = \frac{x^3}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$. R: $y' = \frac{3y}{x\,(1 - x^2)}$.

14. $y = \sqrt{2x + \frac{2}{x}}$. R: $y' = \frac{x^2 - 1}{x^2 y}$.

15. Verificar que la derivada de la función

$y = \sqrt{x^2 + a^2}$ es $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

16. Idem de

$y = \frac{a}{\sqrt{a - x^2}}$ es $y' = ax : (a - x^2)^{\frac{3}{2}}$.

17. Idem de

$y = \frac{x}{b}\sqrt{(a - x)\,x}$ es $y' = \frac{x\,(3a - 4x)}{2b\sqrt{(a - x)\,x}}$.

18. Idem de

$y = x(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ es $y' = a^2\,(a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$.

19. Verificar que

$$D\frac{x^m}{(1 - x)^n} = \frac{x^{m-1}}{(1 - x)^{n+1}}\,[m - (m - n)x].$$

20. Hallar la derivada de

$$y = 5x^2 - \ln\sqrt{x} + 3x^9\sqrt[4]{x^3} - \frac{x}{3 - x^5}.$$

R: $y' = 10x - \frac{1}{2}x^{-1} + \frac{117}{4}x^8\sqrt[4]{x^3} - \frac{4x^5 + 3}{(3 - x^5)^2}$.

Derivar las siguientes funciones:

21. $y = \ln x^n$. R: $y' = nx^{-1}$.

22. $y = \frac{\ln(x + 3)}{x + 3}$. R: $y' = \frac{1 - \ln(x + 3)}{(x + 3)^2}$.

23. $y = (\ln ax)^3$. R: $y' = 3\,(\ln ax)^2\,x^{-1}$.

24. Verificar que la derivada de

$y = \ln Ax^m$ es $y' = mx^{-1}$.

25. Idem de

$y = \ln\frac{x^2}{1 - x^2}$ es $y' = \frac{2}{x\,(1 - x^2)}$.

26. Idem de
$$y = (\ln x)^m \quad \text{es} \quad y' = \frac{m\,(\ln x)^{m-1}}{x}.$$

27. Idem de
$$\varrho = \ln(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) \quad \text{es} \quad \varrho' = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}.$$

Derivar las siguientes funciones:

28. $y = \ln \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$. R: $y' = \frac{2\,(1-x^2)}{1+x^2+x^4}$.

29. $y = \ln \frac{x}{1+x}$. R: $y' = \frac{1}{x\,(1+x)}$.

30. $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$. R: $y' = -\frac{2}{1-x^2}$.

31. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$. R: $y' = \frac{2}{x\sqrt{x^2+1}}$.

(Téngase en cuenta la regla del logaritmo de un cociente).

32. Verificar que la derivada de la función
$$y = \ln \sqrt{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}} \quad \text{es} \quad y' = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}\,(x-a)}.$$

(Antes de derivar aplíquense las reglas que permiten calcular el logaritmo de raíces, cocientes, etc.).

33. Idem de
$$y = \log \sqrt{4-x^2} \quad \text{es} \quad y' = -\frac{x \log e}{4-x^2}.$$

34. Determinar la pendiente de la curva
$$y = \ln(4-x)$$
en los puntos de intersección con los ejes.

R: $m = -1$; $m_2 = -\frac{1}{4}$.

Derivación logarítmica: La derivada del logaritmo y la regla de derivación de función de función permiten simplificar muchos cálculos.

Así, si se debe calcular la derivada de
$$y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}},$$
en lugar de aplicar directamente la regla de derivación de función de función calculando la derivada de la raíz y luego la del cociente, es más conveniente tomar logaritmos neperianos en ambos miembros:
$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)],$$
y derivando ahora, teniendo presente que y es función de x, resulta:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1}\right] = \frac{2x}{(x^2-1)(x^2+1)}.$$

Despejando y' se obtiene la derivada buscada:

$$y' = \frac{2x}{(x^2-1)(x^2+1)}\, y = \frac{2x}{(x^2-1)(x^2+1)}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} =$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^4-1}\,(x^2+1)}.$$

Este procedimiento permite calcular en forma mucho más sencilla algunas derivadas que ya hemos determinado anteriormente.

a) Si $y = x^n$ (n: entero), tomando logaritmos en ambos miembros resulta

$$\ln y = n \ln x,$$

y derivando ambos miembros, teniendo en cuenta que en el primero y es función de x y por ello debe ser derivado como función de función, queda

$$\frac{1}{y}\cdot y' = n\cdot\frac{1}{x}\cdot 1.$$

De aquí se obtiene

$$y' = \frac{n}{x}\cdot y = \frac{n}{x}\cdot x^n = nx^{n-1}.$$

Esta demostración vale no sólo para valores enteros de n, sino para cualquier exponente α real:

$$\text{Si } y = x^\alpha, \text{ es } y' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

b) Si $y = u(x)\cdot v(x)$, resulta

$$\ln y = \ln u + \ln v.$$

Derivando ambos miembros es

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{u}\cdot u' + \frac{1}{v}\cdot v',$$

es decir,

$$y' = \frac{1}{u}\cdot u'\cdot y + \frac{1}{v}\cdot v'\cdot y = \frac{1}{u}\cdot u'\cdot uv + \frac{1}{v}\cdot v'\cdot uv = u'\cdot v + u\cdot v'.$$

Análogamente, si es $y = u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)$, demuéstrese que es

$$y' = u'\,v\,w + u\,v'\,w + u\,v\,w'.$$

c) Si $y = u(x) : v(x)$, es

$$\ln y = \ln u - \ln v,$$

y derivando queda

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{u}\cdot u' - \frac{1}{v}\cdot v'$$

o sea,

$$y' = \frac{1}{u}\cdot u'\cdot y - \frac{1}{v}\cdot v'\ y = \frac{1}{u}\cdot u'\frac{u}{v} - \frac{1}{v}\cdot v'\cdot\frac{u}{v} = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}.$$

XII) *La derivada de la función* $\cos x$ *es la función* $-\operatorname{sen} x$.

En símbolos, si $y = \cos x$,

$$\text{es } y' = -\operatorname{sen} x.$$

En efecto, por ser $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$, aplicando la regla de derivación de la función de función se tiene

$$D(\cos x) = D \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)\cdot(-1) = -\operatorname{sen} x.$$

XIII) *La derivada de la función* $\operatorname{tg} x$ *es igual a la unidad dividida por el cuadrado del coseno de* x.

En símbolos, si $y = \operatorname{tg} x$,

$$\text{es } y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

En efecto, siendo la tangente igual al cociente $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ resulta

$$D(\operatorname{tg} x) = D\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{D(\operatorname{sen} x)\cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot D(\cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Ejercicios:

1. Demostrar que la derivada de $y = \operatorname{cotg} x$ es $y' = -1 : \operatorname{sen}^2 x = -\operatorname{cosec}^2 x$.
2. Demostrar que la derivada de $y = \sec x$ es $y' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$.
3. Demostrar que la derivada de $y = \operatorname{cosec} x$ es $y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$.
4. Hallar la derivada de

$$p = r^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}r^2,$$

donde r es variable independiente y p variable dependiente.

R: $p' = \frac{2}{3}(r^{-\frac{1}{3}} - r)$.

5. Verificar que la derivada de
$y = x^m (1-x)^n$, es $y' = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m - (m+n)x]$.
6. Hallar la derivada de

$$y = (x+a)^m (x+b)^n.$$

R: $y' = (x+a)^{m-1}(x+b)^{n-1}[(m+n)x + mb + na]$.

7. Idem de

$$y = \sqrt{(x+1)(x+2)}.$$

R: $\frac{1}{2}(2x+3) : y$.

8. Idem de

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

R: $y' = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

9. Verificar que la derivada de

$$y = \sqrt[3]{(2x-1)^2} \qquad \text{es} \qquad y = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x-1}}.$$

10. Idem de

$$y = \sqrt[3]{\frac{4+3t}{4-3t}} \qquad \text{es} \qquad y' = 8y : (16 - 9t^2).$$

11. Derivar

$$y = x^x.$$

Solución: Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros resulta

$$\ln y = x \cdot \ln x,$$

y derivando respecto de x como variable independiente se tendrá

$$\frac{1}{y}y' = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}.$$

Despejando y' queda

$$y' = y\,(\ln x + 1) = x^x\,(\ln x + 1).$$

12. Derivar

$$y = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}.$$

R: $y' = n\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}\left(\ln\frac{x}{n} + 1\right).$

13. Derivar

$$y = x^{\sqrt{x}}.$$

R: $y' = y\left(\frac{1}{2}\ln x + 1\right)x^{-\frac{1}{2}}.$

14. Derivar

$$y = \left(\frac{2}{x}\right)^x.$$

R: $y' = y\left(\ln\frac{2}{x} - 1\right).$

15. Derivar

$$y = \frac{\sqrt{n^2+x^2}}{x\sqrt{n^2-x^2}}.$$

R: $y' = y\left(\frac{2n^2\,x}{n^4-x^4} - \frac{1}{x}\right).$

16. Derivar

$$y = x^{x^x}.$$

R: $y' = yx^x\,[x^{-1} + \ln x + (\ln x)^2].$

(Interprétese la función x^{x^x} en la forma $x^{(x^x)}$ y tómense logaritmos neperianos en ambos miembros antes de empezar a derivar).

17. Verificar que la derivada de la función

$$y = x^2 \cos x$$

es $$y' = 2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x.$$

18. Idem de

$$y = \operatorname{sen} x : x$$

es $$y' = (x \cos x - \operatorname{sen} x) : x^2.$$

19. Idem de

$$y = x : \operatorname{sen} x$$

es $$y' = \operatorname{cosec} x \, (1 - x \operatorname{cotg} x).$$

20. Idem de

$$y = \cos 2x + \operatorname{sen} 2x$$

es $$y' = 2 \, (\cos 2x - \operatorname{sen} 2x).$$

21. Idem de

$$y = \operatorname{sen} 9 \, (a - x)$$

es $$y' = -9 \cos 9 \, (a - x).$$

22. Idem de

$$y = \operatorname{cosec} mx$$

es $$y' = -m \operatorname{cotg} mx \cdot \operatorname{cosec} mx.$$

23. Derivar

$$y = \cos x \cdot \operatorname{sen} 2x.$$

R: $y' = 2 \cos x \, (3 \cos^2 x - 2)$.

24. Derivada de

$$y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x.$$

R: $y' = 2 \operatorname{sen} x \, (3 \cos^2 x - 1)$.

25. Idem de

$$y = \operatorname{sen} nx \cdot \cos nx.$$

R: $y' = n \cos 2nx$.

26. Idem de

$$y = \operatorname{sen} x \, (\operatorname{sen} x - \cos x).$$

R: $y' = \operatorname{sen} 2x - \cos 2x$.

27. Idem de

$$y = \cos 2x + \operatorname{sen} x \cos x.$$

R: $y' = \cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x$.

28. Verificar que la derivada de la función

$$y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x + \cos x$$

es $$y' = \operatorname{tg} x \cdot \sec x.$$

29. Idem de

$$y = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \quad \text{es} \quad y' = \frac{2 \cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2}.$$

30. Idem de

$$y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad \text{es} \quad y' = \frac{2 \operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2}.$$

31. Idem de

$$y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} \quad \text{es} \quad y' = 2 \operatorname{sen} 2x \sec^2 2x.$$

32. Idem de
$$y = \cos^2\left(\frac{1}{4}\pi + x\right) \qquad \text{es} \qquad y' = -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi + 2x\right)$$

33. Idem de
$$y = \cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x - 1$$
es
$$y' = -\operatorname{sen} 2x - \cos 2x.$$

34. Idem de
$$y = \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \qquad \text{es} \qquad y' = -\frac{\operatorname{sen}^3 x}{(1 + \cos^2 x)^2}.$$

35. Idem de
$$y = \frac{1}{6}\cos(2x + 1)\,[\cos^2(2x + 1) - 3]$$
es
$$y' = \operatorname{sen}^3(2x + 1).$$

36. Derivada de
$$y = \cos^3 x.$$
R: $y' = -\dfrac{3}{2}\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x.$

37. Idem de
$$y = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x.$$
R: $y' = \operatorname{sen} x \cos^2 x\,(2\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x).$

38. Idem de
$$y = \operatorname{tg}^2 x.$$
R: $y' = 2\operatorname{tg} x \sec^2 x.$

39. Verificar que la derivada de
$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \qquad \text{es} \qquad y' = \cos x\,(3\cos^2 x - 2).$$

40. Derivada de
$$y = \sec^2 x.$$
R: $y' = 2\sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x.$

41. Idem de
$$y = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x.$$
R: $y' = \cos^3 x.$

42. Verificar que la derivada de
$$y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$$
es
$$y' = \operatorname{tg}^4 x.$$

43. Idem de
$$y = -\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg} x + x \qquad \text{es} \qquad y' = \operatorname{cotg}^4 x\,.$$

44. Derivada de
$$y = \sqrt{\operatorname{tg} 2x}$$
R: $y' = \sec^2 2x : y.$

45. Idem de
$$y = \frac{\cos x}{\sqrt{\sec x}}.$$

R: $y' = -\frac{3}{2}\cos^{\frac{1}{2}} x \cdot \text{sen}\, x.$

46. Idem de

$$y = \sqrt{a\,\text{sen}^2 x + b\cos^2 x}.$$

R: $y' = \frac{1}{2}(a-b)\,\text{sen}\,2x : y.$

47. Idem de

$$y = \text{sen}^n\, 2x.$$

R: $y' = 2n \cdot \text{sen}^{n-1} 2x \cdot \cos 2x.$

48. Idem de

$$y = A\,\text{tg}^m\,(x^n).$$

R: $y' = A\,m\,n\,x^{n-1}\,\text{tg}^{m-1}\,(x^n)\sec^2(x^n).$

49. Idem de

$$y = \text{tg}\, x\sqrt{3\sec x}$$

R: $y' = \sqrt{3\sec x}\left(\sec^2 x + \frac{1}{2}\text{tg}^2 x\right).$

50. Demostrar que la derivada de

$$y = \text{tg}\, x \cdot \text{cotg}\, x$$

es nula. ¿Por qué?

51. Verificar que la derivada de
$y = \ln(\cos x)$ es $y' = -\,\text{tg}\, x.$

52. Idem de
$y = \ln(\text{tg}\, x)$ es $y' = 2\,\text{cosec}\, 2x.$

53. Idem de
$y = \ln x \cdot \text{tg}\, x$ es $y' = \ln x \cdot \sec^2 x + \dfrac{\text{tg}\, x}{x}$

54. Idem de
$s = \ln\sqrt{\cos 2t}$ es $s' = -\,\text{tg}\, 2t.$

55. Idem de
$y = x + \ln\cos\left(\frac{1}{4}\pi - x\right)$ es $y' = \dfrac{2}{1+\text{tg}\, x}.$

56. Idem de
$y = \ln\text{tg}\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ es $y' = -\sec x.$

57. Idem de
$y = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$ es $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$

58. Idem de
$y = \frac{1}{8}\ln\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$ es $y' = \frac{1}{2}\text{cosec}\, 2x.$

59. Idem de
$y = \ln\text{sen}\sqrt{x}$ es $y' = \frac{1}{2}\text{cotg}\sqrt{x}\cdot x^{-\frac{1}{2}}.$

60. Idem de

$$y = \sqrt{\ln \operatorname{tg} x} \qquad \text{es} \qquad y' = \operatorname{cosec} 2x : y.$$

61. Idem de

$$y = \sqrt[3]{\ln \operatorname{sen} \sqrt{x}} \qquad \text{es} \qquad y' = \frac{1}{6} \operatorname{cotg} \sqrt{x} \cdot x^{-\frac{1}{2}} : y^2.$$

62. Hallar la derivada de

$$y = \log_a \operatorname{tg}^2 x.$$

R: $y' = 4 \log_a e \cdot \operatorname{cosec} 2x.$

63. Derivar

$$y = x^{\operatorname{sen} x}.$$

R: $y' = x^{\operatorname{sen} x - 1} (x \cos x \cdot \ln x + \operatorname{sen} x).$

64. Derivar

$$y = \operatorname{sen} x^{\cos x}.$$

R: $y' = \operatorname{sen} x^{\cos x - 1} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \cdot \ln \operatorname{sen} x).$

65. Ecuación de las rectas tangente t y normal n de

$$y = \cos x$$

en el punto $x_0 = \frac{1}{4}\pi.$

R: t: $2x + 2\sqrt{2}y - 2 - \frac{1}{2}\pi = 0.$ $\qquad$ n: $2x - \sqrt{2}y + 1 - \frac{1}{2}\pi = 0.$

Hallar las ecuaciones de la recta tangente t y de la recta normal n a cada una de las siguientes curvas en el punto indicado:

66. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$ en $x_0 = \frac{1}{2}\pi.$

67. $y^3 = x^2$ en $x_0 = -1.$

R: 66. t: $y + x = \frac{1}{2}\pi$; $\qquad$ 67. t: $2x + 3y - 1 = 0$;

n: $x - y = \frac{1}{2}\pi.$ $\qquad$ n: $3x - 2y + 5 = 0.$

68. Determinar los puntos de la curva

$$y = 2 \operatorname{sen} x + 3 \cos 2x,$$

en los que la tangente tiene pendiente nula.

R: $x = (2k + 1)\, 90°$; $x = 9°36' + 360° k$; $x = 170°24' + 360° k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

XIV) *Derivada de las funciones inversas.*

Consideremos una función continua $y = f(x)$ dada en la forma $x = g(y)$. Es evidente que los incrementos correspondientes son inversos, pues si al incremento Δx de x le corresponde el incremento Δy de y, será

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

y pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$ [en cuyo caso también $\Delta y \to 0$ por la continuidad de $f(x)$] se tendrá

$$g'(y) = 1 : f'(x).$$

EJEMPLOS:

1º) Si $y = x^2$, resulta $x = \sqrt{y}$:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

2º) Si $y = \ln x$, resulta $x = e^y$:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^y$$

3º) Si $y = \operatorname{sen} x$, es $x = \operatorname{arc\,sen} y$:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

4º) Si $y = \cos x$, es $x = \operatorname{arc\,cos} y$:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{-\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

5º) Si $y = \operatorname{tg} x$, es $x = \operatorname{arc\,tg} y$:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1 : \cos^2 x} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Resumiendo los ejemplos vistos se obtienen las siguientes reglas de derivación:

Si $y = e^x$, es $y' = e^x$.

Si $y = \operatorname{arc\,sen} x$, es $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Si $y = \operatorname{arc\,cos} x$, es $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Si $y = \operatorname{arc\,tg} x$. es $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

XV) *Derivada de la función exponencial.*

Si es $y = a^x$, se puede escribir idénticamente $y = e^{x \ln a}$ (como se comprueba tomando logaritmos neperianos en ambas expresiones) y aplicando la regla de derivación de función de función se tiene

$$y' = e^{x \ln a} \cdot D(x \ln a) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Más general. si el exponente es una función $u(x)$, se obtiene, para $y = a^{u(x)}$,

$$y' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x).$$

EJERCICIOS:

Derivar las siguientes funciones:

1. $y = x\,e^x$. R: $y' = e^x\,(1 + x)$.

2. $y = x e^{-x}$. R: $y' = e^{-x}(1 - x)$.
3. $y = x^m e^x$. R: $y' = e^x (x + m) x^{m-1}$.
4. $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. R: $y' = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$
5. $y = e^{mx}$. R: $y' = me^{mx}$.
6. $y = 2^{\sqrt{x}}$. R: $y' = \frac{1}{2} y x^{-\frac{1}{2}} \ln 2$.
7. $y = (e^x - e^{-x})^2$. R: $y' = 2(e^{2x} - e^{-2x})$.
8. $s = \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t})$. R: $s' = \frac{1}{4}(e^{\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{2}t})$.
9. $\varrho = \dfrac{e^\theta}{\theta}$. R: $\varrho' = \varrho(\theta - 1)\theta^{-1}$.
10. $y = \operatorname{sen} a^x$. R: $y' = a^x \ln a \cdot \cos a^x$.
11. $y = e^x \operatorname{sen}^2 x$. R: $y' = e^x(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} 2x)$.
12. $y = e^{x^2}$. R: $y' = 2xy$.
13. $y = a^x + x^a$. R: $y' = a^x \ln a + ax^{a-1}$.
14. Verificar que la derivada de la función

$$\varrho = ae^{\frac{1}{2}\theta} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$$

es

$$\varrho' = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, ae^{\frac{1}{2}\theta} \cos\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\theta\right).$$

Derivar las siguientes funciones:

15. $y = e^{x^2} \ln x^2$. R: $y' = 2xe^{x^2}(\ln x^2 + x^{-2})$.
16. $y = xe^{-2x}$. R: $y' = e^{-2x}(1 - 2x)$.
17. $y = \ln(axe^x)$. R: $y' = \dfrac{1 + x}{x}$.
18. Derivar la función potencial-exponencial

$$y = [u(x)]^{v(x)}.$$

Aplíquese el resultado al caso $u(x) = v(x) = x$.

Solución: Tomando logaritmos neperianos resulta

$$\ln y = v \cdot \ln u.$$

Derivando ambos miembros se tiene

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

y, por consiguiente, es

$$y' = \left(v' \ln u + \frac{v \cdot u'}{u}\right) y,$$

o sea,

$$y' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v.$$

En el caso particular $u(x) = v(x) = x$ es

$$y' = x^x \ln x + x^x = x^x(1 + \ln x),$$

como se vió en el ejercicio 11 de la página 153.

Derivar las siguientes funciones:

19. $y = x \operatorname{arc\,sen} x.$ R: $y' = \operatorname{arc\,sen} x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

20. $y = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}.$ R: $y' = 0.$

21. Verificar que la derivada de

$$y = \operatorname{arc\,cos}(1-x) - \sqrt{2x - x^2}$$

es
$$y' = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

22. Dada la función

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

comparar su derivada con la de $\operatorname{arc\,sen} x$.

23. Verificar que la derivada de

$$y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

es
$$y' = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

24. Idem de

$$y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

es
$$y' = \frac{1}{2}.$$

Observación:

La derivada de la función $y_1 = \frac{1}{2}x$ también es $\frac{1}{2}$. ¿Qué relación existe entre y e y_1? (Ténganse presentes las fórmulas trigonométricas del apéndice).

Derivar las siguientes funciones:

25. $y = \operatorname{arc\,sec} x.$ R: $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

26. $y = \operatorname{arc\,cosec} x.$ R: $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$

27. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{m-x}{1+mx}.$ R: $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

28. $\varrho = \sqrt{a^2 - \theta^2} + a \operatorname{arc\,sen} \dfrac{\theta}{a}.$ R: $\varrho' = \dfrac{\sqrt{a-\theta}}{\sqrt{a+\theta}}.$

29. $z = \sqrt{\operatorname{arc\,sen} 2t}.$ R: $z' = \dfrac{1}{z\sqrt{1-4t^2}}.$

30. $y = \operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,sen} \sqrt{1-x^2}.$ R: $y' = 0.$

31. $y = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}.$ R: $y' = \dfrac{2}{1+x^2}.$

32. $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{sen} x}{1 + \sec\alpha \cos x}.$ R: $y' = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha + \cos x}.$

33. $y = \text{arc sen}(\cos x)$. R: $y' = -1$.

34. Indicar por qué las derivadas de

$$y = \text{sen}(\text{arc sen } x),$$
$$y = \cos(\text{arc cos } x),$$
$$y = e^{\ln x},$$

son, en todos los casos, iguales a 1.

¿Qué relación tienen estas funciones con $y = x$, que tiene la misma derivada?

35. Derivar

$$y = e^{\text{arc sen} \frac{1}{x}}.$$

R: $y' = -\dfrac{y}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

36. Ecuación de las rectas tangente t y normal n de la curva

$$y = e^x$$

en el punto $x_0 = 0$

R: t: $y = x + 1$.

n: $y = -x + 1$.

37. Estudiar el signo de la derivada de la curva de probabilidades

$$y = e^{-x^2}.$$

(Obsérvese la gráfica de la pág. 61).

XVI) *Derivada de las funciones hiperbólicas.*

Recordando las definiciones (pág. 89) de las funciones hiperbólicas:

$$\text{Sh } x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}); \qquad \text{Ch } x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x});$$
$$\text{Th } x = \text{Sh } x : \text{Ch } x,$$

resulta, de inmediato,

$$D(\text{Sh } x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \text{Ch } x; \; D(\text{Ch } x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{Sh } x;$$

$$D(\text{Th } x) = \frac{D(\text{Sh } x) \cdot \text{Ch } x - \text{Sh } x \cdot D(\text{Ch } x)}{\text{Ch}^2 x} = \frac{\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x}{\text{Ch}^2 x} =$$
$$= \frac{1}{\text{Ch}^2 x} = \text{Sech}^2 x.$$

Fácilmente se demuestra:

$$D(\text{Cth } x) = -\text{Csch}^2 x$$
$$D(\text{Sech } x) = -\text{Sech } x \cdot \text{Th } x;$$
$$D(\text{Csch } x) = -\text{Csch } x \cdot \text{Ctgh } x.$$

Para las *funciones hiperbólicas inversas* se procede en análoga forma a la empleada para las funciones circulares inversas.

I) De $y = \text{Sh } x$ resulta $x = \text{Arg Sh } y$:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\operatorname{Ch} x} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Sh}^2 x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

II) De $y = \operatorname{Ch} x$ resulta $x = \operatorname{Arg}\operatorname{Ch} y$:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

III) De $y = \operatorname{Th} x$ resulta $x = \operatorname{Arg}\operatorname{Th} y$:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1 : \operatorname{Ch}^2 x} = \operatorname{Ch}^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{Th}^2 x} = \frac{1}{1-y^2}$$

Tenemos de este modo las siguientes fórmulas de derivación:

$y = \operatorname{Arg}\operatorname{Sh} x,$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}};$

$y = \operatorname{Arg}\operatorname{Ch} x,$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}};$

$y = \operatorname{Arg}\operatorname{Th} x,$ $\qquad y' = \dfrac{1}{1-x^2}.$

EJERCICIOS:

Derivar

1. $y = \operatorname{Ch}^2 x.$ R: $y' = \operatorname{Sh} 2x.$
2. $y = \operatorname{Sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{Sh}^3 x.$ R: $y' = \operatorname{Ch}^3 x.$
3. $y = \operatorname{Ch} x \cdot \cos x + \operatorname{Sh} x \cdot \operatorname{sen} x.$ R: $y' = 2 \operatorname{Sh} x \cos x.$
4. $y = \operatorname{Ch} x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{Sh} x \cdot \cos x.$ R: $y' = 2 \operatorname{Ch} x \cos x.$
5. $y = \operatorname{Th} x - \frac{1}{3}\operatorname{Th}^3 x.$ R: $y' = \operatorname{Sech}^4 x.$
6. $y = \ln \operatorname{Th} x.$ R: $y' = 2 \operatorname{Csch} 2x.$
7. $y = \ln \operatorname{Ch} x.$ R: $y' = \operatorname{Th} x.$
8. Verificar que la derivada de

   $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ es $y' = \operatorname{Sech}^2 x.$

Derivar

9. $y = \operatorname{arc\,sen} (\operatorname{Th} x).$ R: $y' = \operatorname{Sech} x.$
10. $y = \operatorname{Arg}\operatorname{Th} \dfrac{x+a}{1+ax}.$ R: $y' = \dfrac{1}{1-x^2}.$
11. $y = \operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{Th} \frac{1}{2} x\right).$ R: $y' = \frac{1}{2}\operatorname{Sech} x.$
12. $y = \operatorname{Arg}\operatorname{Sech} x.$ R: $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$
13. Si $\qquad y = \operatorname{Arg}\operatorname{Th} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

probar que su derivada coincide con la de $y_1 = \ln x$.

14. Ecuación de las rectas tangente t y normal n de la curva
$$y = \operatorname{Ch} x$$
en el punto $x_0 = 1$.
R: t: $y = 1{,}175x + 0{,}368$. n: $y = -0{,}851x + 2{,}394$.

15. Idem de
$$y = \operatorname{Th} x$$
en el punto $x_0 = 0$.
R: t: $y - x = 0$. n: $y + x = 0$.

8. TANGENTE Y NORMAL. SUBTANGENTE Y SUBNORMAL

Con las notaciones de la figura, se llama *tangente* T al segmento RP de tangente comprendido entre el punto $P(x, y)$ y el eje de las abscisas, y *normal* N al segmento PL de normal comprendido entre $P(x, y)$ y el eje de las abscisas.

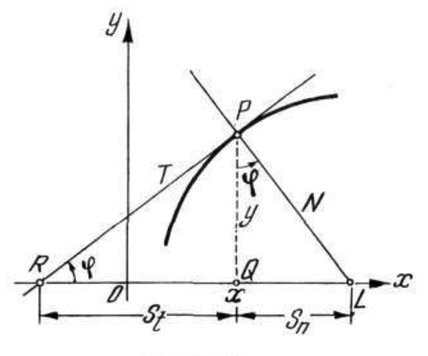


FIG. VI-13.

Las proyecciones de estos segmentos sobre el eje de las abscisas se denominan, respectivamente, *subtangente* S_t y *subnormal* S_n:
$$S_t = RQ; \quad S_n = QL.$$

Si φ es el ángulo que forma la tangente con el eje de las abscisas, el ángulo QPL será igual a φ por tener ambos el mismo complemento. Por ser $\operatorname{tg}\varphi = y'$ resulta

$$y' = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{S_t} \quad \therefore \quad S_t = \frac{y}{y'};$$

$$y' = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} Q\hat{P}L = \frac{S_n}{y} \quad \therefore \quad S_n = y \cdot y'.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras resulta

$$T = \sqrt{RQ^2 + PQ^2} = \sqrt{S_t^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2};$$

$$N = \sqrt{PQ^2 + QL^2} = \sqrt{S_n^2 + y^2} = \sqrt{y^2y'^2 + y^2} = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

EJERCICIOS:

1 Determinar las ecuaciones de las rectas tangente t y normal n, longitud de la subtangente S_t, de la subnormal S_n, de la tangente T y de la normal N de la parábola cúbica
$$y = x^3$$
en el punto $x_0 = 1$.

R: t: $3x - y = 2$; n: $x + 3y = 4$; $S_t = \frac{1}{3}$; $S_n = 3$; $T = \frac{1}{3}\sqrt{10}$; $N = \sqrt{10}$.

2. Ecuación de la recta tangente y normal, longitud de la tangente, normal, subtangente y subnormal de la parábola
$$y = x^2 - x + 1$$
en el punto $x_0 = 2$.

R: t: $3x - y = 3$; n: $x + 3y = 11$; $S_t = 1$; $S_n = 9$; $T = \sqrt{10}$; $N = \sqrt{90}$.

3. Demostrar que la subtangente a la parábola
$$y^2 = ax$$
es bisectada por el origen y que la subnormal es constante e igual a $\frac{1}{2}a$.

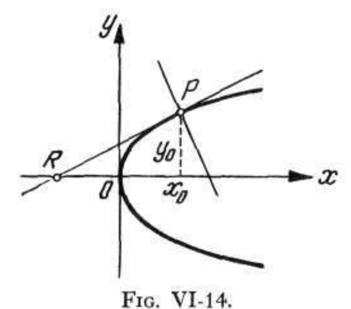


Fig. VI-14.

[Este resultado permite trazar fácilmente la tangente a la parábola en un punto $P(x_0, y_0)$ sin más que localizar el punto $R(-x_0, 0)$].

4. Demostrar que en la función exponencial
$$y = be^{\frac{x}{a}}$$
la subtangente es constante ($= a$) y la subnormal es igual a $y^2 : a$.

5. Dada la curva
$$y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$$
determinar la subtangente S_t, la subnormal S_n, la tangente T y la normal N en el punto $x_0 = \frac{1}{2}\pi$.

R: $S_t = 2$; $S_n = \frac{1}{4}$; $T = \frac{1}{2}\sqrt{18}$; $N = \frac{3}{4}$.

6. Verificar que la subtangente S_t de la curva
$$y^n = a^{n-1}x$$
en el punto x_0 es nx_0.

7. En termodinámica se estudian en el plano (v, p) las curvas $pv^m =$ constante correspondientes a las evoluciones politrópicas. Para determinar el valor de m se utiliza el siguiente teorema: el exponente m es igual a la abscisa v de un punto cualquiera dividida por la subtangente en ese punto cambiada de signo: $m = -v : S_t$.
(Efectúese la demostración considerando la ecuación $p = Cv^{-m}$).

8. En la catenaria
$$y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a}$$
hallar la subtangente S_t, la subnormal S_n y la normal N en un punto x_0.
R: $S_t = a \operatorname{Ctgh} \frac{x_0}{a}$; $S_n = \frac{1}{2} a \operatorname{Sh} \frac{2x_0}{a}$; $N = \frac{y^2}{a}$.

9. Dada una curva cualquiera C demostrar que la longitud L de la perpendicular trazada desde el pie de la ordenada y_0 de uno de sus puntos a la recta tangente en él es

$$L = \frac{y_0}{\sqrt{1 + y_0'^2}}.$$

Solución: El ángulo *SRP* es igual al ángulo φ, que forma la recta tangente con el eje x. Como es $y_0' = \operatorname{tg} \varphi$, resulta

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y_0'^2}} = \frac{L}{y_0}$$

o sea,

$$L = \frac{y_0}{\sqrt{1 + y_0'^2}}.$$

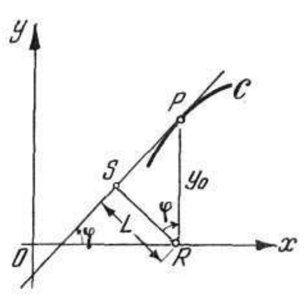


Fig. VI-15.

10. Como caso particular del ejercicio anterior probar que la longitud L es constante ($= a$) en la catenaria

$$y = \frac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

9. ANGULO DE DOS CURVAS

Es fácil calcular el ángulo α que determinan dos rectas recordando que por ser $m = \operatorname{tg} \varphi$ y $m_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ resulta

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\varphi - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{m - m_1}{1 + m m_1}.$$

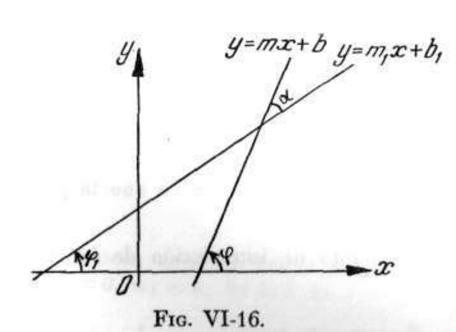


Fig. VI-16.

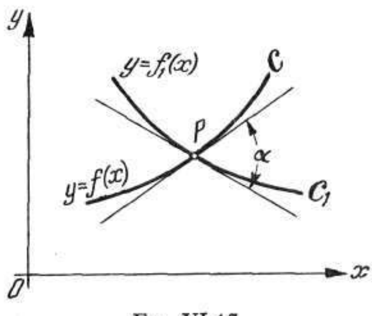


Fig. VI-17.

Cuando se trata de dos curvas, C y C_1, que se cortan en un punto P, se define como ángulo α de las dos curvas al ángulo α determinado por sus tangentes en el punto P. De acuerdo a la interpretación geométrica de la derivada es $m = y'$; $m_1 = y_1'$ y, por consiguiente

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y' - y_1'}{1 + y' y_1'}.$$

Obsérvese que las derivadas se calcularán en el punto P.

EJERCICIOS:

Determinar los ángulos que forman los siguientes pares de curvas en sus puntos de intersección.

1. $y^2 = 2x$; $x^2 = 2y$.

2. $y = \operatorname{sen} x$; $y = \cos x$.

R. 1. Ortogonales en el origen; $\alpha = 36°52'$.

2. $70°32'$.

3. Calcular el ángulo formado por las curvas

$$y = \operatorname{tg} x;$$
$$y = \operatorname{cotg} x,$$

en su punto de intersección.
R: $\sim 126°53'$.

4. Hallar el ángulo de intersección de las parábolas

$$y = x^2;$$
$$x = y^2.$$

R: $\alpha_1 = 90°$; $\alpha_2 = 36°52'$.

5. Hallar el ángulo de las curvas

$$y = \ln x;$$
$$y = x^2 - 1,$$

en su intersección sobre el eje de las abscisas.
R: $18°24'$.

6. Hallar el ángulo que forma el eje de las x y la tangente a la curva

$$y = x\sqrt{1 - x^2}$$

en el origen. ¿En qué puntos de la curva se anula la derivada? ¿Qué sucede con la curva en los puntos $x = 1$, $x = -1$? ¿Cuál es el valor de la pendiente de la curva en esos puntos? Trácese el gráfico correspondiente.

(Siendo $y'(0) = 1$, es $\alpha = 45°$. La derivada se anula en $x = \pm\sqrt{0{,}5}$. La función sólo está definida para $x^2 \leqslant 1$, es decir, en $x = 1$, $x = -1$, la curva "termina". Por lo tanto, no hay pendiente de la curva, pero si se consideran sólo los valores inferiores a 1 o superiores a -1, se ve que la pendiente sería infinita).

7. Probar que las coordenadas x_0, y_0, del punto de intersección de las dos tangentes a la curva

$$y = x^2,$$

en los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), de la misma, valen $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$;

$y_0 = x_1 x_2 = \sqrt{y_1 y_2}$.
[Obsérvese que las ecuaciones de las tangentes a esta parábola en los puntos (x_i, y_i) son $y = 2xx_i - y_i$].

8. Hallar el ángulo α de intersección de las curvas

$$x^2 = 4y;$$
$$y = \frac{8}{x^2 + 4}.$$

Solución: Resolviendo el sistema formado por las dos expresiones se obtienen los puntos reales de intersección de las dos curvas: $P(2, 1)$ y $Q(-2, 1)$.

La pendiente de la primer curva en el punto P es $m_1 = y'_P = \frac{1}{2} x_P = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.
La pendiente de la segunda curva en el mismo punto es $m = y'_P =$
$= \frac{-16x_P}{(x_P^2 + 4)^2} = \frac{-16 \cdot 2}{(2^2 + 4)^2} = -\frac{1}{2}$.

Para determinar el ángulo α de intersección de las curvas dadas tenemos la fórmula

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

O sea, $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 3 = 71°40'$.
Por razones de simetría también éste es el ángulo en Q.

9. Calcular la derivada de la función

$$y = \sqrt[3]{x}$$

en el origen. Interpretar geométricamente el resultado.

Solución: Si $x_0 = 0$, el valor x_1 es directamente Δx y el valor $\Delta y = y_1 - y_0 = \sqrt[3]{\Delta x} - 0 = \sqrt[3]{\Delta x}$. El cociente incremental es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}.$$

Cuando $\Delta x \to 0$, el límite del cociente incremental es ∞.

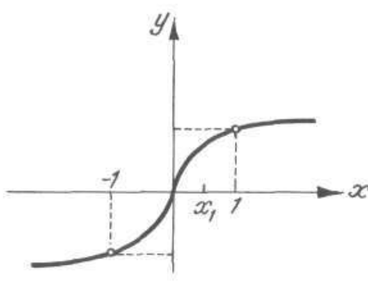


FIG. VI-18.

Si $m = \infty$, es $\varphi = 90°$. La tangente de la curva es la recta vertical

$$y = 0,$$

es decir, el eje de las ordenadas.

10. FUNCIÓN SIN DERIVADA.

La función continua considerada en la página 121

$$y = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \text{ si } x \neq 0; \quad y = 0 \text{ si } x = 0,$$

no tiene derivada en el origen. En efecto: el cociente incremental para $x = 0$, $\Delta x = h$, $\Delta y = k$ es

$$k : h = h \operatorname{sen} \frac{\pi}{h} : h = \operatorname{sen} \frac{\pi}{h},$$

y según hemos visto en la página 120 (fig. V-15) esta expresión no tiene límite cuando $h \to 0$. Por consiguiente *no existe derivada de esa función para $x = 0$.*

Desde el punto de vista geométrico esto significa que la curva representativa de esta función carece de tangente en el punto $x = 0$, $y = 0$. Si unimos el origen O con un punto P cualquiera de la curva, la secante OP no tiende a ninguna recta límite cuando P tiende a O, sino que toma todas las posiciones de las rectas $y = mx$ con m variando con continuidad entre $+1$ y -1. La figura 4 del Capítulo XII ayudará a comprender este resultado sorprendente.
Más aún: WEIERSTRASS mostró que existen funciones continuas que no son derivables en ningún punto.

CAPÍTULO VII

DERIVADAS Y DIFERENCIALES SUCESIVAS

1. DEFINICIONES

Hemos definido primeramente la *derivada* de una función continua $y = f(x)$ en un punto y hemos mostrado que el límite del cociente incremental, cuando existía, era un *número*. Después hemos visto que aplicando el mismo concepto a cada uno de los puntos x de un intervalo (a, b) se obtenía una función derivada $f'(x)$ definida en (a, b).

Si a esta funcion $f'(x)$ se la somete a las mismas operaciones y pasos al límite que a la función dada primitivamente, se obtendrá una nueva función derivada $f''(x)$, llamada *derivada segunda.*

Así, de $y = \operatorname{sen} x$ se obtiene la derivada $y' = \cos x$. Derivando esta función e indicando con 2 acentos la nueva función resulta

$$Dy' = y'' = -\operatorname{sen} x.$$

Otra nueva derivación, que anotaremos con 3 acentos o con un exponente 3 entre paréntesis, dará

$$Dy'' = y''' = y^{(3)} = -\cos x.$$

EJERCICIOS:

Verificar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = 5x^3 - 3x^5$. R: $y'' = 30(x - 2x^3)$.
2. $y = (3x - 1)(2x + 5)$. R: $y'' = 12$.
3. $y = \dfrac{2 + 3x}{2 - 3x}$. R: $y'' = 72(2 - 3x)^{-3}$.
4. $y = \dfrac{x^2}{1 + x}$. R: $y'' = 2(1 + x)^{-3}$.
5. $y = \sqrt{4 + x^2}$. R: $y'' = 4y^{-3}$.
6. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$. R: $y'' = 8(4 - 3x^2)(x^2 + 4)^{-3}$.
7. $y = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x$. R: $y'' = 2(1 + x^2)^{-2}$.
8. $y = \operatorname{arc\,sen} x$. R: $y'' = x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$.
9. $y = \operatorname{sen}^2 x$. R: $y''' = -4y'$.
10. $y = \operatorname{tg} x + \sec x$. R: $y'' = (1 + \operatorname{sen} x)^2 \sec^3 x$.

11. $y = \frac{1-x}{1+x}$. R: $y''' = -\frac{2 \cdot 3!}{(1+x)^4}$.

12. Generalización del ejercicio anterior: $y^{(n)} = (-1)^n \frac{2 \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

13. Verificar que dada la función

$$y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

se cumple la siguiente relación:

$$y'' = a^{-2}y.$$

14. Hallar la constante a de manera que la función

$$y = a \operatorname{sen} 2x$$

satisfaga la relación

$$y'' + 3y = 3 \operatorname{sen} 2x.$$

R: $a = -3$.

15. Determinar las constantes m y n de la función

$$y = m \operatorname{sen} 3x + n \cos 3x$$

de manera que ésta verifique la relación

$$y'' + 4y' + 3y = 10 \cos 3x.$$

R: $m = \frac{2}{3}$; $n = \frac{-1}{3}$.

16. Dado

$$y = 2 \cos ax + 3 \operatorname{sen} ax$$

demostrar que

$$y'' + a^2 y = 0.$$

17. Verificar que la derivada cuarta de la función

$$y = \frac{x^2(x-3)}{1-x}$$

es

$$y^{(4)} = -\frac{48}{(1-x)^5}.$$

(Efectúese la división indicada).

18. Si

$$y = e^{-3x},$$

verificar que

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

19. Si

$$y = [x + \sqrt{1+x^2}]^4,$$

probar que

$$(1+x^2)\, y'' + xy' - 16y = 0.$$

20. Mostrar que la derivada segunda de la función continua

$$y_1 = x^2 - x \quad \text{si } x \geqslant 0,$$
$$y_2 = -x^2 - x \text{ si } x < 0,$$

es discontinua. Hacer la gráfica.

Solución: En efecto,

$$y_1' = 2x - 1 \quad \text{si } x \geqslant 0,$$
$$y_2' = -2x - 1 \text{ si } x < 0.$$

Derivando nuevamente resulta la función discontinua

$$y_1'' = 2 \quad \text{si } x > 0,$$
$$y_2'' = -2 \text{ si } x < 0.$$

DERIVADA ENÉSIMA DE UN PRODUCTO DE 2 FUNCIONES. REGLA DE LEIBNIZ: Consideremos el producto de 2 funciones $u(x)$, $v(x)$ y sus derivadas sucesivas:

$$\begin{aligned} y &= u \cdot v, \\ y' &= u'v + uv', \\ y'' &= (u''v + u'v') + (u'v' + uv'') = u''v + 2u'v' + uv'', \\ y''' &= (u'''v + u''v') + (2u''v' + 2u'v'') + (u'v'' + uv''') = \\ &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \end{aligned}$$

La observación de las derivadas y'' e y''' muestra que los coeficientes que aparecen en los términos sucesivos son precisamente los que figuran en el desarrollo de las potencias del binomio $(a+b)^n$, con $n = 2$ y $n = 3$. Escribamos estas derivadas, para hacer resaltar la analogía, en la siguiente forma:

$$y'' = (u+v)^{(2)} = u^{(2)}v^{(0)} + 2u^{(1)}v^{(1)} + u^{(0)}v^{(2)},$$
$$y''' = (u+v)^{(3)} = u^{(3)}v^{(0)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + u^{(0)}v^{(3)},$$

donde los exponentes entre paréntesis indican el orden de las derivadas según la notación vista en página 168 y con el convenio de que la potencia (0) indica la función sin derivar.

Generalizando tendremos, para la derivada n-sima del producto $y = u(x) \cdot v(x)$, la fórmula de Leibniz

$$y^{(n)} = (u+v)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n\,(n-1)}{2!}\, u^{(n-2)}v^{(2)} + \\ + \ldots + nu^{(1)}v^{(n-1)} + u^{(0)}v^{(n)}.$$

La *demostración* de esta fórmula para cualquier valor natural n se hace empleando el principio de inducción completa (pág. 13), lo que exige:

1°) *Verificar* que la fórmula es válida para $n = 1$. En efecto,
$$(u+v)^{(1)} = u^{(1)}v^{(0)} + u^{(0)}v^{(1)} = u'v + uv'$$
es precisamente la primera derivada del producto $y = u \cdot v$.

2°) *Demostrar* que si la fórmula es válida para $n = h$, es válida para $n = h + 1$.

Siendo la derivada de orden h,
$$(u+v)^{(h)} = u^{(h)}v^{(0)} + hu^{(h-1)}v^{(1)} + \frac{h\,(h-1)}{2!}u^{(h-2)}v^{(2)} + \ldots + \\ + hu^{(1)}v^{(h-1)} + u^{(0)}\,v^{(h)},$$
una nueva derivación da
$$(u+v)^{(h+1)} = [u^{(h+1)}v^{(0)} + u^{(h)}v^{(1)}] + [hu^{(h)}v^{(1)} + hu^{(h-1)}v^{(2)}] + \\ + \left[\frac{h\,(h-1)}{2!}u^{(h-1)}v^{(2)} + \frac{h\,(h-1)}{2!}u^{(h-2)}v^{(3)}\right] + \\ + \ldots + [hu^{(2)}v^{(h-1)} + hu^{(1)}v^{(h)}] + [u^{(1)}v^{(h)} + u^{(0)}v^{(h+1)}].$$

y agrupando el 2º término con el 3º, el 4º con el 5º, etc., resulta

$$(u+v)^{(h+1)} = u^{(h+1)}v^{(0)} + (h+1)u^{(h)}v^{(1)} + \frac{(h+1)\,h}{2!}\,u^{(h-1)}v^{(2)} + $$
$$+ \frac{(h+1)\,h\,(h-1)}{3!}\,u^{(h-2)}v^{(3)} + \dots +$$
$$+ (h+1)u^{(1)}v^{(h)} + u^{(0)}\,v^{(h+1)},$$

que es precisamente la fórmula de Leibniz para $n = h+1$.

EJERCICIOS:

1. Aplicando la regla de Leibniz verificar que dado

$$y = x^3 \ln \frac{x}{a}$$

es

$$y^{(4)} = \frac{6}{x}.$$

2. Idem de

$$y = xe^x$$

es

$$y^{(n)} = (x+n)e^x.$$

3. Idem de

$$y = x^2 \ln x$$

es

$$y''' = \frac{2}{x}.$$

4. Aplicando la regla de Leibniz verificar que dado

$$y = e^{-x}\cos x$$

se cumple la relación

$$y^{(4)} + 4y = 0.$$

5. Calcular la derivada enésima de

$$y = e^{3x}.$$

R: $y^{(n)} = 3^n y$.

6. Verificar que la derivada enésima de

$$y = \operatorname{sen} ax$$

es

$$y^{(n)} = a^n \operatorname{sen}\left(ax + n\frac{1}{2}\pi\right)$$

Solución:

$$y^{(0)} = \operatorname{sen} ax$$

$$y^{(1)} = a\cos ax = a \operatorname{sen}\left(ax + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$y^{(2)} = -\,a^2 \operatorname{sen} ax = a^2 \operatorname{sen}\left(ax + 2\frac{1}{2}\pi\right)$$

$$y^{(3)} = -\,a^3 \cos ax = a^3 \operatorname{sen}\left(ax + 3\frac{1}{2}\pi\right)$$

$$y^{(4)} = a^4 \operatorname{sen} ax = a^4 \operatorname{sen}\left(ax + 4\frac{1}{2}\pi\right)$$

. . . .

$$y^{(n-1)} = a^{n-1} \operatorname{sen}\left(ax + (n-1)\frac{1}{2}\pi\right)$$

$$y^{(n)} = a^n \cos\left(ax + (n-1)\frac{1}{2}\pi\right) = a^n \operatorname{sen}\left(ax + (n-1)\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$= a^n \operatorname{sen}\left(ax + n\frac{1}{2}\pi\right).$$

7. Verificar que la derivada enésima de

$$y = \cos ax$$

es

$$y^{(n)} = a^n \cos\left(ax + n\frac{1}{2}\pi\right).$$

8. Idem de

$$y = \ln(1 + x)$$

es

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{(1+x)^n}.$$

9. Idem de

$$y = \frac{1}{x}$$

es

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

10. Idem de

$$y = \frac{1}{a + bx}$$

es

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n b^n \cdot n!}{(a+bx)^{n+1}}.$$

2. DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

Definiremos como diferencial de la función $y = f(x)$, y lo designaremos con dy, al producto de la derivada y' por el incremento Δx de la variable.

En símbolos,

$$dy = y' \Delta x.$$

Puesto que la derivada y' mide la tangente trigonométrica del ángulo φ que forma la recta tangente con el semieje positivo de las x, resulta, con las notaciones de la figura 1,

$$y' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{SR}{PR} = \frac{SR}{\Delta x}, \text{ o sea, } SR = y' \Delta x.$$

Por consiguiente, SR es la diferencial de la función.

Como se ve en las 3 figuras, la diferencial SR puede ser mayor, igual o menor que el incremento de la función $QR = \Delta y$. Sin embargo, es fácil demostrar que cuando $\Delta x \to 0$, dy y Δy son 2 infinitésimos equivalentes, es decir que su cociente tiende a la unidad.

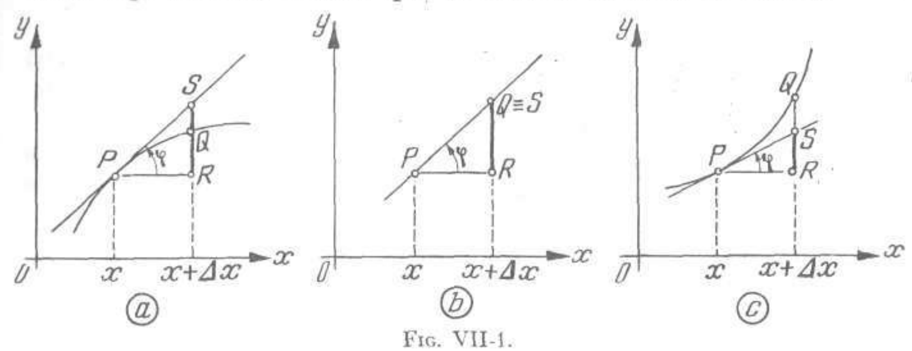


FIG. VII-1.

En efecto, siendo $dy = y'\Delta x$ resulta

$$\frac{dy}{\Delta y} = \frac{y'\Delta x}{\Delta y} = y' : \frac{\Delta y}{\Delta x} \to y' : y' = 1.$$

EXPRESIÓN DE LA DERIVADA COMO COCIENTE DE DIFERENCIALES: Puesto que es, por definición, $dy = y'\Delta x$, resulta, por ejemplo,

$$\begin{aligned} d(\operatorname{sen} x) &= \cos x \cdot \Delta x, \\ d(x^3) &= 3x^2 \cdot \Delta x, \\ d(x) &= 1 \cdot \Delta x = \Delta x. \end{aligned}$$

Esta última *identidad* nos permite reemplazar en la definición de diferencial, Δx por dx, con lo que resulta

$$dy = y'\,dx, \text{ o sea, } y' = \frac{dy}{dx}.$$

Esta notación de la derivada, debida a LEIBNIZ, es extremadamente útil y susceptible de generalización.

INVARIANCIA DE LA DIFERENCIAL: Hemos visto que es $dy = y'dx$ para $y = f(x)$, donde x es la variable independiente e y es la función. Pero si x no es variable independiente sino función de otra variable z, por ejemplo, la expresión anterior sigue siendo válida.

Así, de $y = x^2$ deducimos $dy = 2x\,dx$. Pero si $x = \operatorname{sen} z$, resulta $y = \operatorname{sen}^2 z$ y la diferencial es

$$dy = 2 \operatorname{sen} z \cdot \cos z\, dz,$$

que se puede escribir, como antes,

$$dy = 2x \cdot dx.$$

En definitiva, la diferencial $dy = f'(x)dx$ es *invariante* (es decir, conserva su forma) cuando la variable x es una función de otra variable z: $x = g(z)$, con tal de reemplazar dx por $g'(z)dz$.

3. DERIVACION DE FUNCIONES DADAS IMPLICITAMENTE

Cuando las variables x e y están vinculadas por la relación

$$F(x, y) = 0,$$

bajo ciertas condiciones (que estudiaremos en el segundo volumen) resulta y definida en función de x y el conjunto de puntos x e y definen una curva.

Para calcular la pendiente de esta curva es necesario conocer la derivada de y respecto de x. Aplicando *formalmente* las reglas de diferenciación y formando el cociente $\frac{dy}{dx}$ se obtiene la derivada buscada. (La justificación de este procedimiento exige el estudio de las diferenciales de funciones de 2 variables).

Veamos cómo se procede en algunos ejemplos:

1°) Trazar la recta tangente a la circunferencia definida por la relación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

en el punto $P(x_0, y_0)$.

Diferenciando se tiene

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0,$$

puesto que r^2 es constante. Por lo tanto, resulta $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ y la pendiente en P será $-\frac{x_0}{y_0}$. La recta tangente en P es, entonces,

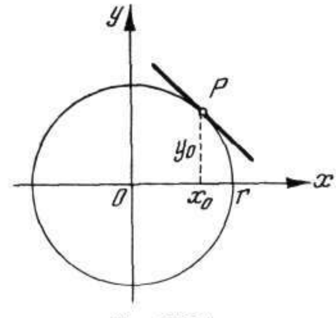


Fig. VII-2.

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0),$$

o sea,

$$y\,y_0 - y_0^2 = -x\,x_0 + x_0^2,$$

que se puede escribir

$$x\,x_0 + y\,y_0 = r^2$$

porque $x_0^2 + y_0^2 = r^2$, dado que las coordenadas de P satisfacen la ecuación de la circunferencia.

2°) Trazar la tangente a la elipse de semiejes a y b en $P(x_0, y_0)$.

Diferenciando la relación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ resulta

$$\frac{2x\,dx}{a^2} + \frac{2y\,dy}{b^2} = 0,$$

o sea,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_P = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}.$$

La recta tangente será

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x + x_0),$$

o sea,

$$\frac{x\,x_0}{a^2} - \frac{y\,y_0}{b^2} = 1,$$

pues $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

La recta normal a la elipse en el mismo punto P resulta, por consiguiente,

$$\frac{a^2x}{x_0} - \frac{b^2y}{y_0} = a^2 - b^2$$

3°) Calcular la derivada de y con respecto de x en la función definida por la relación

$$e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x = 1,$$

que se satisface en el punto $O(0, 0)$.

Diferenciando resulta

$$e^x \operatorname{sen} y\, dx + e^x \cos y\, dy + e^y \cos x\, dy - e^y \operatorname{sen} x\, dx = 0,$$

o sea,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^y \operatorname{sen} x - e^x \operatorname{sen} y}{e^x \cos y + e^y \cos x}.$$

La recta tangente en el origen resulta $y = 0$, pues es $y' = 0$.

Obsérvese que en este ejemplo, a diferencia de los anteriores, no es posible escribir y como función explícita de x o x como función explícita de y.

EJERCICIOS:

Calcular la derivada de las siguientes funciones implícitas:

1. $x^2 + xy = 1$. R: $y' = -\frac{2x + y}{x}$.

2. $y^2 = x^3$. R: $y' = \frac{3x^2}{2y}$.

3. $y^2 = x\sqrt{x^2 + 1}$. R: $y' = \frac{1}{2}(2x^2 + 1)(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}y^{-1}$.

4. $x^2 = \frac{x - y}{x + y}$. R: $y' = \frac{y}{x} - (x + y)^2$.

5. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. R $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

6. $2xy + y^2 = x + y$. R: $y' = \frac{1 - 2y}{2x + 2y - 1}$.

7. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. R: $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

8. $x^2 - 6xy + y^2 = 0$. R: $y' = -\frac{x - 3y}{y - 3x}$.

9. $2x^3 - 3xy + 2y^3 = 1$. R: $y' = -\frac{2x^2 - y}{2y^2 - x}$.

10. $x^2y^2 = x^2 + y^2$. R: $y' = -\frac{x(1 - y^2)}{y(1 - x^2)}$.

11. $x^3 + y^3 = x + y$. R: $y' = -\frac{1 - 3x^2}{1 - 3y^2}$.

12. $y^2 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. R: $y' = \frac{2x}{y\,(x^2 + 1)^2}$.

13. $(3x + 7)^5 = 2y^3$. R: $y' = \frac{5\,(3x + 7)^4}{2y^2}$.

14. $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$. R: $y' = -\frac{y^2}{x^2}$.

15. $y^2 = x^2 - x$. R: $y' = \frac{2x - 1}{2y}$.

16. $xy = \sqrt[3]{x^2 + 3}$. R: $y' = -\frac{x^2 + 9}{3x^2\,(x^2 + 3)^{\frac{2}{3}}}$.

17. $\operatorname{sen} 2x + \cos 2y = 2xy$. R: $y' = \frac{\cos 2x - y}{\operatorname{sen} 2y + x}$.

18. $x\,y^2 + x^2 y = 4$. R: $y' = -\frac{2xy + y^2}{2xy + x^2}$.

19. $e^x \operatorname{sen} y = e^{-y} \cos x$. R: $y' = -\frac{e^x \operatorname{sen} y + e^{-y} \operatorname{sen} x}{e^x \cos y + e^{-y} \cos x}$.

20. $\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \ln\,(x^2 + y^2)$. R: $y' = \frac{2x + y}{x - 2y}$.

21. $x\,y = \operatorname{tg}\,(x - y)$. R: $y' = \frac{1 - y\cos^2\,(x - y)}{1 + x\cos^2\,(x - y)}$.

22. $\operatorname{sen}\,(2x - 4y) = \cos\,(2x + 4y)$. R: $y' = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\,(2x - 4y) + \operatorname{sen}\,(2x + 4y)}{\cos\,(2x - 4y) - \operatorname{sen}\,(2x + 4y)}$.

23. $x \ln y + y \ln x = 1$. R: $y' = -\frac{y\,(y + x \ln y)}{x\,(x + y \ln x)}$.

24. $2x^2y^2 + x\,y^2 = 3$. R: $y' = -\frac{1}{2}\,\frac{y(4x + 1)}{x(2x + 1)}$.

25. $e^{x+y} - e^{x-y} = 2$. R: $y' = -\frac{e^{x+y} - e^{x-y}}{e^{x+y} + e^{x-y}} = -\frac{2}{e^{x+y} + e^{x-y}}$.

26. Demostrar que la recta tangente a la parábola de eje horizontal

$$y^2 = 2px$$

en el punto $P(x_0, y_0)$ es

$$y\,y_0 = p\,(x + x_0).$$

Solución: Diferenciando resulta $2y\,dy = 2p\,dx$ y la pendiente en P será $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$. La recta tangente en P es

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}\,(x - x_0),$$

que se puede escribir

$$y\,y_0 = p\,(x + x_0)$$

si se tiene en cuenta que es $y_0^2 = 2px_0$.

27. Ecuación de las rectas tangente t y normal n a la elipse

$$4x^2 + 9y^2 = 72$$

en el punto $P(3, 2)$.

R: t: $2x + 3y - 12 = 0$.
n: $3x - 2y - 5 = 0$.

28. Ecuación de las rectas tangente t y normal n a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto $P(x_0, y_0)$.

R: t: $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$.

n: $a^2 y_0 x + b^2 x_0 y = (a^2 + b^2) x_0 y_0$.

29. Trazar desde el punto $P(4, 5)$ las tangentes a la circunferencia de centro en el origen y radio 2.

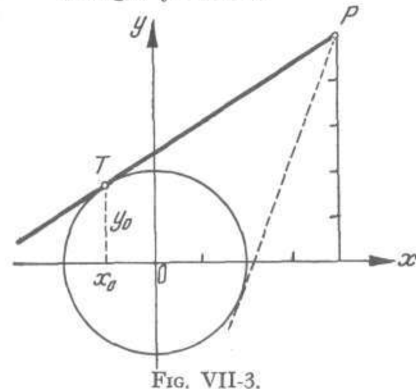


Fig. VII-3.

Solución: Desde P se pueden trazar 2 tangentes a la circunferencia, cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Si el punto de tangencia es $T(x_0, y_0)$, la ecuación de la tangente será

$$x x_0 + y y_0 = 4.$$

Como T pertenece a la circunferencia, será

$$x_0^2 + y_0^2 = 4, \qquad [1]$$

y como la tangente TP pasa por $P(4, 5)$, se verificará la relación

$$4x_0 + 5y_0 = 4. \qquad [2]$$

La eliminación de y_0 entre las dos últimas expresiones conduce a la ecuación

$$41x_0^2 - 32x_0 - 84 = 0,$$

cuyas raíces son, aproximadamente, 1,87 y $-$ 1,09.

Resultan entonces, reemplazando en [2] como valores de y_0, $-$ 0,696 y 1,672, y las tangentes son $1{,}87x - 0{,}696y = 4$; $-1{,}09x + 1{,}672y = 4$.

Determinar la ecuación de la recta tangente t y de la recta normal n de las siguientes curvas en los puntos indicados:

30. $y^2 + 2xy - x^2 = 4$ en $(4,2)$. R: t: $x - 3y + 2 = 0$.
n: $3x + y - 14 = 0$.

31. $x^2 - xy - y^2 = 2x$ en $(2,0)$. R: t: $x - y - 2 = 0$.
n: $x + y - 2 = 0$.

32. $\frac{x - y}{x - 2y} = 2$ en $(3,1)$. R: t: $x - 3y = 0$.
n: $3x + y - 10 = 0$.

33. Ecuaciones de las rectas normales a la hipérbola

$$x^2 - 9y^2 = 36,$$

paralelas a la recta

$$y = x + 3.$$

R: $x - y + 5\sqrt{2} = 0$; $x - y - 5\sqrt{2} = 0$.

34. Hallar las intersecciones A y B con los ejes coordenados de la normal en un punto cualquiera (x_0, y_0) de la hipérbola

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Probar que la diferencia d de sus cuadrados es constante.

R: $A(2x_0, 0)$; $B(0, 2y_0)$; $d = OA^2 - OB^2 = 4a^2$.

35. Hallar los puntos en que la tangente a la curva

$$x^2 + y^2 - 2y + 8x = 0$$

es horizontal o vertical.

R: La tangente es horizontal en los puntos de abscisa igual a -4 y vertical en los puntos de ordenada igual a 1.

36. Hallar el ángulo de intersección de la recta

$$y = x$$

con la curva

$$x^2 - 2xy - y^2 = -8.$$

Trazar las gráficas.
R: 45°.

37. Demostrar que la elipse

$$4x^2 + 9y^2 = 72$$

y la hipérbola

$$x^2 - y^2 = 5$$

son ortogonales.

38. Demostrar que para todos los valores de las constantes las curvas

$$x^2 - y^2 = a,$$
$$xy = b,$$

se cortan formando ángulos rectos, es decir, las curvas son ortogonales. Trazar las representaciones gráficas para $a = \pm 1$; ± 4; $b = \pm 1$; ± 2 (fig. 4). (Determínense las pendientes de las tangentes a ambas curvas en uno de los puntos de intersección (x_0, y_0) y obsérvese que verifican la condición de ortogonalidad $m_1 m_2 = -1$).

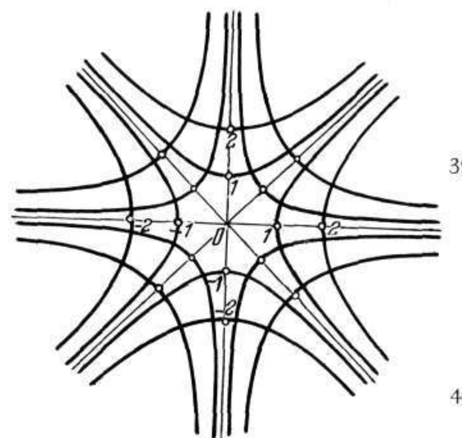


FIG. VII-4.

39. Probar que la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 8x$$

y la cisoide

$$(2 - x)y^2 = x^3$$

son ortogonales en el origen y forman ángulos de 45° en las demás intersecciones.

40. Demostrar que las rectas tangentes al folio de Descartes

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

en los puntos de intersección con la parábola

$$y^2 = 2x$$

son verticales.

(Determínense las intersecciones de ambas curvas y el valor de la derivada de la primera en dichos puntos).

41. Demostrar que la suma de los segmentos que intercepta sobre los ejes coordenados la tangente en un punto de la parábola

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

es constante e igual a a.

Solución: Diferenciando la función dada es

$$x^{-\frac{1}{2}}dx + y^{-\frac{1}{2}}dy = 0,$$

o sea, la derivada en un punto $P(x_0, y_0)$ es

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

La recta tangente en P será, pues,

$$y - y_0 = -\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{2}} (x - x_0)$$

o bien,

$$y_0^{\frac{1}{2}}x + x_0^{\frac{1}{2}}y = (x_0y_0)^{\frac{1}{2}}\left(x_0^{\frac{1}{2}} + y_0^{\frac{1}{2}}\right);$$

pero como el punto P pertenece a la curva, es

$$x_0^{\frac{1}{2}} + y_0^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}},$$

y resulta

$$y_0^{\frac{1}{2}}x + x_0^{\frac{1}{2}}y = (ax_0y_0)^{\frac{1}{2}}. \qquad [1]$$

La intersección de la recta tangente con el eje x se obtiene anulando y en la expresión [1] y resulta el punto A de abscisa $(ax_0)^{\frac{1}{2}}$; análogamente, la intersección con el eje y da el punto B de ordenada $(ay_0)^{\frac{1}{2}}$. La suma de los dos valores OA y OB es

$$OA + OB = (ax_0)^{\frac{1}{2}} + (ay_0)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(x_0^{\frac{1}{2}} + y_0^{\frac{1}{2}}\right) = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a.$$

42. Demostrar que el ángulo formado por la tangente en un punto cualquiera, P, de la curva

$$\ln (x^2 + y^2) = K \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

y la recta que une P con el origen es el mismo en todos sus puntos.

Solución: La recta tangente en un punto $P(x_0, y_0)$ de la curva dada tiene la pendiente

$$m_1 = \frac{2x_0 + Ky_0}{Kx_0 - 2y_0}.$$

La recta que une P con el origen tiene pendiente $m_2 = \frac{y_0}{x_0}$.

El ángulo α de ambas rectas es

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{K},$$

es decir, no depende del punto P elegido.

4. DIFERENCIALES SUCESIVAS

Así como a partir de la función derivada se obtienen las derivadas segunda, tercera, etc., también considerando la diferencial

$$dy = y'\Delta x = y'\,dx$$

como una función de x, y, Δx, podremos definir la *diferencial segunda* como diferencial de la diferencial primera:

$$d^2y = d[dy].$$

Si adoptamos ahora el *mismo incremento* dx de la variable, resultará, indicando con un acento la derivada respecto de x,

$$d^2y = d[dy] = [dy]'dx = [y'dx]'dx\ (*) = [y']'dx \cdot dx = y''(dx)^2,$$

con lo cual resulta $y'' = \dfrac{d^2y}{(dx)^2}$.

Generalmente se escribe

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

(que se lee "diferencial segunda de y respecto de x dos veces), advirtiendo que dx^2 significa el cuadrado de dx y no la diferencial de x^2, que, como se sabe, sería igual a $2x \cdot dx$.

En la misma forma resulta

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$$

(diferencial tercera de y respecto de x tres veces) y, en general,

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

EJERCICIOS:

Calcular las derivadas primera y segunda de las funciones

1. $x^3 + y^3 = 1$. R: $y' = -\dfrac{x^2}{y^2}$; $y'' = -\dfrac{2x}{y^5}$.

2. $y^2 = 8x$. R: $y' = \dfrac{4}{y}$; $y'' = -\dfrac{16}{y^3}$

3. $y^2 - 3xy = 9$. R: $y' = \dfrac{3y}{2y - 3x}$; $y'' = \dfrac{18y\,(y - 3x)}{(2y - 3x)^3}$.

4. $\dfrac{x^m}{a^m} + \dfrac{y^m}{b^m} = 1$. R: $y' = -\dfrac{b^m x^{m-1}}{a^m y^{m-1}}$; $y'' = (1 - m)\dfrac{b^{2m} x^{m-2}}{a^m y^{2m-1}}$.

Determinar las derivadas segundas de las siguientes funciones:

5. $x^2 + y^2 = 1$. R: $y'' = -\dfrac{1}{y^3}$.

6. $x^2 - y^2 = 1$. R: $y'' = -\dfrac{1}{y^3}$.

7. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$. R: $y'' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$.

(*) Téngase en cuenta al derivar el producto entre corchetes que dx es constante.

8. $x^4 + 2x^2y^2 = a^4$. R: $y'' = \dfrac{2y^4 - x^2y^2 - x^4}{x^2y^3}$.

9. Hallar las derivadas primera, segunda y tercera de la función definida implícitamente por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solución: Diferenciando la expresión dada queda

$$\frac{2x\,dx}{a^2} + \frac{2y\,dy}{b^2} = 0.$$

La derivada primera es, entonces,

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Derivando esta expresión, en la cual es y función de x, se tiene

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2a^2y - b^2xa^2\dfrac{dy}{dx}}{a^4y^2} = -\frac{b^2a^2\left(y + \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x^2}{y}\right)}{a^4y^2} =$$

$$= -\frac{b^2\,(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^2a^2b^2}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

pues $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, de acuerdo a la ecuación de la curva.

Derivando esta última expresión se tiene

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3b^4}{a^2}\frac{y'}{y^4} = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}.$$

5. CALCULO DE ERRORES MEDIANTE DIFERENCIALES

Si 2 magnitudes x e y están vinculadas por la relación $y = f(x)$, a una variación Δx corresponde una variación Δy. Si Δx es el error cometido en la medición de x, Δy será el error cometido en $f(x)$. En lugar de calcular

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

resulta mucho más cómodo calcular dy, que, si bien no es idéntico a Δy, es su infinitésimo equivalente, como ya hemos visto (pág. 173).

EJEMPLOS:

1°) La medida del diámetro de un círculo es $D = 13{,}8$ cm, con un error por defecto menor que 0,1 cm. Calcular el error cometido en la determinación de la superficie $S = \frac{1}{4}\pi D^2$.

El cálculo exacto del error ΔS será

$$\Delta S = \frac{1}{4}\pi\,(13{,}9^2 - 13{,}8^2) = 2{,}17.$$

El cálculo mediante la diferencial es

$$dS = \frac{1}{4}\pi \cdot 2D \cdot dD = \frac{1}{2}\pi \cdot 13{,}8 \cdot 0{,}1 = 2{,}16.$$

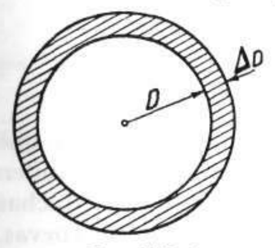


FIG. VII-5.

2°) Como la diferencial de $y = \sqrt{x}$ es $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$, la raíz cuadrada de $(x+dx)$

será, *aproximadamente*, $y + dy = \sqrt{x} + \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$. Eligiendo como valor x un cuadrado perfecto se tiene una fórmula de aplicación muy práctica.
Así, $\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1}$, con $x = 3^2$, $dx = 1$, da $\sqrt{10} \sim 3 + \dfrac{1}{2 \times 3} = 3{,}166\ldots$.
Análogamente, $\sqrt{220} = \sqrt{15^2 - 5}$, con $x = 15^2$, $dx = -5$, da $\sqrt{220} \sim 15 - \dfrac{5}{2 \times 15} = 14{,}834$.
Los valores exactos son $3{,}1623\ldots$ y $14{,}832\ldots$.

El error relativo, o sea, el cociente entre el error absoluto y el valor exacto, será

$$\frac{dy}{y} = d(\ln y)$$

y el error porcentual será $100\, d(\ln y)$.

EJERCICIOS:

1. Demostrar que el *error relativo* cometido en la determinación del área de un círculo es igual al doble del error relativo del radio, supuesto que el valor de π sea prácticamente exacto.
2. La resistencia R en un puente de hilos se determina mediante la fórmula
$$R = \frac{W(l - x)}{x},$$
siendo W una resistencia conocida y x la distancia sobre el hilo de longitud l para la cual el galvanómetro no acusa paso de corriente.

   Mostrar que el error relativo será mínimo cuando sea $x = \dfrac{1}{2}l$.

   Solución: Siendo $\dfrac{dR}{R} = -\dfrac{l}{x(l-x)}\,dx$, su mínimo se obtendrá cuando $x(l-x) = \dfrac{1}{4}l^2 - \left(x - \dfrac{1}{2}l\right)^2$ sea máximo, lo cual ocurre cuando es $x - \dfrac{1}{2}l = 0$.
3. La intensidad de la corriente i de un galvanómetro de tangentes shuntado está dada por $i = k \operatorname{tg} \alpha$, siendo k una constante.
Mostrar que el error relativo en la determinación de i es mínimo si es $\alpha = 45°$.

   Basta observar que se puede escribir $\dfrac{di}{i} = \dfrac{2d\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha}$.

6. DERIVADAS DE FUNCIONES DADAS PARAMETRICAMENTE

Hemos visto que un par de funciones $x = g(t)$, $y = h(t)$, que hacen corresponder a cada valor de t un valor x y otro y, permiten establecer una relación entre x e y, es decir, una función. Muchas veces ésta es la forma más conveniente para ciertos tipos de curvas. Tal es el caso de la cicloide, que es la curva descripta por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre una recta fija.

Con las notaciones de la figura, la definición de la cicloide exige que el segmento $\overline{OR}$ sea igual al arco $\widehat{PR}$. Elegimos como parámetro el ángulo $PQR = t$ (medido en radianes), que forma el radio correspondiente al punto fijo sobre la circunferencia P, con el radio QR perpendicular a la recta fija.

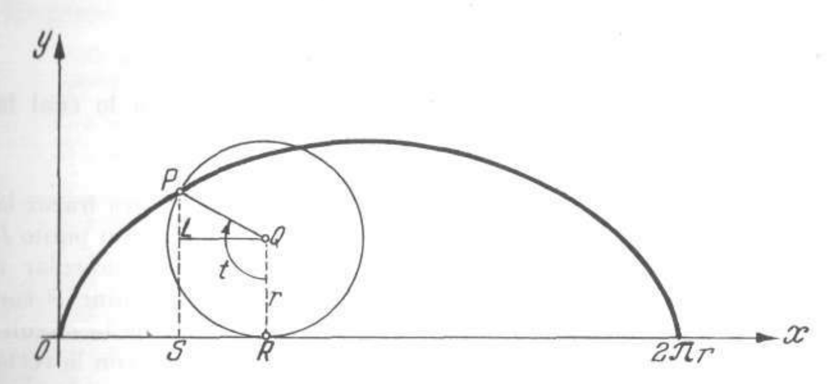


Fig. VII-6. — Cicloide.

Las coordenadas x, y del punto P son

$$x = \overline{OS} = \overline{OR} - \overline{SR} = \overline{OR} - \overline{LQ} = \widehat{PR} - \overline{LQ} =$$

$$= rt - r\cos\left(t - \frac{1}{2}\pi\right) = rt - r\,\mathrm{sen}\,t = r\,(t - \mathrm{sen}\,t),$$

$$y = \overline{PS} = \overline{LS} + \overline{PL} = \overline{QR} + \overline{PL} = r + r\,\mathrm{sen}\left(t - \frac{1}{2}\pi\right) =$$

$$= r - r\cos t = r\,(1 - \cos t).$$

Si se desea hallar la derivada de y respecto de x, en lugar de eliminar el parámetro t entre estas 2 ecuaciones —lo cual originaría una expresión bastante complicada—, lo mejor es razonar en la siguiente forma:

Siendo $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, las diferenciales dx, dy se pueden calcular a partir de las relaciones $x = g(t)$, $y = h(t)$:

$$dx = g'(t)dt, \qquad dy = h'(t)dt,$$

con lo cual resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h'(t)\,dt}{g'(t)\,dt} = \frac{h'(t)}{g'(t)} = \frac{y_t}{x'_t}.$$

En el caso de la cicloide se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r \operatorname{sen} t}{r\,(1 - \cos t)} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t \cos \frac{1}{2}t}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t} = \frac{\cos \frac{1}{2}t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}t} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}t =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}t\right).$$

Puesto que es $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$, resulta $\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, para lo cual la tangente debe ser perpendicular a la recta PR.

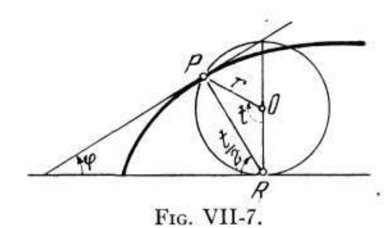


FIG. VII-7.

REGLA PRÁCTICA: Para trazar la tangente a la cicloide en un punto P hay que trazar la perpendicular a la recta que resulta de unir P con el punto de contacto R de la circunferencia correspondiente con la recta base.

DERIVADAS SEGUNDAS: La derivada primera $\frac{dy}{dx}$ de una función dada paramétricamente mediante las relaciones

$$x = g(t). \qquad y = h(t)$$

es una función que, vuelta a derivar respecto de x, dará la derivada segunda.

Designando con acentos las derivadas respecto del parámetro t resulta, en virtud de la regla de derivación de función de función,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\frac{dt}{dx}.$$

Como $\frac{dt}{dx} = 1 : \frac{dx}{dt} = \frac{1}{x'}$, y de acuerdo a la regla de derivación de un cociente es $\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{y''x' - y'x''}{x'^2}$, se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''x' - y'x''}{x'^3}$$

o, usando la notación de los determinantes,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{x'^3}.$$

En el caso de la cicloide es

$$x = r(t - \operatorname{sen} t), \quad x' = r(1 - \cos t), \quad x'' = r \operatorname{sen} t;$$
$$y = r(1 - \cos t), \quad y' = r \operatorname{sen} t, \quad y'' = r \cos t;$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''x' - y'x''}{x'^3} = \frac{r^2[\cos t - (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)]}{r^3(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{r(1 - \cos t)^2}.$$

Ejercicios:

Calcular las derivadas primera y segunda de las siguientes funciones, dadas paramétricamente:

1. $\begin{cases} x = 3t + 5; \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$ R: $y' = \frac{2}{3}t; y'' = \frac{2}{9}$.

2. $\begin{cases} x = 2t^3; \\ y = 4t + 1. \end{cases}$ R: $y' = \frac{2}{3}t^{-2}$; $y'' = -\frac{2}{9}t^{-5}$.

3. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3; \\ y = t^2. \end{cases}$ R: $y' = 2t^{-1}$; $y'' = -2t^{-4}$.

4. $\begin{cases} x = 3t; \\ y = \frac{1}{2}t^2. \end{cases}$ R: $y' = \frac{1}{3}t$; $y'' = \frac{1}{9}$.

5. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^2; \\ y = 2t^3. \end{cases}$ R: $y' = 9t$; $y'' = \frac{27}{2}t^{-1}$.

6. $\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \operatorname{sen} t. \end{cases}$ R: $y' = -\frac{b}{a}\operatorname{cotg} t$; $y'' = -\frac{b}{a^2}\operatorname{cosec}^3 t$.

7. $\begin{cases} x = \operatorname{sen} 2t; \\ y = \cos t; \end{cases}$ para $t = \frac{1}{6}\pi$. R: $y' = -\frac{1}{2}$; $y'' = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

8. $\begin{cases} x = \operatorname{sen} 2t; \\ y = \operatorname{sen}^2 t. \end{cases}$ R: $y' = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2t$; $y'' = \frac{1}{2}\sec^3 2t$.

9. $\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = \operatorname{sen}^2 t. \end{cases}$ R: $y' = -\frac{1}{2}$; $y'' = 0$.

10. $\begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t; \\ y = 3 \sec t. \end{cases}$ R: $y' = \frac{3}{2}\operatorname{sen} t$; $y'' = \frac{3}{4}\cos^3 t$.

11. $\begin{cases} x = \sec t; \\ y = \cos t \end{cases}$ R: $y' = -\cos^2 t$; $y'' = 2\cos^3 t$.

12. $\begin{cases} x = e^{2t}; \\ y = e^t. \end{cases}$ R: $y' = \frac{1}{2}e^{-t}$; $y'' = -\frac{1}{4}e^{-3t}$.

13. $\begin{cases} x = a \cos^n t; \\ y = b \operatorname{sen}^n t. \end{cases}$ R: $y' = -\frac{b}{a}\operatorname{tg}^{n-2} t$; $y'' = \frac{n-2}{n}\frac{b}{a^2}\operatorname{tg}^{n-4} t \sec^{n+2} t$.

14. $\begin{cases} x = t + \frac{1}{t}; \\ y = t - \frac{1}{t}. \end{cases}$ R: $y' = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$; $y'' = -4t^3(t^2 - 1)^{-3}$.

Determinar la ecuación de la recta tangente t y normal n de las siguientes curvas, en los puntos indicados:

15. $\begin{cases} x = t^2; \\ y = t + 1; \end{cases}$ $t = 2$. R: t: $x - 4y + 8 = 0$. n: $4x + y - 19 = 0$.

16. $\begin{cases} x = e^t; \\ y = 2e^{-t}; \end{cases}$ $t = 0$. R: t: $2x + y - 4 = 0$. n: $x - 2y + 3 = 0$.

17. $\begin{cases} x = \dfrac{2}{t}; \\ y = t; \end{cases}$ $t = 1$. R: t: $x + 2y - 4 = 0$. n: $2x - y - 3 = 0$.

18. $\begin{cases} x = \sqrt{2t^2 + 1}; \\ y = (2t + 1)^2; \end{cases}$ $t = 2$. R: t: $15x - y - 20 = 0$. n: $x + 15y - 372 = 0$.

19. $\begin{cases} x = \dfrac{t-1}{t+1}; \\ y = \dfrac{t+1}{t-1}; \end{cases}$ $t = 2$. R: t: $9x + y - 6 = 0$. n: $3x - 27y + 80 = 0$.

20. $\begin{cases} x = \operatorname{sen} 2t; \\ y = \cos t; \end{cases}$ $t = \dfrac{\pi}{3}$. R: t: $\sqrt{3}x - 2y - \dfrac{1}{2} = 0$. n: $2x + \sqrt{3}y - \dfrac{1}{2}3\sqrt{3} = 0$.

21. $\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \operatorname{sen} t; \end{cases}$ $t = 30°$. R: t: $\sqrt{3}bx + ay - 2ab = 0$. n: $\dfrac{1}{3}\sqrt{3}ax - by + \dfrac{1}{2}(b^2 - a^2) = 0$.

22. Hallar la subtangente, subnormal, tangente y normal de la curva

$$\begin{cases} x = 2(\cos t + t \operatorname{sen} t), \\ y = 2(\operatorname{sen} t - t \cos t), \end{cases}$$

en un punto cualquiera.

Solución: $y' = \operatorname{tg} t$.

$$S_t = \frac{y}{y'} = \frac{y}{\operatorname{tg} t} = y \operatorname{cotg} t.$$

$$S_n = y \cdot y' = y \operatorname{tg} t.$$

$$T = \sqrt{S_t^2 + y^2} = y \operatorname{cosec} t.$$

$$N = \sqrt{S_n^2 + y^2} = y \sec t.$$

Hallar la subtangente, subnormal, tangente y normal de las siguientes curvas:

23. $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t; \\ y = 8 \operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$ R: $S_t = -y \operatorname{cotg} t$; $S_n = -y \operatorname{tg} t$; $T = y \operatorname{cosec} t$; $N = y \sec t$.

24. $\begin{cases} x = r \cos t; \\ y = r \operatorname{sen} t. \end{cases}$ R: $S_t = -y \operatorname{tg} t$; $S_n = -y \operatorname{cotg} t$; $T = r \operatorname{tg} t$; $N = r$.

25. $\begin{cases} x = \dfrac{2 \cos t}{t}; \\ y = \dfrac{2 \operatorname{sen} t}{t}. \end{cases}$ en $t = \dfrac{1}{2}\pi$. R: $S_t = 2$; $S_n = 8\pi^{-2}$; $T = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{4 + \pi^2}$; $N = \dfrac{4}{\pi^2}\sqrt{4 + \pi^2}$.

26. Demostrar que la derivada tercera de una función expresada en forma paramétrica está dada por la fórmula

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{(y'''x' - y'x''')x' - 3x''(y''x' - y'x'')}{x'^5},$$

donde los acentos indican derivadas respecto del parámetro.

Generalización de la cicloide: Si en lugar de considerar un punto fijo situado sobre una *circunferencia* de radio r, que rueda sin patinar, suponemos que el punto fijo se encuentra en el plano del círculo y a una distancia d del centro, resultará una *cicloide alargada, ordinaria* o *acortada*, según que sea $d > r$; $d = r$; $d < r$.

Razonando como lo hemos hecho para la cicloide ordinaria resulta

$$x = rt - d \operatorname{sen} t, \quad y = r - d \cos t.$$

Demuéstrese que en los 3 casos el trazado de la tangente y de la normal a la curva se hace con el procedimiento que hemos señalado en el texto para el caso de la cicloide ordinaria.

Epicicloides e hipocicloides: Si se considera en la definición de cicloide que el círculo móvil gira sobre una circunferencia en lugar de hacerlo sobre una recta, se tendrá —en el caso que las circunferencias sean tangentes exteriores— una epicicloide, y en el caso de tratarse de tangentes interiores, una hipocicloide.

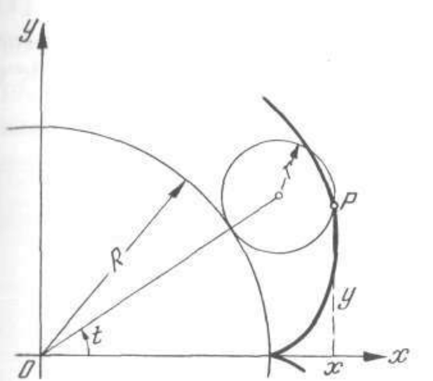


Fig. VII-8. — Epicicloide.

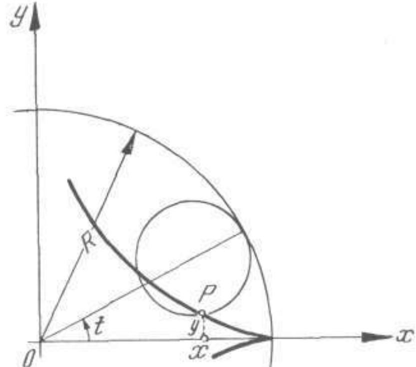


Fig. VII-9. — Hipocicloide.

Si R es el radio de la circunferencia fija, r el de la móvil y d la distancia del punto que engendra la curva al centro de la circunferencia móvil, resultan las ecuaciones paramétricas

a) Para las epicicloides:

$$\begin{cases} x = (R + r)\cos t - d \cos\left(\dfrac{R + r}{r} t\right); \\ y = (R + r)\operatorname{sen} t - d \operatorname{sen}\left(\dfrac{R + r}{r} t\right). \end{cases}$$

b) Para las hipocicloides:

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos t + d\cos\left(\dfrac{R-r}{r}t\right); \\ y = (R-r)\operatorname{sen} t - d\operatorname{sen}\left(\dfrac{R-r}{r}t\right). \end{cases}$$

Demuéstrese que en todos los casos el trazado de la normal se hace uniendo el punto móvil con el punto de contacto de las dos circunferencias.

Verificar que en el caso de las hipocicloides con

a) $R = 2r$ resulta una elipse.

b) $R = 4r$; $d = r$, resulta una astroide:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \text{ con } a = 4r.$$

7. TANGENTE A LAS CURVAS DADAS EN COORDENADAS POLARES

Una curva dada en coordenadas polares está expresada por

$$\varrho = \varrho(\theta),$$

donde θ es el argumento y ϱ es el radio vector. Como entre las coordenadas cartesianas y las polares existen las relaciones

$$x = \varrho\cos\theta, \qquad y = \varrho\operatorname{sen}\theta, \qquad [1]$$

se puede considerar que la curva está dada en forma paramétrica con θ como parámetro, pues a cada valor de θ corresponde un valor de ϱ y a cada par (θ, ϱ) le corresponde un par de valores (x, y).

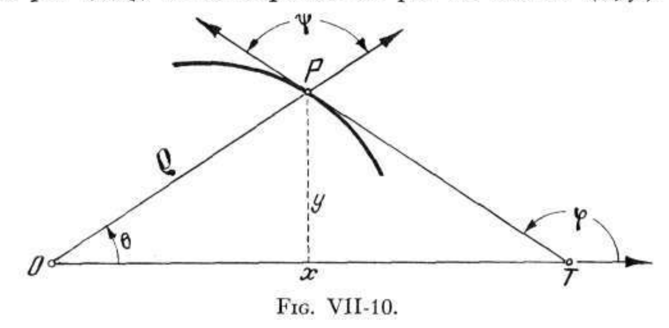


Fig. VII-10.

Supongamos que la función $\varrho(\theta)$ sea derivable. Hallaremos la pendiente de la tangente PT considerando las ecuaciones paramétricas [1]:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\varrho\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\dfrac{d\varrho}{d\theta}}{-\varrho\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\dfrac{d\varrho}{d\theta}}. \qquad [2]$$

El ángulo ψ, que forma el radio vector ϱ con la tangente trazada en el sentido de θ creciente, se calcula fácilmente, pues $\psi = \varphi - \theta$, dado que φ es un ángulo exterior del triángulo PTO. Entonces

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\theta}.$$

Si se reemplaza $\operatorname{tg}\varphi$ por su valor [2], $\operatorname{tg}\theta$ por $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y se hacen las simplificaciones correspondientes, resulta $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\varrho}{\varrho'}$, designando con ϱ' la derivada de ϱ respecto de θ.

Segmentos polares notables: Si por el origen O se traza NT perpendicular al radio vector $\varrho = OP$, quedan determinados, en la intersección con la tangente PT y la normal PN, los segmentos OT y ON, que se llaman, respectivamente, *subtangente polar* S'_t y *subnormal polar* S'_n.

De la figura resulta $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{S'_t}{\varrho}$; $\operatorname{cotg}\psi = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\psi} = \dfrac{S'_n}{\varrho}$, y recordando que es $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\varrho}{\varrho'}$ resulta

$$S'_t = \frac{\varrho^2}{\varrho'}, \qquad S'_n = \varrho'.$$

La tangente T' será el segmento PT, y la normal N', el segmento PN. De acuerdo a las fórmulas anteriores resulta

$$T' = \sqrt{OP^2 + OT^2} =$$

$$= \sqrt{\varrho^2 + \frac{\varrho^4}{\varrho'^2}} = \frac{\varrho}{\varrho'}\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2},$$

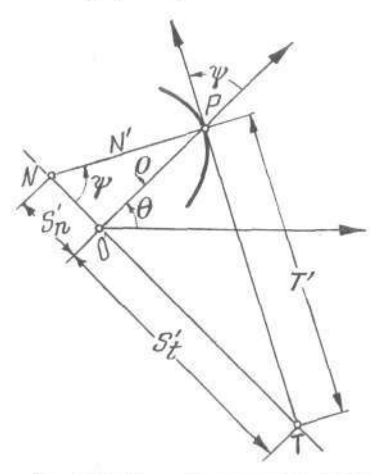


Fig. VII-11. — Segmentos polares.

$$N' = \sqrt{OP^2 + ON^2} = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}.$$

Observación:

Nótese que en la figura 10 habrían resultado S'_t y S'_n con orientaciones opuestas a las de la figura 11. En general, el signo de estos segmentos es el mismo que el de $\operatorname{tg}\psi$.

Ejemplo:

En la espiral de Arquímedes

$$\varrho = a\theta$$

resulta $\varrho' = a$ y, por consiguiente,

$$S'_t = \frac{\varrho^2}{\varrho'} = \frac{a^2\theta^2}{a} = a\theta^2 = \varrho\theta; \qquad S'_n = \varrho' = a = \text{constante.}$$

$$T' = \frac{\varrho}{\varrho'}\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} = a\theta\sqrt{1+\theta^2}; \quad N' = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} = a\sqrt{1+\theta^2}.$$

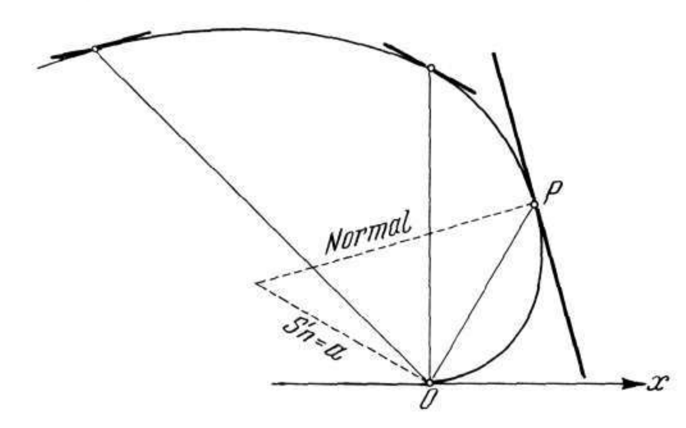


Fig. VII-12.

Al ser $S'_n = a$ se tiene un procedimiento práctico para trazar la normal y la tangente en cualquier punto P de esta espiral. En efecto, sobre la perpendicular al radio vector OP se lleva el valor a, determinando un punto que unido a P constituye la *normal* en P. La perpendicular a esta recta es la *tangente* en P.

En la figura 12 se han trazado con este procedimiento las tangentes en otros dos puntos.

Nótese que en esta curva resulta $\operatorname{tg}\psi = \theta$.

Nota histórica: Arquímedes (287 a 212 antes de Cristo) el más grande genio fisicomatemático de la antigüedad, escribió un tratado sobre las *espirales*. Allí entre otros muchos teoremas notables demuestra (proposición 20) que la subtangente polar en un punto de la espiral tiene igual longitud que un arco de circunferencia de radio ϱ y amplitud θ, es decir es $S'_t = \varrho\theta$.

Este resultado puede considerarse como el primer teorema de lo que actualmente constituye el *cálculo diferencial*.

Ejercicios:

Hallar el valor de ψ en función de θ para todo punto de las siguientes curvas:

1. $\varrho = a \operatorname{sen}\theta$. R: $\psi = \theta$.
2. $\varrho = a \operatorname{sen}\theta$. R: $\psi = \frac{1}{2}\pi - \theta$.
3. $\varrho = a \operatorname{cosec}\theta$. R: $\psi = \pi - \theta$.
4. $\varrho^2 = a^2\cos 2\theta$. R: $\psi = \frac{1}{2}\pi + 2\theta$.
5. $\varrho = \dfrac{a}{1-\cos\theta}$. R: $\psi = \pi - \frac{1}{2}\theta$.
6. $\varrho = a \operatorname{sen}^n \frac{\theta}{\cdot}$. R: $\psi = \frac{\theta}{\cdot}$.

7. $\varrho = a \operatorname{cosec}^n \frac{\theta}{n}$. R: $\psi = \pi - \frac{\theta}{n}$.

8. $\varrho = 2a \cos \theta$. R: $\psi = \theta + \frac{1}{2}\pi$.

Hallar la expresión de $\operatorname{tg} \psi$ en función de θ para todo punto de las siguientes curvas y calcular ψ para el valor indicado de θ.

9. $\varrho = a \operatorname{sen} 3\theta,\ \theta = \frac{1}{9}\pi$. R: $\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3\theta$.

10. $\varrho = a \operatorname{sen} 4\theta,\ \theta = \frac{1}{16}\pi$. R: $\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{4} \operatorname{tg} 4\theta$.

11. $\varrho = 2 + \cos 2\theta,\ \theta = \frac{1}{2}\pi$. R: $\psi = \frac{1}{2}\pi$.

12. $\varrho = 2 + \operatorname{sen} \theta,\ \theta = 0$. R: $\operatorname{tg} \psi = 2$.

13. $\varrho = 2\theta,\ \theta = \pi$. R: $\operatorname{tg} \psi = \pi$.

14. $\varrho = -\frac{1}{\theta},\ \theta = \pi$. R: $\operatorname{tg} \psi = -\pi$.

Hallar la expresión de φ en función de θ para las siguientes curvas:

15. $\varrho = a \operatorname{sen} \theta$. R: $\varphi = 2\theta$.

16. $\varrho = a \sec \theta$. R: $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

17. $\varrho = a \operatorname{cosec} \theta$. R: $\varphi = 0$.

18. $\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$. R: $\varphi = 3\theta + \frac{1}{2}\pi$.

19. $\varrho = \frac{a}{1 - \cos \theta}$. R: $\varphi = \frac{1}{2}\theta$.

20. $\varrho = a \operatorname{sen}^n \frac{\theta}{n}$. R: $\varphi = \frac{(n+1)\theta}{n}$.

21. $\varrho = a \operatorname{cosec}^n \frac{\theta}{n}$. R: $\varphi = \frac{(n-1)\theta}{n}$.

22. $\varrho = 2a \cos \theta$. R: $\varphi = 2\theta + \frac{1}{2}\pi$.

(Obsérvese que los ejercicios precedentes pueden verificarse teniendo en cuenta la relación $\psi = \varphi - \theta$ y los resultados hallados para los ejercicios 1 a 8).

23. Demostrar que para la curva

$$\varrho = 2a(1 - \cos \theta)$$

se verifica que $2\psi = \theta$ y $\varphi = \frac{3}{2}\theta$.

24. Verificar que en la parábola

$$\varrho = a \sec^2 \frac{1}{2}\theta$$

se cumple la relación $\psi + \varphi = \pi$.

Hallar la pendiente de las siguientes curvas en los puntos indicados:

25. $\varrho = a(1 - \cos \theta),\ \theta = \frac{1}{2}$ R: -1.

26. $\varrho = a \sec^2 \theta,\ \theta = \frac{1}{4}\pi$. R: 3.

27. $\varrho = a\theta,\ \theta = \frac{1}{2}\pi.$ R: $-\frac{2}{\pi}$.

28. $\varrho = \frac{a}{\theta},\ \theta = \frac{1}{2}\pi.$ R: $\frac{2}{\pi}$.

29. $\varrho = e^{\theta},\ \theta = 0.$ R: 1.

30. Demostrar que en los puntos de la curva donde la recta tangente es horizontal se verifica la relación

$$\varrho \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \frac{d\varrho}{d\theta} = 0.$$

(Aplíquese la relación [2] de pág. 188).

31. Análogamente, en los puntos donde la tangente es vertical demuéstrese que

$$\varrho \operatorname{sen}\theta - \cos\theta \frac{d\varrho}{d\theta} = 0.$$

32. Determinar los puntos en que la tangente es horizontal en la curva

$$\varrho = \operatorname{sen} 2\theta.$$

R: 0°; 54°45′.

33. ¿En qué puntos de la curva

$$\varrho = \cos 2\theta.$$

es vertical la recta tangente?

R: 0°; 65°54′.

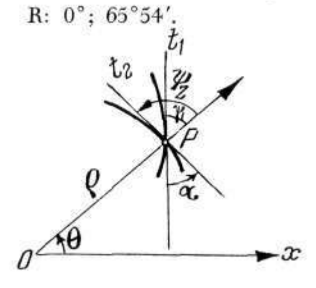


Fig. VII-13.

34. Demostrar que en la espiral hiperbólica

$$\varrho\theta = a$$

es $\psi = 135°$ cuando $\theta = 1$ radián y que $\psi \to 90°$ cuando la espiral se acerca asintóticamente al origen ($\varrho \to 0$).

35. Demostrar que el ángulo α determinado por la intersección de 2 curvas dadas en coordenadas polares está expresado por la fórmula

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\psi_2 - \operatorname{tg}\psi_1}{1 + \operatorname{tg}\psi_2 \operatorname{tg}\psi_1}.$$

Hallar el ángulo de intersección de los siguientes pares de curvas:

36. $\varrho = 6\cos\theta;\ \varrho = 2(1 + \cos\theta).$ R: 30°.

37. $\varrho = 4\cos\theta;\ \varrho = 4(1 - \cos\theta).$ R: 60°.

38. $\varrho\cos\theta = 6;\ \varrho = 1 + \cos\theta.$ R: 12°24′.

39. $\varrho \operatorname{sen}\theta = 2a;\ \varrho = a\sec^2\frac{1}{2}\theta.$ R: 45°.

40. $\varrho = 1 - \cos\theta;\ \varrho = 1 + \cos\theta.$ R: 90°.

41. $\varrho = a\cos\theta;\ \varrho = a\cos 2\theta.$ R: 0°; $\pm\frac{1}{4}\pi$; $\pm$ 45°51′.

Verificar que los siguientes pares de curvas son ortogonales:

42. $\varrho = 4\cos\theta;\ \varrho = 4\operatorname{sen}\theta.$

43. $\varrho = 4\operatorname{sen}\theta;\ \varrho = 2\operatorname{cosec}\theta.$

44. $\varrho = 4\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta;\ \varrho = \operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\theta.$

45. $\varrho = e^{\theta}$; $\varrho = e^{-\theta}$.

46. $\varrho = a \sec^2 \frac{1}{2}\theta$; $\varrho = b \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}\theta$.

47. $\varrho = \frac{1}{1 - \cos\theta}$; $\varrho = \frac{3}{1 + \cos\theta}$.

48. $\varrho^2 \cos 2\theta = a^2$; $\varrho^2 \operatorname{sen} 2\theta = b^2$.

49. $\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$; $\varrho = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \sec\theta$.

50. Determinar la subtangente, subnormal, tangente y normal polar de la espiral logarítmica

$$\varrho = a\, e^{m\theta} \quad (m > 0).$$

Verificar que esta curva corta al radio vector bajo un ángulo ψ constante.

R: $S'_t = \frac{\varrho}{m}$; $S'_n = m\varrho$; $T' = \frac{\varrho}{m}\sqrt{1 + m^2}$; $N' = \varrho\sqrt{1 + m^2}$;

$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{m} =$ constante.

51. Determinar la subtangente, subnormal, tangente y normal de la cardioide

$$\varrho = 2a\,(1 - \cos\theta).$$

R: $S'_t = \varrho \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$; $S'_n = 2a \operatorname{sen}\theta$; $T' = \varrho \sec\frac{1}{2}\theta$; $N' = \varrho \operatorname{cosec}\frac{1}{2}\theta$.

52. Idem para la espiral hiperbólica

$$\varrho = \frac{a}{\theta}.$$

R: $T' = -\sqrt{a^2 + \varrho^2}$; $N' = \frac{\varrho}{a}\sqrt{a^2 + \varrho^2}$; $S'_t = -a$; $S'_n = -\frac{\varrho^2}{a}$.

8. APLICACIONES FISICAS

El concepto de velocidad: Si un cuerpo se mueve describiendo una trayectoria *rectilínea* de modo que los espacios recorridos resulten proporcionales a los tiempos, se dice que el movimiento rectilíneo es *uniforme*. En este caso se llama velocidad al cociente entre el espacio y el tiempo empleado en recorrerlo.

Si el cociente entre el espacio y el tiempo no es constante, el movimiento se llama *variado*. Tal es el caso de un cuerpo que cae en el vacío atraído por la tierra (fig. 14, a). La ley del espacio s es en este caso

$$s = \frac{1}{2} g\, t^2.$$

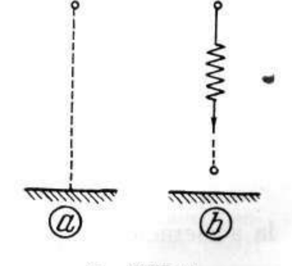


Fig. VII-14.

Considerando $g \sim 10\,\mathrm{m/s^2}$ resulta que el cuerpo recorre en el primer segundo 5 m, en el segundo 15 m, en el tercero 25 m, etc.: ¿qué debe entenderse entonces por velocidad del cuerpo?

Representemos la función $s = \frac{1}{2} g\, t^2$ en un diagrama cartesiano (t, s). Definimos como *velocidad media* en el intervalo (t_1, t_2) al

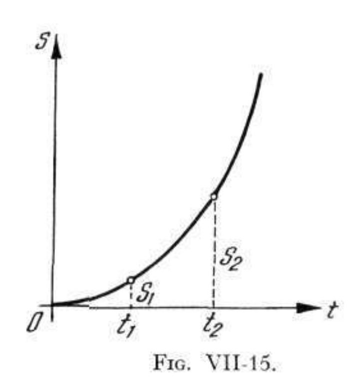


FIG. VII-15.

cociente $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ y como velocidad en el tiempo t_1 al

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s}.$$

Pero este límite, de acuerdo a lo visto anteriormente, es la *derivada del espacio respecto del tiempo* en el instante t_1.

En el caso de la caída libre es $v = \dot{s} = g\,t$.

El espacio recorrido por el extremo de un resorte elástico (figura 14, b) está dado por la fórmula $s = A$ sen $(\omega\,t + \alpha)$, siendo A, ω, α constantes. Si bien la trayectoria real es rectilínea, en un diagrama (t, s) resulta una sinusoide (fig. 16).

La velocidad será la derivada de s respecto de t:

$$v = A\,\omega \cos(\omega\,t + \alpha).$$

EL CONCEPTO DE ACELERACIÓN: Cuando la velocidad es variable con el tiempo, se define como *aceleración media* en un intervalo (t_1, t_2) al cociente $\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ entre los incrementos de velocidades y de tiempos. La aceleración γ en un instante t_1 es el límite de este cociente, o sea, la derivada de la velocidad respecto del tiempo.

FIG. VII-16.

En el ejemplo de la caída libre es

$$\gamma = \dot{v} = g$$

y, por consiguiente, la aceleración es constante.

En el ejemplo del movimiento elástico resulta

$$\gamma = \dot{v} = -A\,\omega^2 \text{ sen } (\omega\,t + \alpha) = -\omega^2\,s;$$

la aceleración es proporcional al espacio recorrido y de signo opuesto.

OBSERVACIÓN:

Más adelante generalizaremos los conceptos de velocidad y aceleración para el caso de trayectorias no rectilíneas.

EJERCICIOS:

1. La expresión general del espacio s, recorrido en un movimiento uniformemente variado, en función del tiempo t es

$$s = A\,t^2 + B\,t + C,$$

donde A, B, C son constantes. Determinar la velocidad v y la aceleración γ del movimiento.

R: $v = 2At + B$; $\gamma = 2A =$ constante.

2. Un cuerpo arrojado hacia abajo con una velocidad de 30 m/s recorre el espacio según la ley

$$s = 30t + 5t^2.$$

Determinar su velocidad en el instante $t = 2s$.

R: $v = 30 + 10t$; $v_2 = 50$ m/s.

3 Un punto se mueve según la ley

$$s = t^3 - 6t^2 + 12t;$$

¿cuándo alcanza su velocidad el valor cero?

R: $t = 2$.

4. Un punto recorre en línea recta la distancia s según la ley

$$s = \frac{1}{3}t^3 - 16t.$$

Determinar su aceleración γ en el punto en el cual su velocidad se anula.

R: $\gamma = 8$ m/s^2.

5. Idem para el movimiento que responde a la ley

$$s = t^3 - 4t^2 - 3t.$$

R: 10 m/s^2.

6. Demostrar que para que un cuerpo pudiera recorrer un espacio s de acuerdo a la ley

$$s = t^{\frac{5}{4}}$$

su aceleración en el instante inicial debería ser infinita.

(Obsérvese que la aceleración es $\gamma = \frac{5}{16}t^{-\frac{3}{4}}$ y véase qué pasa para $t = 0$).

7. Una pelota lanzada hacia arriba alcanza la altura

$$h = 6 + 24t - 5t^2$$

al cabo de t segundos. Hallar su velocidad v y su aceleración γ cuando $t = 2$. ¿Hasta cuándo continuará subiendo? ¿Cuál es el punto más alto que alcanza?

R: $v = 4$ m/s; $\gamma = -10$ m/s^2.

Altura máxima en el instante $t = 2{,}4s$ igual a 34,8 m.

Determinar la velocidad v y la aceleración γ de los siguientes movimientos rectilíneos en los instantes indicados (trazar la gráfica en cada caso):

8. $s = t^3 + 2t + 5$ para $t = 3$. R: $v = 29$ cm/s; $\gamma = 18$ cm/s^2.

9. $s = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 + 1$ para $t = 2$. R: $v = -2$ cm/s; $\gamma = -9$ cm/s^2.

10. $s = -8\cos\frac{1}{2}t$ para $t = \frac{\pi}{3}$. R: $v = 2$ cm/s; $\gamma = \sqrt{3}$ cm/s^2.

11. $s = \frac{1}{3}A \operatorname{sen} 3t$ para $t = \frac{\pi}{6}$. R: $v = 0$ cm/s; $\gamma = -3A$ cm/s^2.

12. $s = 5e^{2t}$ para $t = 1$. R: $v = 73{,}89$ cm/s; $\gamma = 147{,}78$ cm/s^2.

13. $s = (2t + 3)^2$ para $t = \frac{1}{2}$. R: $v = 16$ cm/s; $\gamma = 8$ cm/s^2.

9. VECTORES

Si dados dos puntos A y B consideramos no sólo la longitud del segmento rectilíneo $\overline{AB}$, sino también la *dirección* (recta r que contiene el segmento) y el *sentido* (indicado en la figura mediante una flecha), tenemos caracterizado el vector $\overrightarrow{AB}$, que designaremos con el símbolo $\mathbf{u}$ (1).

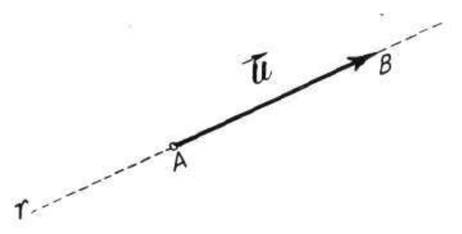


Fig. VII-17.

También se dice que si se aplica el vector $\mathbf{u}$ al punto A se obtiene el punto B, escribiendo entonces

$$A + \mathbf{u} = B \quad \text{o también} \quad \mathbf{u} = B - A.$$

Por eso se acostumbra considerar el vector como *diferencia de puntos.*

El nombre de *vector* proviene del latín *vehere* (transportar, conducir) y fué propuesto por R. W. Hamilton en 1855.

Si al punto A le sumamos el vector $\frac{1}{2}(B - A)$, obtenemos el punto medio M del segmento AB. Resulta $M = A + \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}(A + B)$.

Fig. VII-18.

Si al punto A le sumamos $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ del vector $(B - A)$, obtenemos los puntos P y Q, que dividen a AB en 3 partes iguales. Así, es

$$Q = A + \frac{2}{3}(B - A) = \frac{A + 2B}{3}.$$

(1) Suponemos conocidas por el lector las operaciones algebraicas efectuadas con vectores: suma, resta, producto por un número real, etc.

Consideremos ahora un triángulo ABC. La suma $\frac{1}{3}(A + B + C)$ se puede escribir en cualquiera de las 3 formas idénticas

$$A + \frac{2}{3}\left(\frac{B + C}{2} - A\right) =$$
$$= B + \frac{2}{3}\left(\frac{A + C}{2} - B\right) =$$
$$= C + \frac{2}{3}\left(\frac{A + B}{2} - C\right),$$

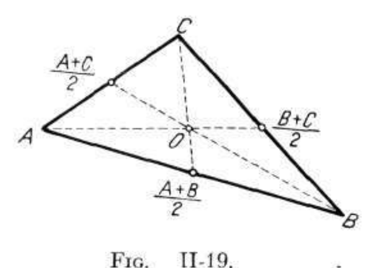


FIG. II-19.

como se ve efectuando las operaciones indicadas.

De acuerdo a los resultados anteriores estas igualdades expresan que las 3 *medianas* de un triángulo se encuentran en un punto O que está situado a $\frac{2}{3}$ del vértice correspondiente.

EXPRESIÓN CARTESIANA: Es muchas veces cómodo referir los vectores a un sistema cartesiano. Adoptando 2 vectores *unitarios* (es decir, de longitud 1), que llamaremos, respectivamente, **I** y **J**, sobre los ejes de abscisas y ordenadas, cualquier vector **u** se puede escribir

$$\mathbf{u} = x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J}.$$

FIG. VII-20.

Si el origen del vector es O, origen del sistema de coordenadas, y el otro extremo es P, resulta que x e y son las coordenadas cartesianas del vector $P - O$.

El módulo ϱ de este vector, que se designa con $|P - O|$, es, evidentemente, de acuerdo al teorema de PITÁGORAS,

$$\varrho = |P - O| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si designamos con φ al *argumento* del vector, o sea, al ángulo que forma con el eje de las abscisas, resulta

$$P - O = x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J} = \varrho \cos\varphi\,\mathbf{I} + \varrho \operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{J} = \varrho\,(\cos\varphi\,\mathbf{I} + \operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{J}).$$

Introduciremos ahora el concepto de producto de un vector por la *unidad imaginaria* i. Recordemos que es $i^2 = -1$ y que, repre-

sentado en un sistema cartesiano, el número i se caracteriza por tener módulo 1 y argumento $\frac{1}{2}\pi$.

El producto $i\,\mathbf{u}$ será un nuevo vector del mismo módulo que $\mathbf{u}$ y que ha girado respecto de éste 90° en el mismo sentido que debe hacerse girar el eje Ox para llevarlo a coincidir con el eje Oy.

En particular, el vector $\mathbf{J}$ resulta ser igual a $i\,\mathbf{I}$. El producto $i\,\mathbf{J}$ será $i\,(i\,\mathbf{I}) = i^2\,\mathbf{I} = -\,\mathbf{I}$.

Entonces se tiene, para la expresión del vector $P - O$,

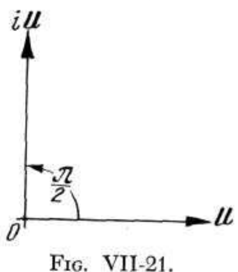


FIG. VII-21.

$$P - O = x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J} = \varrho\,(\cos\varphi\,\mathbf{I} + \operatorname{sen}\varphi\, i\,\mathbf{I}) =$$
$$= \varrho\,(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\,\mathbf{I} = \varrho\,\underline{|\varphi}\,\mathbf{I}\ (^1),$$

es decir, si se multiplica el *vector unitario* $\mathbf{I}$ que se encuentra sobre el eje de las x por un número complejo $\varrho\,\underline{|\varphi}$ de módulo ϱ y argumento φ, se obtiene un vector $P - O$ que tiene ese módulo y ese argumento.

Si se multiplica un vector por el número complejo $1\,\underline{|\varphi}$, se obtiene otro vector de igual módulo que resulta girado un ángulo φ en el sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj).

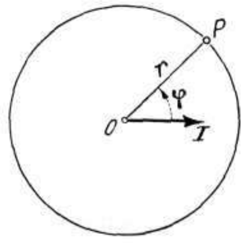


FIG. VII-22.

EJEMPLOS:

1°) Un punto P variable sobre una *circunferencia* de centro O y radio r tiene por ecuación

$$P - O = r\,(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)\,\mathbf{I},$$

con r constante.

Evidentemente, es

$$|P - O| = r.$$

2°) La *cicloide* es una curva descripta por un punto P fijo sobre una circunferencia de radio r que rueda (sin patinar) sobre una recta. Con las notaciones de la figura 23, llamando φ al ángulo que forma el radio correspondiente a P con el radio correspondiente al punto de contacto T, se tendrá que la longitud del segmento OT será igual a la longitud del arco PT, que está dado por el producto del radio r por el ángulo φ medido en radianes. Calculemos los 3 términos del segundo miembro de la identidad

$$P - O = (P - C) + (C - T) + (T - O).$$

(1) Recuérdese que hemos adoptado la notación $\varrho\,\underline{|\varphi} = \varrho(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$ en la página 12. Más adelante veremos que también se puede escribir gracias a la fórmula de Euler, $\varrho\,\underline{|\varphi} = \varrho\, e^{i\varphi}$.

Resulta

$T - O = r\varphi\, \mathbf{I}$, de acuerdo a la definición de cicloide;

$C - T = r\, i\, \mathbf{I} = r\, \mathbf{J}$;

$P - C = (T - C)\,(\cos\varphi - i\,\text{sen}\,\varphi)$, puesto que el sentido de φ es el contrario al que se adopta como positivo para los ángulos.

Podemos escribir, entonces,

$$P - C = -\,(C - T)\,(\cos\varphi - i\,\text{sen}\,\varphi) = \\ = -\,r\,\mathbf{J}\,(\cos\varphi - i\,\text{sen}\,\varphi) = \\ = -\,r\cos\varphi\,\mathbf{J} - r\,\text{sen}\,\varphi\,\mathbf{I},$$

y la ecuación vectorial de la cicloide resulta

$$P - O = (-\,r\cos\varphi\,\mathbf{J} - r\,\text{sen}\,\varphi\,\mathbf{I}) + (r\,\mathbf{J}) + \\ + (r\,\varphi\,\mathbf{I}) = \\ = r\,(\varphi - \text{sen}\,\varphi)\,\mathbf{I} + r\,(1 - \cos\varphi)\,\mathbf{J},$$

y las componentes cartesianas serán, entonces,

$$x = r\,(\varphi - \text{sen}\,\varphi),$$
$$y = r\,(1 - \cos\varphi).$$

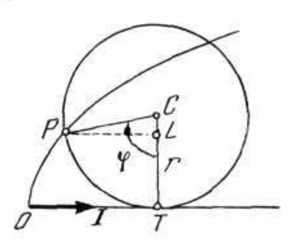


FIG. VII-23.

DERIVADA DE UN VECTOR: Si en el vector $(P - O) = \mathbf{u}$ consideramos el origen O fijo y el extremo P dependiente de un parámetro escalar φ, tendremos un *vector variable*, al cual se pueden extender las definiciones de límite y continuidad.

Así, $\lim\limits_{\varphi\to\varphi_0} \mathbf{u} = \mathbf{a}$ si se puede hacer $|\mathbf{u} - \mathbf{a}| < \varepsilon$, con tal de tomar $|\varphi - \varphi_0| < \delta$. En particular, si $\mathbf{a} = \mathbf{u}\,(\varphi_0)$, el vector es función continua de φ para $\varphi = \varphi_0$.

FIG. VII-24.

Para un vector $\mathbf{u} = P - O$, función continua de φ, podremos definir la *derivada* respecto de φ como el límite del cociente incremental

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} \frac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta\varphi} = \mathbf{u}'\,(\varphi).$$

Gráficamente, $\Delta\mathbf{u}$ es el vector determinado por los puntos P_0 y P_1 correspondientes a los valores φ_0 y φ_1 de la variable escalar. El cociente $\dfrac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta\varphi}$ es también un vector y la posición límite de este vector será un *vector tangente* a la curva $P(\varphi)$ y de módulo igual a $\lim \left| \dfrac{\Delta\mathbf{u}}{\Delta\varphi} \right|$.

EJEMPLOS:

1º) Si un punto P describe una circunferencia de centro O y radio r, su ecuación vectorial es

$$P - O = r\,(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)\,\mathbf{I}.$$

Derivando respecto de φ resulta

$$\frac{d(P - O)}{d\varphi} = \frac{dP}{d\varphi} = r\,(-\,\text{sen}\,\varphi + i\cos\varphi)\,\mathbf{I},$$

que es un vector *tangente* a la circunferencia que se puede obtener a partir de $(P - O)$ cambiando φ por $\varphi + \frac{1}{2}\pi$.

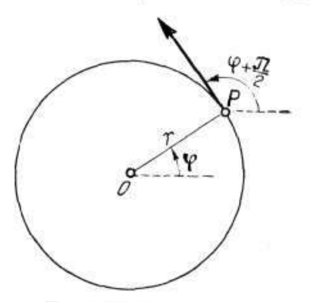


Fig. VII-25.

Si el ángulo φ fuera función de otro parámetro t (tal como ocurre en el movimiento circular uniforme, donde el ángulo φ es función lineal del tiempo t), se puede calcular la derivada de $(P - O)$ respecto de t en base a la regla de derivación de función de función. Si es $\varphi = \omega t$, con ω constante, resulta

$$\frac{d(P-O)}{dt} = \frac{dP}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = r\,(-\operatorname{sen}\varphi + i\cos\varphi)\,\omega\,\mathbf{I}.$$

Este vector tiene como módulo el valor $r\omega$.

2°) Un vector tangente a la cicloide

$$P - O = r\,(\varphi - \operatorname{sen}\varphi)\,\mathbf{I} + r\,(1 - \cos\varphi)\,\mathbf{J}$$

se obtiene derivando respecto de φ. Así resulta

$$\frac{dP}{d\varphi} = r\,(1 - \cos\varphi)\,\mathbf{I} + r\,(\operatorname{sen}\varphi)\,\mathbf{J}.$$

Un *vector normal* se obtiene multiplicando este vector tangente por i; se tiene, entonces,

$$i\frac{dP}{d\varphi} = r\,(1 - \cos\varphi)\,i\,\mathbf{I} + r\operatorname{sen}\varphi\,i\,\mathbf{J} = -\,r\operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{I} + r\,(1 - \cos\varphi)\,\mathbf{J},$$

y como con las notaciones de la figura 23 es $-\,r\operatorname{sen}\varphi = -\,PL$; $r\,(1 - \cos\varphi) = LT$, resulta

$$i\,\frac{dP}{d\varphi} = T - P.$$

De aquí surge la notable propiedad de la cicloide que permite trazar fácilmente la tangente en cualquiera de sus puntos: la normal a la cicloide en un punto cualquiera P se obtiene uniéndolo con el correspondiente punto de tangencia de la circunferencia generadora. La perpendicular a la normal en P es la tangente, tal como se vió en la página 184.

Hemos trazado *un* vector tangente y *un* vector normal en cuanto estos vectores tienen la dirección de la tangente y normal, respectivamente. Se reserva el nombre de vector tangente $\mathbf{t}$ y vector normal $\mathbf{n}$ a sendos vectores *unitarios* que tienen, el primero, el sentido de los arcos crecientes, y el segundo, un sentido tal que forme con $\mathbf{t}$ un ángulo de 90° con la misma disposición que los vectores $\mathbf{I}$ y $\mathbf{J}$.

Ejercicio:

Calcular el vector tangente $\mathbf{t}$ a la curva dada por la ecuación vectorial

$$P - O = \cos 2t\,\mathbf{I} + 2\cos t\,\mathbf{J}$$

en los puntos $t = \frac{\pi}{4}$; $t = \frac{\pi}{2}$.

Hacer la representación gráfica y verificar que se trata de una parábola horizontal cuyo vértice corresponde a $t = \frac{\pi}{2}$ $(x = -1,\ y = 0)$.

CAPÍTULO VIII

VARIACIÓN DE FUNCIONES

1. FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Consideremos una función continua y derivable $y = f(x)$ definida en un intervalo (a, g). Sea la gráfica una curva $ABCDEG$. Para un punto x_1 cualquiera del intervalo (a, b) el valor $f(x_1)$ es mayor que los valores correspondientes a abscisas $x < x_1$ y menor que los valores correspondientes a $x > x_1$. Se dice entonces que $f(x)$ es una *función creciente* en el punto x_1. Cuando eso ocurre para todos los puntos de un intervalo se dice que la función es creciente en el intervalo. En el caso de la figura la función es creciente en los intervalos (a, b) y (c, e).

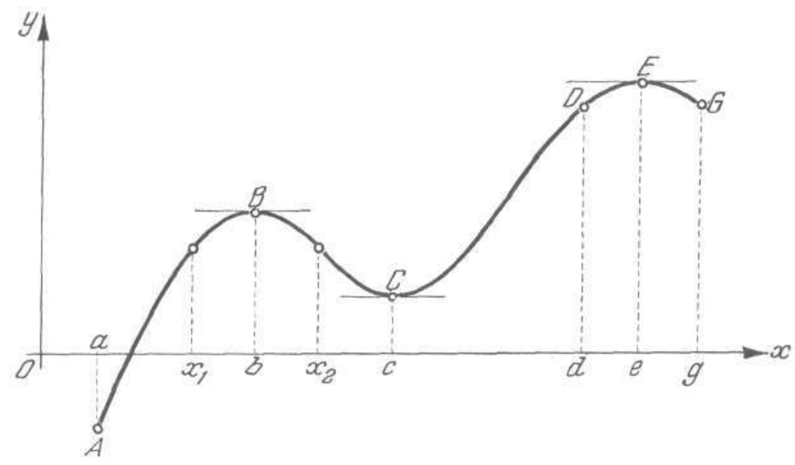


FIG. VIII-1.

En el punto x_2, $f(x_2)$ resulta menor que los valores correspondientes de la función para $x < x_2$ y mayor que los valores de la función para $x > x_2$ en un cierto entorno de x_2. Se dice entonces que la función es decreciente en el punto x_2 y en general que la función es decreciente en los intervalos (b, c) y (e, g).

La condición de ser creciente o decreciente está vinculada al signo de la derivada.

En efecto, considerando el cociente incremental $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ resulta, para el caso de una función creciente, de acuerdo a la definición, que el numerador es positivo si el incremento h es positivo y que el numerador es negativo si el incremento h es negativo. En am-

bos casos el cociente es positivo y también lo es el límite del cociente. Por consiguiente, *una función creciente en un punto tiene derivada positiva.*

Razonando en la misma forma se ve que *una función decreciente en un punto tiene la derivada negativa.*

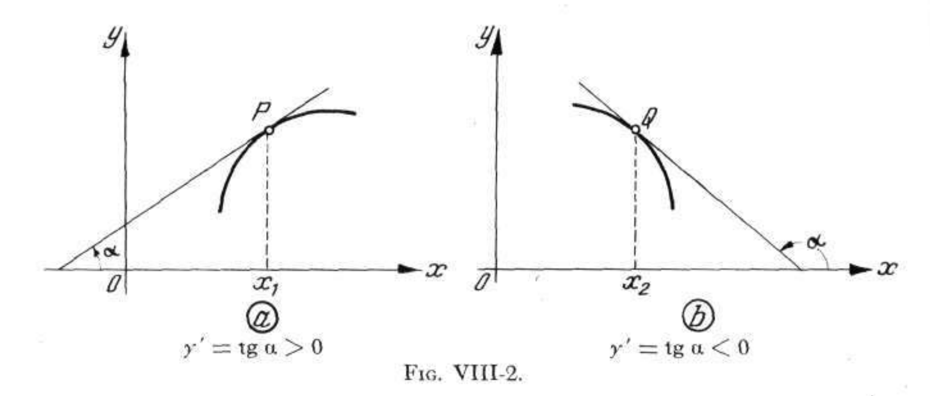


FIG. VIII-2.

2. MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS

Cuando una función toma en un punto b un valor $f(b)$, que es *mayor* que todos los valores de un cierto entorno de b, se dice que tiene allí un *máximo relativo.* Lo mismo ocurre para $x = e$ (fig. 1).

Cuando una función toma en un punto c un valor $f(c)$, que resulta *menor* que todos los valores de un entorno de c, se dice que en este punto hay un *mínimo relativo.*

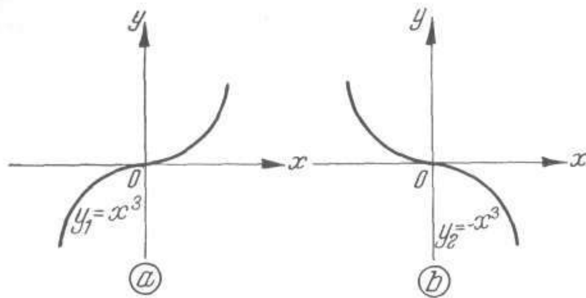
El adjetivo "relativo" debe agregarse porque la simple inspección de la figura 1 muestra que hay valores [como $f(d)$] que son mayores que $f(b)$ y otros valores [como $f(a)$] que son menores que $f(c)$.

En e la función de la figura alcanza su *máximo absoluto,* pues éste es el mayor de todos los valores de la función en el intervalo (a, g), y en a la función alcanza su *mínimo absoluto,* es decir, alcanza un valor inferior a todos los valores que toma la función en el intervalo considerado.

La derivada de una función en un máximo o mínimo relativo es nula, pues si fuera positiva, la función sería creciente, y si fuera negativa, sería decreciente.

En cambio, para los máximos y mínimos absolutos no puede darse un criterio universal. Así, en $x = a$ la función alcanza el mínimo absoluto y la derivada es allí positiva (supuesto que la curva es "suave", es decir, tiene un aspecto semejante al de la figura para $x < a$).

La recíproca no es cierta: puede una función tener una derivada nula y tratarse de un punto creciente o decreciente, como lo muestran las funciones $y_1 = x^3$; $y_2 = -x^3$ en el punto $x = 0$ (fig. 3).



Función creciente con derivada nula   Función decreciente con derivada nula

Fig. VIII-3.

Determinación de máximos y mínimos: Una vez caracterizados los máximos y mínimos relativos por la condición $f'(x) = 0$, mostraremos cómo se puede distinguir analíticamente entre un máximo

Fig. VIII-4. — Gráficos de $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$.

y un mínimo considerando, sea el comportamiento de la función derivada, sea los valores de la derivada segunda.

Procedamos por el momento gráficamente, dejando las demostraciones analíticas para más adelante.

Sea una función $f(x)$ como muestra el gráfico y construyamos,

de acuerdo a lo visto en la página 137, las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$ correspondientes a las derivadas primera y segunda.

Si consideramos el arco ABC, vemos que la pendiente de la curva es positiva en A, se anula en B y es negativa en C. Esto lo muestra el arco $A'B'C'$, correspondiente a la derivada, que tiene ordenada positiva en a, nula en b y negativa en c. Por consiguiente, la función y' es *decreciente* para $x = b$ y, por lo tanto, su derivada, es decir, la *derivada segunda* y'', *debe ser negativa.*

Así queda caracterizado un máximo relativo en un punto $x = b$:

$$y' = 0, \quad y'' < 0.$$

Si consideramos ahora el arco CDE, observamos que teniendo pendiente negativa en C llega a tener pendiente positiva en E, anulándose en D. El arco correspondiente $C'D'E'$ de la función derivada tendrá ordenada negativa para $x = c$, nula para $x = d$ y positiva para $x = e$. Se tratará de una función *creciente* para $x = d$. Su derivada, es decir, *la derivada segunda, debe ser positiva.*

La caracterización de un mínimo relativo tal como el que existe para $x = d$ es

$$y' = 0, \quad y'' > 0.$$

OBSERVACIÓN:

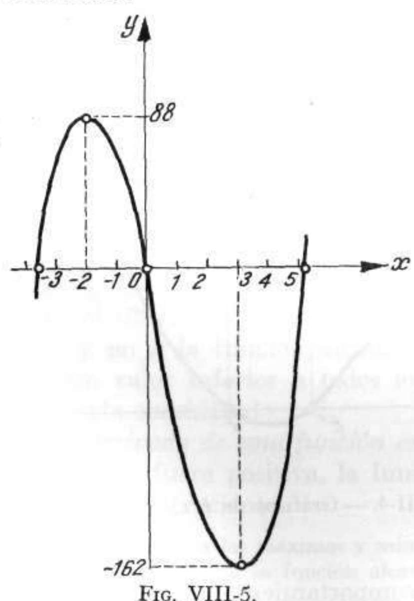


FIG. VIII-5.

Ya hemos advertido que la sola condición $y' = 0$ no implica la existencia de un máximo o de un mínimo. En la figura 4 puede observarse que en F la derivada es nula. Como la función es creciente, la derivada en el arco EFG es positiva y sólo se anula en F. Luego, en la gráfica de y' el arco correspondiente $E'F'G'$ debe tener sus ordenadas positivas, excepto en el punto F', donde es nula. Una curva tal también tiene la tangente en F' horizontal, es decir, la derivada de y', esto es, y'', también es nula. La circunstancia de ser, para $x = f$, $y' = 0$; $y'' = 0$, no permite decir que en F haya un máximo o un mínimo. Toda vez que para un cierto valor x_1 se anulen la primera y segunda derivadas: y' e y'', habrá que hacer un estudio más profundo con participación de otras derivadas de orden superior —como veremos en el § 9 del capítulo IX— para caracterizarlo.

EJEMPLOS:

1°) Determinar los máximos y mínimos de la función

$$y = 4x^3 - 6x^2 - 72x.$$

La derivada primera resulta

$$y' = 12x^2 - 12x - 72 = 12\,(x^2 - x - 6) = 12\,(x + 2)\,(x - 3),$$

que se anula para los valores $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.

Siendo la derivada segunda

$$y'' = 12\,(2x - 1),$$

se tiene

$$y''(x_1) = y''(-2) = -60 < 0,$$
$$y''(x_2) = y''(3) = 60 > 0,$$

lo cual permite asegurar que la función tiene un máximo relativo en $x_1 = -2$ ($y_1 = 88$) y un mínimo relativo en $x_2 = 3$ ($y_2 = -162$) (fig. 5).

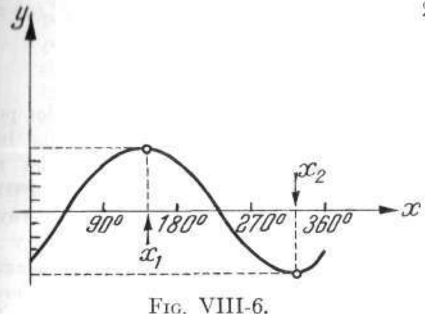


Fig. VIII-6.

2°) Determinar los máximos y mínimos de la función

$$y = 3 \operatorname{sen} x - 4 \cos x$$

comprendidos en el intervalo

$$0° \leqslant x \leqslant 360°.$$

(Como se trata de una expresión periódica, con los valores en este intervalo se "agota" el conocimiento de la función).

Anulando la derivada

$$y' = 3 \cos x + 4 \operatorname{sen} x = 0$$

resulta $\operatorname{tg} x = -\dfrac{3}{4}$, o sea, los valores de x que anulan la derivada primera son $x_1 = 143°08'$; $x_2 = 323°08'$. Como $y'' = -3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x = -y$, se tiene $y''(x_1) = -5 < 0$; $y''(x_2) = 5 > 0$. Luego, en x_1 se tiene un máximo y en x_2 un mínimo.

3°) Dada una hoja cuadrada de lado 2a determinar las dimensiones de la caja de volumen máximo y de base cuadrada que con ella se puede construir.

Sabido es que para construir una caja a partir de la hoja cuadrada hay que trazar rectas paralelas a los lados a una cierta distancia x, doblar "a medio cartón" según estas rectas y recortar los 4 cuadraditos que aparecen rayados en los ángulos de la figura.

El volumen V de la cajita es igual al producto de la superficie de la base por la altura, es decir, expresado en función de x,

$$V = (2a - 2x)^2 \cdot x = f(x).$$

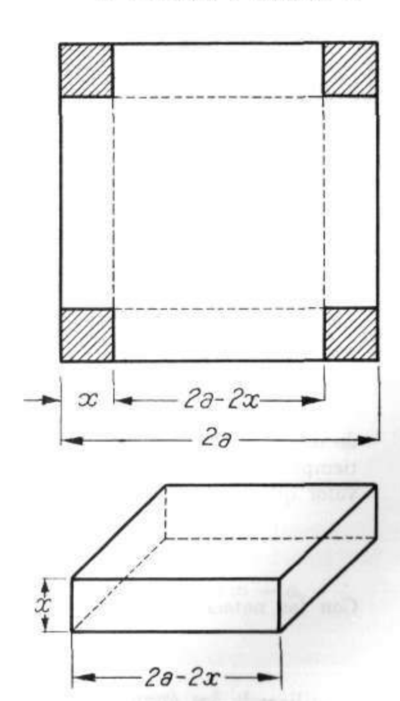


Fig. VIII-7.

A cada valor de x corresponde un valor del volumen. Si $x = 0$, no hay caja y el volumen será nulo: $f(0) = 0$. Si $x = \frac{1}{10}a$, será $V = \frac{81}{250}a^3$. Si $x = a$, será nuevamente $V = 0$, pero tampoco se logra construir una cajita cortando la hoja en 4 partes iguales. Se trata de determinar para qué valor de x es $V = f(x)$ máximo. Calculando la derivada primera se obtiene

$$f'(x) = 2\,(2a - 2x)\,(-2)x + (2a - 2x)^2 = 4\,(a - x)\,(a - 3x),$$

expresión que se anula para $x_1 = a$ y para $x_2 = \frac{1}{3}a$.

Evidentemente, para $x_1 = a$ se tiene un mínimo y, por consiguiente, deberá encontrarse un máximo para $x_2 = \frac{1}{3}a$. Utilizando la derivada segunda se verifican estas afirmaciones, pues siendo $f''(x) = 8\,(3x - 2a)$ resulta $f''(a) = = 8a > 0$ y $f''\left(\frac{1}{3}a\right) = -8a < 0$.

4º) Refracción de la luz: Consideremos 2 medios ópticos, I y II, separados por un plano α, en los cuales la luz se propaga con las velocidades v_1 y v_2. Se trata de determinar la trayectoria que debe seguir un rayo de luz para unir los puntos A y B de I y II, respectivamente, empleando un *tiempo extremo*. Consideremos como eje de las abscisas la traza de α y como eje de las ordenadas la recta AO perpendicular por A a α. Las coordenadas de los puntos dados serán $A(0, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. El punto P de incidencia al pasar el rayo de I a II tendrá las coordenadas $(x, 0)$, siendo x variable.

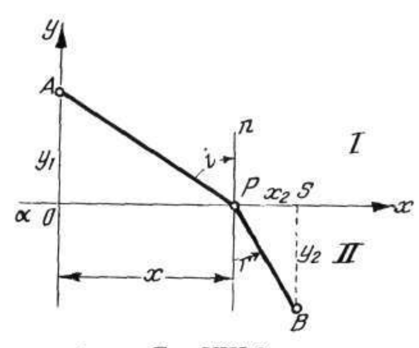


Fig. VIII-8.

Para recorrer el trayecto AP la luz tarda un tiempo $\frac{\overline{AP}}{v_1}$ y para recorrer el PB tarda $\frac{\overline{PB}}{v_2}$. El tiempo total empleado será

$$\frac{\overline{AP}}{v_1} + \frac{\overline{PB}}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}{v_2} = f(x),$$

de modo que a cada valor x, es decir, para cada posición de P, se tendrá un tiempo $t = f(x)$. ¿Para qué posición de P resultará $f(x)$ extremo? Para el valor que anule la derivada primera,

$$f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{x_2 - x}{v_2\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0.$$

Con las notaciones de la figura 8 esta relación se puede escribir

$$\frac{1}{v_1}\,\frac{OP}{AP} - \frac{1}{v_2}\,\frac{PS}{PB}$$

o, utilizando los ángulos i y r que la normal n a α en P forma con las trayectorias AP y PB,

$$\frac{\operatorname{sen} i}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} r}{v_2},$$

que suele escribirse

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2} = n,$$

designando con n el índice de refracción del medio I respecto del medio II.

OBSERVACIONES:

1º) El principio que afirma que la luz recorre su trayectoria empleando un tiempo extremo es de FERMAT. En virtud de él resulta, como acaba de verse, la ley de la refracción de SNELLIUS.

2º) Un problema análogo al de la refracción de la luz sería el siguiente: Si una persona A está en la costa I y en el mar II se está ahogando otra persona B, ¿cuál debe ser la trayectoria a seguir para acudir lo más rápidamente posible si en el medio I corre con la velocidad v_1 y en el medio II nada con la velocidad v_2? A pesar de que la trayectoria rectilínea AB es la más corta, se emplea menos tiempo recorriendo la trayectoria APB, de acuerdo a lo visto anteriormente.

EJERCICIOS:

Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

1. $y = x^2 - 12x + 5.$ R: máx.: no tiene; mín.: $x = 6$.
2. $y = x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2.$ R: máx.: $x = 0$; mín.: $x = \pm \frac{1}{2}$.
3. $y = x^2 : \sqrt{4 - x^2}.$ R: máx.: no tiene; mín.: $x = 0$.
4. $y = -x^3 + 4x - 1.$ R: máx.: $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$; mín.: $x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.
5. $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}.$ R: máx. $x = -1$.
6. Demostrar la relación

$$(x+1)(a+1-x) \leqslant \frac{1}{4}(a+2)^2.$$

Solución: Calculando el máximo de la función

$$f(x) = (x+1)(a+1-x)$$

resulta, anulando la derivada, $2x = a$, o sea, $x = \frac{1}{2}a$.

Para este valor de x es $f(x) = \frac{1}{4}(a+2)^2$.

Determinar los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:

7. $(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}}.$ R: máx.: $x = -\frac{1}{2}$.
8. $\frac{(a+x)^2}{a-x}.$ R: máx.: $x = 3a$; mín.: $x = -a$.
9. Hallar los máximos y mínimos relativos de la función

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Observar que el máximo es menor que el mínimo.

Trazar el gráfico correspondiente.
R: En $x = -1$ se tiene el máximo $y = -2$. En $x = 1$ se tiene el mínimo $y = 2$.

10. Probar que la función
$$y = 10x^6 + 12x^5 + 15x^4 + 20x^3 - 15$$
tiene un mínimo en el punto $x = -1$ y ningún otro punto extremo.

11. Probar que los valores extremos (máximos y mínimos) de la expresión
$$y = a \cos x + b \operatorname{sen} x$$
son $y = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$.
$\left[\text{Nótese que la derivada es nula para } \operatorname{tg} x = \dfrac{b}{a}\right]$

12. Demostrar que la razón r entre el logaritmo de un número x y el mismo número es máxima cuando $x = e$. Representar gráficamente r en función de x (fig. 9).

13. Hallar la mínima ordenada de la curva
$$y = xe^{+x}.$$
Trazar la gráfica correspondiente.
R: $y = -e^{-1} = -0{,}36$.

14. Hallar la mínima ordenada de la curva
$$y = x \cdot \ln x.$$
R: $y = -e^{-1} = -0{,}36$.

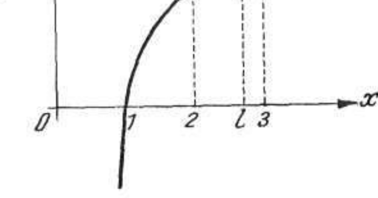


FIG. VIII-9.

15. Determinar la máxima ordenada de la función
$$y = x\,e^{-x}.$$
R: $y = e^{-1} = 0{,}36$.

16. Demostrar que la función
$$y = \operatorname{sen}(x - \alpha) \cos(x - \beta)$$
es máxima o mínima para
$$x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}n\pi,$$
según sea n par o impar.
Solución: La condición de punto extremo es
$$y' = \cos(x - \alpha)\cos(x - \beta) - \operatorname{sen}(x - \alpha)\operatorname{sen}(x - \beta) =$$
$$= \cos(x - \alpha + x - \beta) = \cos[2x - (\alpha + \beta)] = 0.$$
Esta ecuación se verifica para
$$x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}n\pi.$$
Cuando n es par, $2k$, la derivada segunda,
$$y'' = -2 \operatorname{sen}[2x - (\alpha + \beta)],$$
es negativa y tenemos puntos máximos. Para n impar, $2k + 1$, la derivada segunda es positiva y tenemos puntos mínimos.

17. Demostrar que el mínimo de
$$y = a \operatorname{Ch} x + b \operatorname{Sh} x \qquad (a > b)$$
es $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Máximos y mínimos de una función racional: Para hallar los máximos y mínimos de la función

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

habrá que determinar los valores x que anulan la derivada primera

$$y' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

y, por consiguiente, que verifican la relación

$$P'Q - PQ' = 0. \qquad [1]$$

La derivada segunda es

$$y'' = \frac{(P''Q + P'Q' - P'Q' - PQ'')Q^2 - 2QQ'(P'Q - PQ')}{Q^4}.$$

En los puntos extremos, en los cuales se verifica [1], resulta $y'' = \dfrac{P''Q - PQ''}{Q^2}$, y siendo el denominador esencialmente positivo, el signo de y'' es el de la diferencia

$$P''Q - PQ''. \qquad [2]$$

Ejemplo:

Hallar máximos y mínimos de la función $y = \dfrac{3x^2 + 7x + 7}{x^2 + x + 1}$.

Siendo

$$\begin{aligned} P &= 3x^2 + 7x + 7, & Q &= x^2 + x + 1, \\ P' &= 6x + 7, & Q' &= 2x + 1, \\ P'' &= 6, & Q'' &= 2, \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} P'Q - PQ' &= (6x + 7)\,(x^2 + x + 1) - (3x^2 + 7x + 7)\,(2x + 1) = \\ &= -4x^2 - 8x = -4x\,(x + 2), \end{aligned}$$

que se anula en $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

Formamos ahora

$$\begin{aligned} P''Q - PQ'' &= 6\,(x^2 + x + 1) - 2\,(3x^2 + 7x + 7) = -8x - 8 = \\ &= -8\,(x + 1), \end{aligned}$$

que es negativa para x_1 y positiva para x_2. Luego, en $x_1 = 0$ se tiene un máximo y en $x_2 = -2$ un mínimo.

Ejercicios:

1. Verificar que el máximo y el mínimo de la función

$$y = \frac{x}{(4 + x)\,(1 + x)}$$

se obtiene en $x = 2$ y $x = -2$, respectivamente.

2. Verificar que la función

$$y = \frac{(x + 1)^2}{(x - 1)^3}$$

tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = -5$.

Determinar los máximos y mínimos de las funciones

3. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$. R: mín.: $x = \dfrac{1}{2}$.

4. $y = \dfrac{x(x^2+1)}{x^4 - x^2 + 1}$. R: máx.: $x = 1$; mín.: $x = -1$.

PROBLEMAS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS:

1. Dividir 16 en dos partes tales que su producto p sea máximo.
   Solución: Si una de las partes la designamos con x, la otra será $16 - x$; luego, $p = x(16 - x)$; la condición de máximo exige que sea
   $$p' = 16 - 2x = 0,$$
   o sea,
   $$x = 8,$$
   es decir, debe dividirse el número en partes iguales.
2. Dividir el número a en dos partes tales que su producto sea máximo.
   R: Las dos partes deben ser iguales.
3. ¿Cuándo es mínima la suma de un número x y del cuadrado de su recíproca?
   R: $x = \sqrt[3]{2}$.
4. Demostrar que el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un círculo dado es un cuadrado.
   Solución: Teniendo en cuenta que es $x^2 + y^2 = 4R^2$ y que el área es $A = xy$, será $A^2 = x^2y^2 = x^2(4R^2 - x^2)$, y el máximo del cuadrado del área, y por lo tanto del área, se encuentra para $x = y = R\sqrt{2}$. (fig. 10).

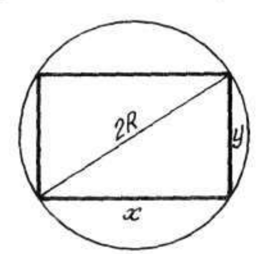


FIG. VIII-10.

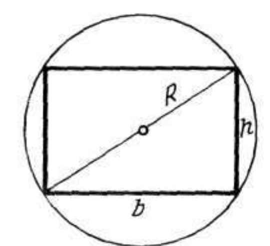


FIG. VIII-11.

5. Se considera que la resistencia de una viga rectangular es proporcional a la base b y al cuadrado de la altura h. Hallar las dimensiones que debe tener una viga que se extrae de un tronco cilíndrico de radio R para que la resistencia de la viga sea máxima (fig. 11).
   Solución: La resistencia es una función
   $$f = kbh^2,$$
   con k constante, en donde las variables b y h están ligadas, de acuerdo al teorema de Pitágoras, por la relación
   $$b^2 + h^2 = 4R^2.$$
   Resulta entonces
   $$f = kb(4R^2 - b^2),$$
   función de b exclusivamente.
   La anulación de la derivada de f respecto de b se verifica si es $b^2 = 4R^2 : 3$,

o sea, $b = 2R\sqrt{\frac{1}{3}}$, y para h se tiene entonces $h = 2R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

6. Entre todos los rectángulos de perímetro constante $2p$ demostrar que el de mayor área es el cuadrado.

Solución: Sean x e y los lados del rectángulo y $2p$ el perímetro:

$$2(x + y) = 2p, \quad \text{o sea,} \quad y = p - x;$$
$$A = xy = x(p - x) = px - x^2.$$

La condición para que A sea máximo es

$$A' = p - 2x = 0, \qquad x = \frac{1}{2}p = y.$$

7. De una pieza de cartón rectangular de lados $a = 25$ cm y $b = 10$ cm se cortan en las esquinas cuadrados de lados x para hacer una caja. ¿Cuál es el valor de x que hace máxima la capacidad de la caja?

R: $x = \frac{1}{6}(a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}) \sim 2{,}2.$

8. En una viga sometida a una determinada distribución de cargas y apoyos el momento flector es $M = \frac{1}{2}Wx(l - x)$. ¿Cuál es el valor de x que hace máximo el momento?

R: $x = \frac{1}{2}l.$

9. Si un proyectil se dispara desde el origen de coordenadas en una dirección tal que forme un ángulo α con la horizontal, describe una trayectoria dada por la ecuación

$$y = \frac{gx^2}{2\,v_0 \cos^2 \alpha} - x \operatorname{tg} \alpha.$$

Se desea saber el valor de α para que el alcance del tiro sea máximo.

R: $\alpha = \frac{1}{4}\pi.$

[Hállese el alcance x_1 del tiro, o sea, el valor x para $y = 0$, y estúdiese la $f(\alpha)$ que resulta].

10. Hallar, entre todos los sectores circulares de igual perímetro, $2p$, el que tiene mayor área.

Solución: Llamemos α al ángulo central (medido en radianes) y r al radio (desconocido) del sector circular; su perímetro $2p$ está dado por

$$2p = 2r + r\alpha.$$

El área A del sector es

$$A = \frac{1}{2}r^2\alpha = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{2p - 2r}{r}\right) = rp - r^2.$$

Para que el área sea máxima, $A'(r) = 0$, que se verifica si $r = \frac{1}{2}p$, es decir, el sector circular de perímetro dado y área máxima es aquél cuyo radio es un cuarto del perímetro.

11. Un jardinero construye un jardín en forma de sector circular de perímetro $2p$ igual a 30 m. ¿Cuál es el jardín de mayor superficie cubierta?

R: Radio del sector, 7,5 m; longitud del arco del sector, 15 m.

12. Hallar el número N tal que la diferencia con su cuadrado sea máxima.

R: $N = \frac{1}{2}$.

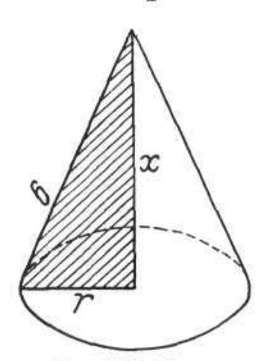
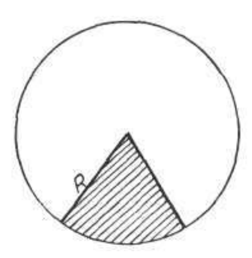


Fig. VIII-12.

13. Un triángulo rectángulo gira alrededor de uno de sus catetos, engendrando así un cono circular recto. ¿Cuál será el volumen V del mayor cono que pueda generarse con un triángulo cuya hipotenusa mide 6 cm?

Solución: Si designamos con r el radio de la base del cono y con x la altura, resulta $3V = \pi r^2 x$; como es $r^2 = 36 - x^2$, habrá que hallar el máximo de la función $(36 - x^2)x = 36x - x^3$. La derivada de esta función se anula para $x = 2\sqrt{3}$, con lo que resulta $r = 2\sqrt{6}$ y $V = 16\pi\sqrt{3}$.



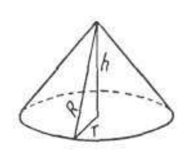


Fig. VIII-13.

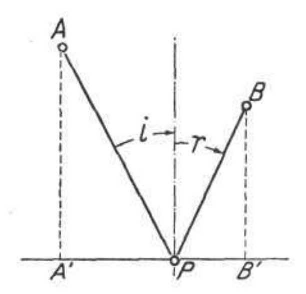


Fig. VIII-14.

14. Para hacer un filtro cónico se pliega un papel circular. Siendo R el radio de dicho círculo, ¿cuál será la altura h y el radio r del cono que hace máximo el volumen? (fig. 13).

R: $h = \frac{1}{3}\sqrt{3}R$; $r = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,R$. (Mostrar que el ángulo central es de 295°).

15. Un rayo de luz sale de un punto A, incide en un punto P de un espejo plano y se refleja pasando por otro punto B. Probar que el recorrido $AP + PB$ será mínimo cuando el ángulo i, que forma el rayo incidente con la normal al espejo en el punto P, sea igual al ángulo r, que forma dicha normal con el rayo reflejado (fig. 14).

(Exprésese el camino del rayo de luz en función de las constantes AA' y BB' y de los ángulos i, r. Téngase además en cuenta que i está vinculado con r por la relación $A'B' = AA' \operatorname{tg} i + BB' \operatorname{tg} r$).

16. Una fuerza F varía con x de acuerdo a la ley

$$F = \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donde r es un valor que consideraremos constante. Probar que la

fuerza es máxima cuando $x = \frac{1}{\sqrt{2}} r$.

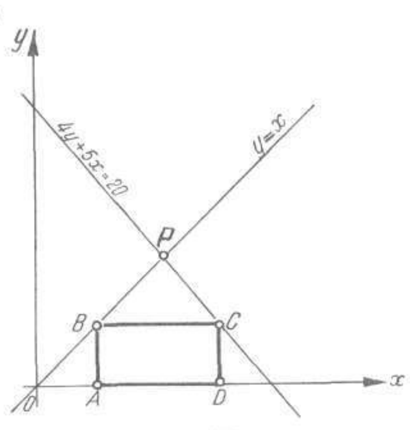


FIG. VIII-15.

17. Un rectángulo tiene dos de sus vértices sobre el eje de las x. Los otros sobre las rectas de ecuaciones $y = x$; $4y + 5x = 20$. Hallar el valor de y para el cual el área A del rectángulo es máxima (fig. 15).
Solución: Sea $ABCD$ el rectángulo buscado. El punto A tiene coordenadas $(x, 0)$. El punto B tiene coordenadas (x, x) por hallarse sobre la recta $y = x$. El punto C tiene ordenada x, y por hallarse sobre $5x + 4y = 20$ su abscisa es $\frac{1}{5}(20 - 4x)$. Las coordenadas de D son, finalmente, $\left[\frac{1}{5}(20 - 4x);\ 0\right]$

El área del rectángulo es $AD \cdot AB = \left[\frac{1}{5}(20 - 4x) - x\right] x$, y esta expresión es máxima si su derivada es cero: $4 - \frac{8}{5}x - 2x = 0$, o sea, $x = \frac{10}{9} = y$.

18. Experimentalmente se hicieron las siguientes medidas: x_1, x_2, x_3, x_4, para una cierta longitud x. Admitiendo que el valor más probable de x es el que hace mínima la suma de los cuadrados de los errores de cada medida (mínimos cuadrados), demostrar que ese valor es la media aritmética de los valores medidos.
Generalización para n medidas.
Solución: Sea x el valor más probable; debe ser tal que se cumpla
$f(x) = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + (x_3 - x)^2 + (x_4 - x)^2 = \text{mínimo}.$
La anulación de la derivada

$$-\frac{1}{2}f'(x) = (x_1 - x) + (x_2 - x) + (x_3 - x) + (x_4 - x)$$

da la condición de mínimo

$$x = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

En general, resulta

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

19. Entre ciertos límites se toma como válida la ley de Hooke sobre deformaciones elásticas: "Las tensiones son proporcionales a los alargamientos de una barra elástica: $T = Kx$".
Experimentalmente se obtuvieron los siguientes datos:

Para $T_1 = 12$ kg, $x_1 = 10{,}50$ cm;
para $T_2 = 20$ kg, $x_2 = 17$ cm;
para $T_3 = 24$ kg, $x_3 = 22$ cm.

Calcular el valor de K sabiendo que el más probable es el que hace mínima la suma de los cuadrados de las diferencias $(T - Kx)$.

R: $K = 1{,}12$ kg/cm.

(Procédase como en el ejercicio 18, teniendo en cuenta que la variable es K).

20. Un tambor cilíndrico de chapa, cerrado, sirve para contener un determinado volumen de líquido. Demostrar que el gasto de chapa necesaria para hacerlo será mínimo cuando la altura del mismo iguale a su diámetro.

21. Una página se escribe con un texto de área de $54\ \text{cm}^2$, dejando arriba y abajo márgenes de ancho igual a 2 cm y lateralmente márgenes de ancho de 3 cm. ¿Cuál es el tamaño de la hoja más económica?

R: $x = 9$ cm, es decir, la hoja debe ser de 15 cm por 10 cm (fig. 16).

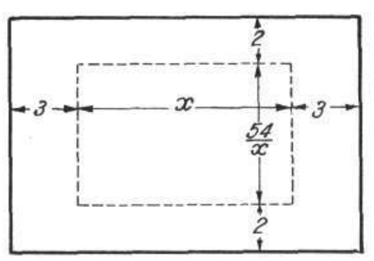


Fig. VIII-16.

22. La superficie lateral de un cilindro es de $8\pi\ \text{cm}^2$. Se extrae del cuerpo dado una semiesfera cuya base coincide totalmente con la del cilindro. Hallar la altura h y el radio r de la base del cilindro de manera que el volumen restante sea máximo.

R: $r = \sqrt{2}$; $h = 2\sqrt{2}$.

23. Un cartel tiene sus bordes superior e inferior a la altura a y b, respectivamente, con respecto a la visual horizontal de un hombre. ¿A qué distancia d debe colocarse éste de la pared para que el ángulo visual determinado por el ojo y los bordes sea máximo?

R: $d = \sqrt{ab}$.

[Con las notaciones de la figura 17 exprésese $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ en función de a, b, d; $\alpha - \beta$ será máximo cuando $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ lo sea].

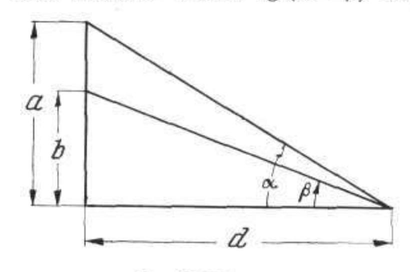
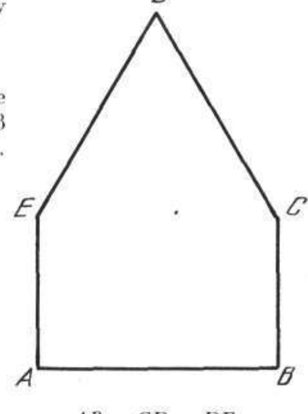


Fig. VIII-17.



$AB = CD = DE$

Fig. VIII-18.

24. Una ventana, cuya forma es la de la figura 18 tiene 8,5 cm de perímetro. Calcular sus dimensiones para que la entrada de luz sea máxima.

R: $AB = 2$ m; $BC = 1{,}25$ m.

25. Se desea recubrir de mármol un monumento como el de la figura 19 de volumen total igual a $3{,}16\ \text{m}^3$. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones para que el costo sea mínimo?

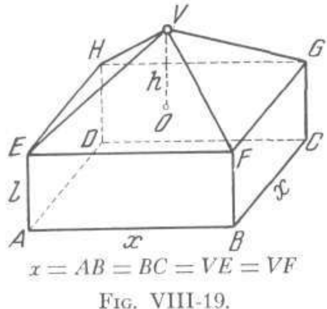
R: $x \sim 2$ m.

26. Demostrar que el rectángulo de perímetro dado que tiene la diagonal más corta es el cuadrado.

27. En un campo se quiere limitar un área de $864\ \text{m}^2$ por medio de un cerco rectangular que además tenga una valla divisoria —de partes iguales—

paralela a uno de los lados del cerco. ¿Cuáles son las dimensiones más convenientes para que el gasto sea mínimo?
R: 24 m × 36 m.

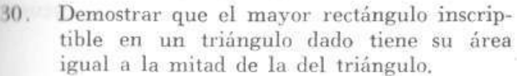
28. Hallar el cilindro de menor superficie total para un volumen dado. Probar que esa superficie es 1,145 veces la de la esfera de igual volumen.



$x = AB = BC = VE = VF$

Fig. VIII-19.

29. La suma de las longitudes de las aristas de un prisma recto de base cuadrada es un valor constante c. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de las mismas para que el prisma tenga volumen máximo?
R: Deben ser iguales.



30. Demostrar que el mayor rectángulo inscriptible en un triángulo dado tiene su área igual a la mitad de la del triángulo.

31. Se inscribe un rectángulo en un triángulo rectángulo de manera que uno de los ángulos del primero coincida con el ángulo recto; demostrar que su área será máxima cuando el vértice opuesto al ángulo coincidente bisecte la hipotenusa del triángulo.
(Aplíquese la propiedad demostrada en el ejercicio 30).

32. A un tanque troncocónico hay que adaptarle en el interior un recipiente de forma prismática de sección cuadrada. Siendo la altura del tronco de cono de 3 m y los radios de sus bases 0,5 m y 0,8 m, ¿cuál es la altura del prisma de volumen máximo?

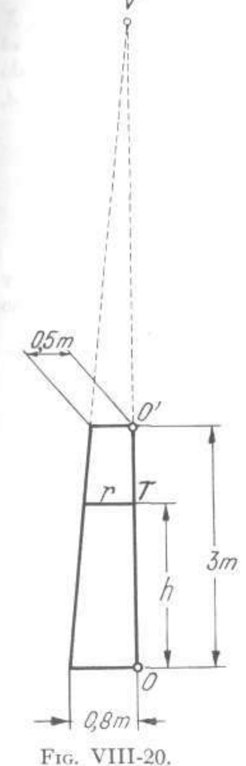


Fig. VIII-20.

Solución: Sea r el radio de la sección correspondiente a la altura h del prisma.

Con las notaciones de la figura resultará de acuerdo a los teoremas de semejanza de triángulos y a las propiedades de las proporciones:

$$\frac{VO}{VO'} = \frac{0,8}{0,5}$$

y

$$\frac{VO - VO'}{VO} = \frac{0,3}{0,8}$$

o sea,

$$VO = \frac{8}{3}(VO - VO') = \frac{8}{3}OO' = \frac{8}{3}3 = 8. \qquad [1]$$

Por otra parte,

$$\frac{VO}{TV} = \frac{0,8}{r}$$

de donde

$$\frac{VO - VT}{VO} = \frac{0,8 - r}{0,8}$$

o sea,

$$VO - VT = h = VO\,\frac{0,8 - r}{0,8}$$

e introduciendo el valor hallado para VO en [1] resulta

$$h = 8\frac{0{,}8 - r}{0{,}8} = 10\,(0{,}8 - r) = 8 - 10r.$$

El lado l_4 del cuadrado inscripto en el círculo de radio r es igual a $r\sqrt{2}$. El volumen del prisma de base cuadrada de lado l_4 y altura h es entonces

$$V = l_4^2 \cdot h = 2r^2\,(8 - 10r) = 4r^2\,(4 - 5r).$$

Para que sea máximo,

$$V' = 8r\,(4 - 5r) - 20r^2 = 4r\,(8 - 15r) = 0,$$

de donde

$$r = \frac{8}{15}\,\text{m} \quad \text{y} \quad h = 2{,}66\,\text{m}.$$

33. ¿Cuál es el radio r y la altura h del cono recto de volumen mínimo circunscripto a una esfera de radio R?

R: $r = \sqrt{2}R$; $h = 4R$.

34. Un barco X se halla a 100 km al sud de otro barco Y. El primero navega hacia el norte a razón de 32 km/hora y el segundo hacia el este a razón de 55 km/hora. ¿Cuándo será mínima la distancia entre ambos barcos?

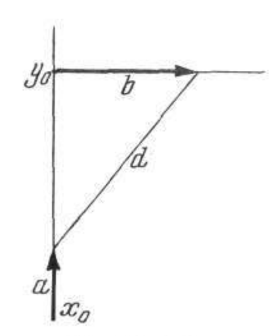


FIG. VIII-21.

Solución: Supongamos que cuando los barcos se hallen en las posiciones x_0 e y_0 comience el movimiento ($t_0 = 0$).
Al cabo de un cierto tiempo, t horas, el barco X ha recorrido hacia el norte el espacio $a = 32t$ y el barco Y hacia el este el espacio $b = 55t$. Sabiendo que $\overline{x_0 y_0} = 100$ km, el cuadrado de la distancia d, en el instante t, entre ambos barcos es

$$d^2 = (100 - 32t)^2 + (55t)^2 = f(t).$$

Para que sea mínima debe tenerse

$$f'(t) = -\,64\,(100 - 32t) + 6050t = 0,$$

que se verifica para $t = 47^{\text{m}}25^{\text{s}}$.

35. Se inscribe un cilindro de radio r en un cono circular recto de altura h' y radio de la base R. Demostrar que el volumen del cilindro es máximo cuando su altura h es $\frac{1}{3}$ de la del cono y que el volumen vale $\frac{4}{9}$ del volumen del cono.

$$\left[\text{Recuérdese la propiedad } \frac{h}{h'} = \frac{R - r}{R}\right].$$

36. **Un cuadrilátero tiene sus lados a, b, c y d dados en un cierto orden; su área será máxima cuando sea inscriptible en un círculo.**
Solución: **El área S del cuadrilátero es** (fig. 22)

$$S = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,B + \frac{1}{2}cd\,\text{sen}\,D, \qquad [1]$$

con a, b, c y d fijos y B y D variables.
Pero

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B$$

y

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos D,$$

de donde

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D,$$

o sea,

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab} + \frac{cd}{ab}\cos D. \quad [2]$$

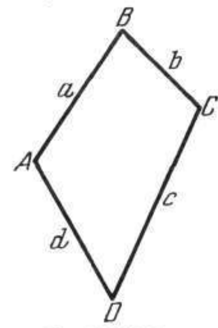


Fig. VIII-22.

Esta expresión tiene sólo como variable a D. Indicando con el acento la derivada respecto de D resulta:

$$-\operatorname{sen} B \cdot B' = -\frac{cd}{ab}\operatorname{sen} D,$$

de donde

$$B' = \frac{cd}{ab}\cdot\frac{\operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} B}. \quad [3]$$

La expresión [1] del área del cuadrilátero aparentemente depende de 2 variables: B y D, pero en virtud de [2] en realidad depende de una sola variable: D. Si anulamos la derivada S' teniendo en cuenta [3], tendremos la condición de máximo o mínimo

$$S' = \frac{1}{2}ab\cos B \cdot B' + \frac{1}{2}cd\cos D = \frac{1}{2}ab\cos B\cdot\frac{cd}{ab}\cdot\frac{\operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} B} + \frac{1}{2}cd\cos D =$$

$$= \frac{1}{2}cd\,(\operatorname{sen} D \cdot \operatorname{cotg} B + \cos D) = 0,$$

de donde

$$\operatorname{sen} D \cdot \operatorname{cotg} B = -\cos D,$$

es decir,

$$\operatorname{cotg} B = -\operatorname{cotg} D,$$

lo cual implica la relación

$$B + D = 180°,$$

que es precisamente la condición de inscriptibilidad.

Que se trata de un máximo y no de un mínimo es inmediato, pues éste corresponde al caso $S = 0$ que se obtiene cuando los 4 lados están sobre una misma recta.

37. Dados una línea recta r y dos puntos A y B exteriores a ella, se desea hallar el punto P de r tal que la suma $s = AP^2 + BP^2$ sea mínima.

R: P debe ser el punto medio de la proyección del segmento AB sobre r. (Téngase en cuenta que la proyección de AB sobre r y las distancias de los puntos A y B a la recta son constantes).

38. Hallar el mínimo cuadrado inscriptible en otro dado y el máximo circunscriptible.

Solución: Llamemos l al lado dado y sea a el lado del cuadrado inscripto. En la figura 23 se ve que

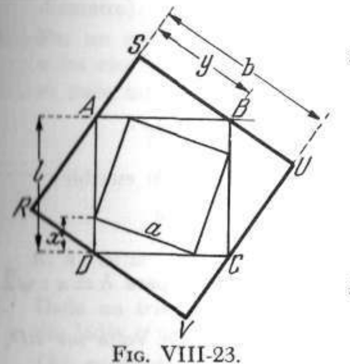


Fig. VIII-23.

$$a^2 = x^2 + (l - x)^2,$$

o sea, el área A del cuadrado inscripto es

$$A = x^2 + (l - x)^2.$$

Para que ésta sea mínima,

$$A' = 2x - 2(l - x) = 0,$$

de donde

$$x = \frac{1}{2}l.$$

De esto se deduce que los vértices del cuadrado de área mínima inscripto en otro dado son los puntos medios de los lados de éste.

Designemos con b el lado del cuadrado circunscripto; se tiene entonces que

$$b = SB + BU = SB + SA = y + \sqrt{l^2 - y^2},$$

de donde resulta que el área A_1 del cuadrado circunscripto está dada por

$$A_1 = b^2 = y^2 + 2y\sqrt{l^2 - y^2} + l^2 - y^2 = 2y\sqrt{l^2 - y^2} + l^2$$

Para que A_1 sea máxima debe ser

$$A_1' = 2\sqrt{l^2 - y^2} - \frac{2y^2}{\sqrt{l^2 - y^2}} = 0,$$

o sea,

$$(l^2 - y^2) - y^2 = 0,$$

o bien,

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2}l.$$

Pero

$$SA = \sqrt{l^2 - y^2} = \sqrt{l^2 - \frac{1}{2}l^2} = \sqrt{\frac{1}{2}l^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}l,$$

es decir, $SA = SB = BU$ y B es el punto medio de SU.

39. Sabiendo que la intensidad luminosa I sobre una superficie es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente de luz y directamente proporcional al coseno del ángulo que forman los rayos con la normal a la superficie, hallar a qué altura h del piso debe situarse un foco F sobre la pared para que la iluminación sea máxima sobre un punto P del piso situado a distancia a de la pared.

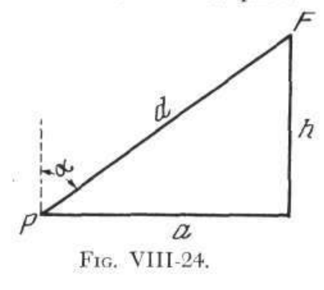


Fig. VIII-24.

Solución:

$$I = k\frac{\cos\alpha}{d^2}$$

(k: constante). Pero

$$\cos\alpha = \frac{h}{d} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

Luego, la función I se puede escribir

$$I = kh(a^2 + h^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

La anulación de la derivada de I respecto de h se verifica para $h = a : \sqrt{2}$ o, lo que es lo mismo, para $\alpha \sim 54°44'$.

40. Suponiendo que la potencia W suministrada por una pila de Volta sea RI^2, donde R es la resistencia del circuito, $I = \dfrac{E}{R + r}$ es la intensidad de la corriente que produce, E su fuerza electromotriz y r la resistencia interior de la pila, determinar para qué valor de R es máxima W.

R: $R = r$.

41. Se acostumbra llamar ventana normanda a la que resulta de sumar un rectángulo con un semicírculo en la parte superior. Si se conoce el perímetro p de dicha ventana, ¿cuáles deberán ser sus dimensiones para que la entrada de luz sea máxima?

R: Long. base rect.: $\frac{2p}{4+\pi}$; Long. altura rect.: $\frac{p}{4+\pi}$.

42. Se traza por un punto A interior de un círculo de radio r una cuerda PQ. Demostrar que la suma s de los cuadrados de los segmentos PA y AQ es mínima cuando la cuerda es normal al diámetro que pasa por A y máxima cuando la cuerda coincide con el diámetro.

Solución: Llamemos α al $\widehat{PAO}$.

En el ΔPAO,

$$r^2 = AP^2 + AO^2 - 2AP \cdot AO \cdot \cos\alpha. \qquad [1]$$

En el ΔQAO,

$$r^2 = AQ^2 + AO^2 + 2AQ \cdot AO \cdot \cos\alpha. \qquad [2]$$

Sumando,

$$2r^2 = s + 2 \cdot AO^2 + 2 \cdot AO \cos\alpha \, (AQ - AP),$$

de donde

$$s = 2\,(r^2 - AO^2) - 2 \cdot AO \cos\alpha \, (AQ - AP). \qquad [3]$$

Fig. VIII-25.

Restando [1] y [2],

$$0 = AP^2 - AQ^2 - 2 \cdot AO \cos\alpha \, (AP + AQ),$$

o sea, simplificando $(AP + AQ)$,

$$AP - AQ = 2 \cdot AO \cos\alpha.$$

Reemplazando en [3] resulta

$$s = 2\,(r^2 - AO^2) + 4 \cdot AO^2 \cos^2\alpha.$$

Derivamos respecto de α, única variable de esta expresión,

$$s' = -8 \cdot AO^2 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha = 0.$$

Las soluciones $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ y $\alpha = 0$ verifican la ecuación; la primera da el s mínimo ($AO \perp PQ$) y la segunda el s máximo ($AO \parallel PQ$, o sea, PQ es un diámetro).

43. Por un punto $P(a, b)$ pasa una recta de pendiente m (variable) que corta a los ejes en los puntos A y B, respectivamente. ¿Cuál debe ser el valor de m para que

a) El área del triángulo AOB sea mínima?
b) La longitud AB sea mínima?
c) El valor $OA + OB$ sea mínimo?
d) La distancia de O a la recta sea mínima?

R: a) $m = -\frac{b}{a}$; b) $m = \left(-\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$; c) $m = -\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; d) $m = -\frac{a}{b}$.

44. Dado un triángulo del que se conocen la base b y la suma s de los otros dos lados a y c, probar que su área es máxima cuando a y c son iguales.

[El cuadrado del área A^2 es, de acuerdo a la fórmula de Herón, con $a + b + c = 2p$ y $a + c = s$,

$$A^2 = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c) = p\,(p-b)\,(p-a)\,(p-s+a);$$

ésta es una función de la única variable a. La anulación de su derivada respecto de a da $a = c$, es decir, se trata de un triángulo isósceles].

45. Un canal abierto cuyos lados tienen una inclinación de 45° tendrá 16 m² de sección. ¿Cuáles serán las dimensiones del canal para el caso de que la altura h sea mínima?

Solución: Perímetro p del canal abierto:

$$p = b + 2\sqrt{h^2 + h^2} = b + 2\sqrt{2}h. \qquad [1]$$

Area de la sección:

$$A = \frac{1}{2}(b + b + 2h)\,h = $$
$$= (b + h)h = 16,$$

o sea,

$$b = \frac{16}{h} - h.$$

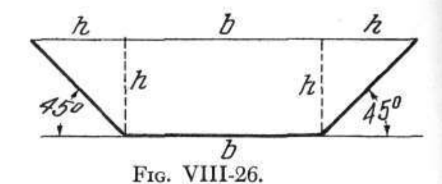


Fig. VIII-26.

Reemplazando en [1],

$$p = \frac{16}{h} - h + 2\sqrt{2}h = \frac{16}{h} + (2\sqrt{2} - 1)\,h.$$

Para que esta función de h sea mínima derivemos

$$p' = -\frac{16}{h^2} + 2\sqrt{2} - 1 = 0.$$

que se verifica para $h \sim 1{,}7$.

46. Una boya formada por dos conos rectos de hierro unidos por sus bases debe construirse con dos placas de hierro circulares de radio r. ¿Cuáles serán las dimensiones de la boya de volumen máximo?

R: Altura total $= \frac{\sqrt{3}}{3} r$; radio de las bases $= \sqrt{0{,}66}\; r$.

47. La velocidad v de una onda de longitud λ en agua profunda está dada por la fórmula

$$v = \sqrt{\frac{\lambda}{a} + \frac{a}{\lambda}},$$

donde a es una constante. ¿Cuál es el valor de λ que hace mínima la velocidad?

R: $\lambda = a$.

48. Dados dos puntos luminosos A y B de intensidades i e i', situados a distancia l uno del otro, hallar el segmento AB, en el cual la iluminación es mínima, sabiendo que la iluminación de cada foco está en razón directa de su intensidad y en razón inversa del cuadrado de la distancia.

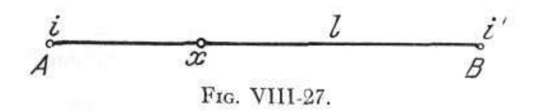


Fig. VIII-27.

R: $x = \frac{l\sqrt[3]{ki}}{\sqrt[3]{k'i'} + \sqrt[3]{ki}}$, siendo k y k' las constantes de proporcionalidad.

49. Un triángulo isósceles de perímetro p (constante) gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Cuál será la longitud de la base b cuando el volumen del cono sea máximo?

R: $b = \frac{2}{5}p$.

50. Hallar sobre la recta $y = x$ un punto P tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(a, 0)$, $B(0, b)$ y $C(-a, 0)$ sea mínima.

R: $P\left(\frac{1}{6}b, \frac{1}{6}b\right)$.

51. Dado un punto $A(a, 0)$ sobre el eje de la parábola $y^2 = 2px$ determinar cuál es el punto P de ésta más próximo a A.

R: $x_p = a - p$.

[Basta hallar el mínimo del cuadrado de la distancia d^2 entre $A(a, 0)$ y $P(x, y)$, o sea, de $d^2 = y^2 + (a - x)^2 = 2px + (a - x)^2$].

52. Hallar el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la parábola $y^2 = 4x$ si el lado más alejado del vértice de la parábola está a distancia $d = 6u$ de él.

R: Area $= 16\sqrt{2}u^2$.

53. Sea $Q(x_1, y_1)$ el punto de la curva $y = f(x)$ al cual la distancia d desde un punto cualquiera $P(a, b)$ es máxima o mínima. Demostrar que la recta determinada por los puntos P y Q es normal a la curva.

Solución: La distancia de P a un punto cualquiera de la curva es

$$d^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 = f(x).$$

Esta será máxima o mínima cuando $f'(x) = 0$, o sea, cuando

$$f'(x) = 2[(x - a) + (y - b)y'] = 0.$$

La abscisa del punto Q será entonces

$$x_1 = a - (y_1 - b)y'_1.$$

La recta determinada por los puntos $P(a, b)$ y $Q(x_1, y_1)$ tiene la siguiente ecuación:

$$y = -\frac{1}{y'_1}x + \left(b + \frac{a}{y'_1}\right)$$

cuya pendiente es precisamente la de la normal a la curva en el punto Q.

54. Hallar el mayor rectángulo inscriptible en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

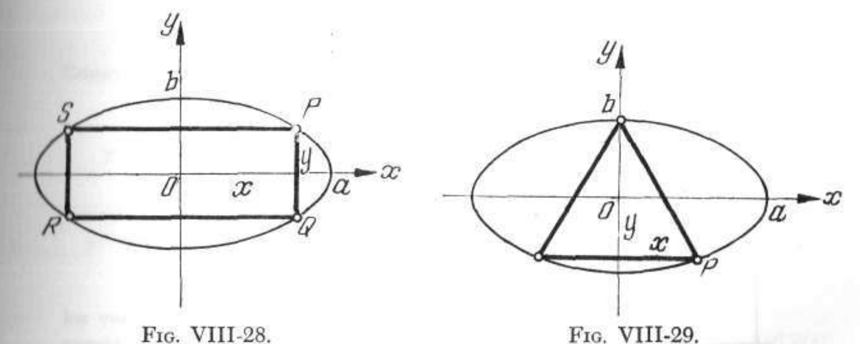


Fig. VIII-28. Fig. VIII-29.

Solución: Sean (x, y) las coordenadas del vértice P del rectángulo; su área A será $A = 4xy$, pero x e y están vinculados por la ecuación de la elipse, donde

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad [1]$$

Entonces

$$A = 4x\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

o bien,

$$A^2 = \frac{16b^2}{a^2}(x^2a^2 - x^4) = f(x);$$

para hallar el máximo de esta función debe ser $f'(x) = 0$, y ello se verifica para $2xa^2 = 4x^3$, o sea, $x = \frac{\sqrt{2}a}{2}$, y a partir de [1], $y = \frac{\sqrt{2}}{2}b$. Luego, el rectángulo de mayor área inscriptible en la elipse dada tiene sus lados iguales a $\sqrt{2}a$ y $\sqrt{2}b$. (fig. 28).

55. Si A es el área de un rectángulo dado, ¿cuál es el área A_1 de la elipse mínima que puede circunscribírsele?

R: $A_1 = \frac{1}{2}\pi A$.

56. Se inscribe en la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ un triángulo isósceles con vértice $(0, b)$. ¿Cuál es la ecuación de la base del triángulo de área máxima?

R: $y = -\frac{1}{2}b$, con las notaciones de la figura 29.

57. La suma de las superficies de una esfera y de un cubo está dada. Demostrar que la suma de sus volúmenes será mínima cuando el diámetro de la esfera sea igual a la arista del cubo.

3. CONCAVIDAD, CONVEXIDAD E INFLEXION DE LAS CURVAS

Se dice que una curva tiene su *concavidad* hacia el eje de las y positivas en un punto x_0 cuando está por encima de la tangente a la curva en ese punto. Tal es el caso de todos los puntos del arco ABC.

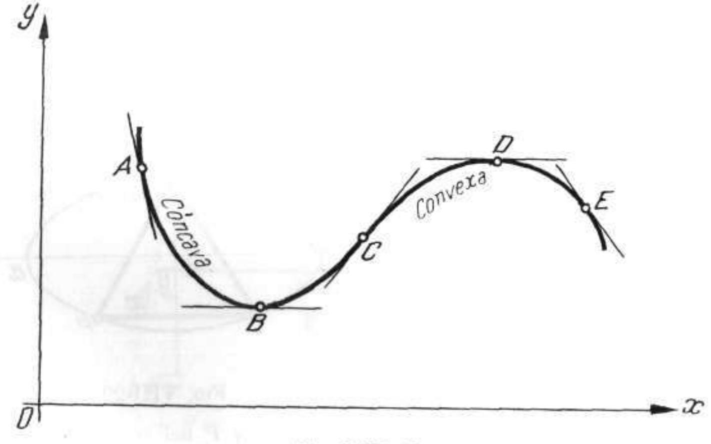


Fig. VIII-30.

Como la pendiente en A es negativa, en B es nula y en C es positiva, esto significa que la derivada y' es *creciente*, pues pasa con continui-

dad de valores negativos a valores positivos. Siendo y' creciente, su derivada y'' debe ser positiva.

Una función que tiene su concavidad hacia el eje de las y positivas tiene en esos puntos la derivada segunda positiva.

Análogamente, en el arco *CDE* la curva está por debajo de la tangente; se dice que es convexa o que tiene su concavidad hacia el eje de las y negativas; la derivada y' es decreciente y, por consiguiente, su derivada y'' es negativa.

Una función que tiene su concavidad hacia el eje de las y negativas tiene en esos puntos la derivada segunda negativa.

Un punto como el C de la figura 30, en donde la tangente *atraviesa* a la curva, se dice que es de *inflexión*. Allí la derivada segunda debe ser *nula*, pues si fuera positiva, sería cóncava hacia el eje de las y positivas, y si fuera negativa, sería cóncava hacia el eje de las y negativas.

La afirmación recíproca no es cierta, pues una función puede tener derivada segunda nula en un punto y no poseer allí un punto de inflexión. Así, la función $y = x^4$ tiene $y'' = 12x^2$, que se anula en el origen, y allí la función tiene un mínimo. Lo que sucede es que $y''' = 24x$ también se anula en el origen.

En general, si en un punto es $y'' = 0$ e $y''' \neq 0$, habrá inflexión.

EJEMPLOS:

1º) Determinar los puntos de inflexión, la concavidad y la convexidad de la función

$$y = \frac{x^3}{4 + x^2}.$$

Como es

$$y' = \frac{x^2\,(12 + x^2)}{(4 + x^2)^2}\,;$$

$$y'' = \frac{8x\,(12 - x^2)}{(4 + x^2)^3}$$

los valores que anulan a la segunda derivada, es decir, los posibles puntos de inflexión, son

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2\sqrt{3}; \quad x_3 = -2\sqrt{3}.$$

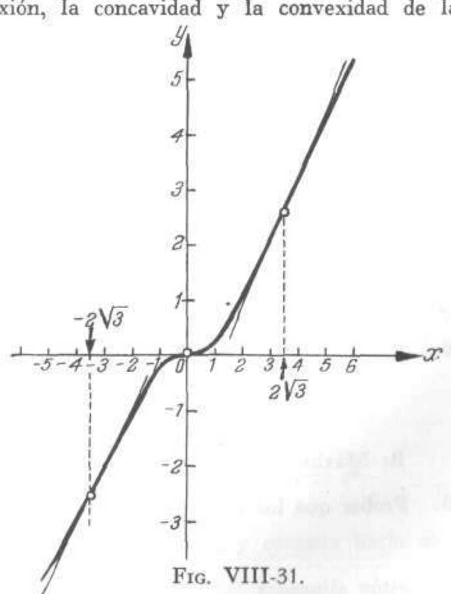


FIG. VIII-31.

Determinar los puntos de inflexión y la concavidad de las curvas

4. $$y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 5.$$

R: Puntos de inflexión: (4, 251) y (2, 107). Para $x < 2$ y $x > 4$, cóncava hacia arriba. Para $2 < x < 4$, cóncava hacia abajo.

5. $$y = 1 + (x - 2)^3.$$

R: Punto de inflexión: (2, 1). Para $x > 2$, cóncava hacia arriba. Para $x < 2$, cóncava hacia abajo.

6. $$y = 3x^4 - 4x^3 + 1.$$

R: Puntos de inflexión: (0, 1) y $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$. Para $x < 0$ y $x > \frac{2}{3}$, cóncava hacia arriba. Para $0 < x < \frac{2}{3}$, cóncava hacia abajo.

Estudiar la concavidad y los puntos de inflexión de las curvas

7. $y = x^3 - 12x - 2$.

8. $y = x^3 - 3x^2$.

Trazar los gráficos.

R: 7. Punto de inflexión: (0, − 2). Para $x < 0$, cóncava hacia abajo. Para $x > 0$, cóncava hacia arriba.

8. Punto de inflexión: (1, − 2). Para $x < 1$, cóncava hacia abajo. Para $x > 1$, cóncava hacia arriba.

9. Determinar los puntos de inflexión de la curva

$$y = \sqrt[3]{x - 2}.$$

R: Inflexión en $x = 2$, convexidad si $x > 2$ y concavidad si $x < 2$.

Determinar los puntos de inflexión de las curvas

10. $y = x^2(6 - x)$. R: $x = 2$.

11. $y = \dfrac{5}{6 + x^2}$. R: $x = 2\sqrt{3}$.

12. $y = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$. R: $x = -2$.

13. $y = \dfrac{1}{2}(x^3 - 6x^2)$. R: $x = 2$.

14. $y = \dfrac{x^3}{a^2 + x^2}$. R: $x = 0$; $x = \pm\sqrt{3}a$.

15. $y = a\sqrt{\dfrac{a - x}{x}}$. R: $x = \dfrac{3}{4}a$.

16. $y = xe^x$. R: $x = -2$.

17. $y = \operatorname{tg} x - 4x$. R: $x = 0$; $x = \pi$.

18. Hallar el punto máximo y los puntos de inflexión de la "curva de error"

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

R: Máximo para $x = 0$; puntos de inflexión para $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

19. Probar que los puntos de inflexión de la curva

$$y = \frac{1 - x}{1 + x^2}$$

están alineados.

Siendo el denominador de y'' siempre positivo, las variaciones de signo son las del numerador. Así resulta,

para $-\infty < x < -2\sqrt{3}$, $y'' > 0$: cóncava hacia el eje de las y positivas;

$-2\sqrt{3} < x < 0$, $y'' < 0$: cóncava hacia el eje de las y negativas;

$0 < x < 2\sqrt{3}$, $y'' > 0$: cóncava hacia el eje de las y positivas;

$2\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' < 0$: cóncava hacia el eje de las y negativas;

Para construir el gráfico téngase en cuenta que y' se anula sólo en el origen, pero que allí no hay ni máximo ni mínimo, pues se trata de un punto de inflexión. Además, la función es impar, pues $f(x) = -f(-x)$ y, por consiguiente, basta considerar los valores positivos de x y el resto de la curva resultará por simetría respecto del origen. Por otra parte, dividiendo queda

$$y = \frac{x^3}{4+x^2} = x - \frac{4x}{4+x^2},$$

resultando como asíntota de la curva la recta $y = x$.

2°) Puntos de inflexión y trazado de la función

$$y = 4 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$$

en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

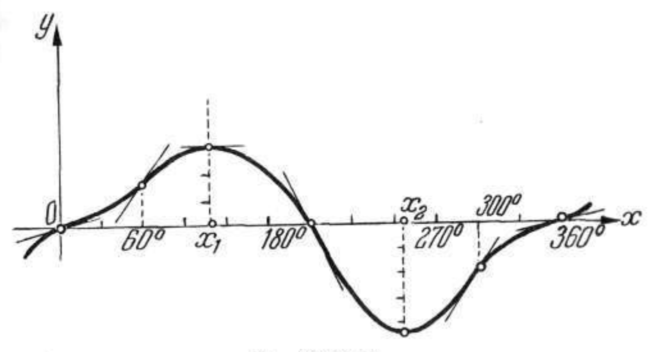


Fig. VIII-32.

Calculamos

$$y' = 4 \cos x - 2 \cos 2x,$$

$$y'' = -4 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen} 2x = 4 \operatorname{sen} x\,(2 \cos x - 1).$$

En el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 360°$, y'' se anula para $x = 0°, 60°, 180°, 300°, 360°$. Obsérvese, además, que la derivada primera se anula para $x_1 = 111°30'$ y $x_2 = 248°30'$ y que en x_1 hay un máximo y en x_2 un mínimo.

Ejercicios:

Determinar la concavidad de las curvas

1. $y = x^2$. 2. $y = x^3$. 3. $y = x^4$.

R: 1. Cóncava hacia arriba para todo x.

2. Cóncava hacia arriba a la derecha del origen y cóncava hacia abajo a la izquierda.

3. Cóncava hacia arriba para todo x.

R: Esos puntos resultan ser $(-1,\ 1)$; $\left(2+\sqrt{3},\ \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$; $\left(2-\sqrt{3},\ \frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$, que están alineados.

20. La ecuación de Van der Waals para la presión p, el volumen v y la temperatura constante T de un gas es

$$p=\frac{RT}{m\,(v-b)}-\frac{a}{v^2},$$

con R, m, b, a constantes. Hallar el valor de T (temperatura crítica) para el cual la tangente en el punto de inflexión es horizontal.

Solución: A cada valor constante de T (isoterma) corresponde una función $p(v)$.

Si la tangente es horizontal, debe ser en ese punto $p'(v)=0$; además, si se trata de un punto de inflexión, se verifica que $p''(v)=0$.

La solución del sistema de ecuaciones:

$$p'=-\frac{RT}{m\,(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3}=0, \qquad [1]$$

$$p''=\frac{2RT}{m\,(v-b)^3}-\frac{6a}{v^4}=0, \qquad [2]$$

satisface las condiciones pedidas. La raíz $v=\frac{8am}{9RT}$, reemplazada en [2], da la temperatura crítica $T=\frac{8am}{27Rb}$.

4. CALCULO DE MAXIMOS Y MINIMOS SIN DERIVADAS

Si bien el procedimiento general de resolver los problemas de máximos y mínimos es el explicado anteriormente utilizando las derivadas, resulta muy instructiva la consideración de los métodos sintéticos para resolver esos mismos problemas.

I. Distancias mínimas: Dada una recta r y dos puntos A y B en un mismo semiplano respecto de r, determinar el camino APB de longitud mínima, siendo P un punto de r (fig. 33).

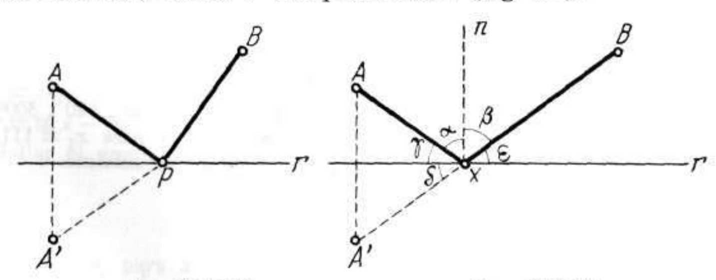


Fig. VIII-33. Fig. VIII-34.

Si se considera el punto A' simétrico de A respecto de r, resulta la quebrada $A'PB$ de igual longitud que la quebrada APB, pues, evidentemente, es $AP=A'P$. Entre todas las quebradas $A'PB$ con P

variable la de longitud mínima está dada por el segmento $A'B$ que determina sobre r el punto X. En esta forma el problema queda resuelto. Además, como es, con las notaciones de la figura 34,

$\gamma = \delta$ por la simetría de A y A',

$\delta = \varepsilon$ por ser ángulos opuestos por el vértice,

resulta $\gamma = \varepsilon$. Si en X trazamos la semirrecta n perpendicular a r, resulta $\alpha = \beta$ por ser complementos de los ángulos γ y ε. Por consiguiente, el camino mínimo está dado por los segmentos AX y XB que forman ángulos iguales con la normal.

El ángulo de incidencia (α) *es igual al ángulo de reflexión* (β). (Teorema de Heron).

APLICACIÓN:

a) TANGENTE A LA ELIPSE: De acuerdo al ejercicio anterior la poligonal APB de longitud mínima corresponde a AXB, con $\gamma = \varepsilon$. Sea d la longitud $AX + XB$. El lugar geométrico de todos los puntos X tales que la suma $AX + XB$ sea igual a d constante es una elipse de focos A y B y eje $MN = d$ (fig. 35). Esta elipse resulta tangente a la recta r en X. En efecto, si r fuera secante a la elipse, cualquier punto X' de la cuerda interior sería tal que $AX' + X'B < d$, contra lo demostrado anteriormente de que X determinaba la poligonal de longitud mínima.

Siendo $\gamma = \varepsilon$ queda demostrado el teorema que afirma que la tangente a la elipse en un punto X cualquiera forma con los radios vectores AX y BX (determinados por los focos y el punto X) ángulos iguales. O, lo que es lo mismo, que la tangente y la normal a una elipse en un punto X constituyen las 2 bisectrices de los ángulos determinados por los radios vectores correspondientes.

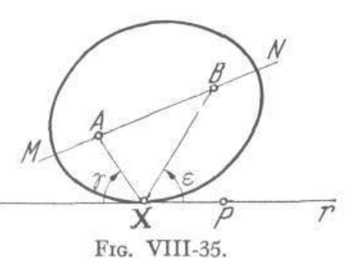


FIG. VIII-35.

b) TRIÁNGULO INSCRIPTO DE PERÍMETRO MÍNIMO: Dado un triángulo ABC se trata de determinar un triángulo inscripto MNF tal que su perímetro sea mínimo.

Supongamos que tal triángulo sea el MNP (de la fig. 36). Considerado el vértice M, por ejemplo, los lados MN y NP deben formar ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$ iguales, pues, de no ser así, estos dos segmentos se pueden sustituir por otros de modo tal que resulten iguales esos ángulos, con lo cual los segmentos resultarían de longitud menor. Lo mismo puede decirse

considerando los vértices N y P. Por consiguiente, debe resultar $\hat{1} = \hat{2}$; $\hat{3} = \hat{4}$; $\hat{5} = \hat{6}$. Esta propiedad la posee precisamente el *triángulo órtico*, es decir, el determinado por las 3 alturas AN, BP y CM (fig. 37), tal como resulta de un teorema de geometría elemental. En efecto, el cuadrilátero $MONB$ es inscriptible porque los ángulos opuestos son suplementarios (es suficiente observar que los ángulos ONB y OMB son rectos). En la circunferencia que pasa por M, O, N y B el ángulo NBO está inscripto en el arco ON y también está inscripto en ese arco el ángulo OMN. Luego, NBO y OMN son iguales. Como el ángulo NBO es complementario del ángulo C y el ángulo NMB es complementario del ángulo OMN, resultan iguales los ángulos que hemos señalado con 2 arquitos en la figura 37.

En la misma forma se demuestra que el ángulo C es igual al ángulo PMA, y la propiedad del triángulo órtico queda demostrada, pues el mismo razonamiento se puede hacer con los ángulos de vértice en N y en P.

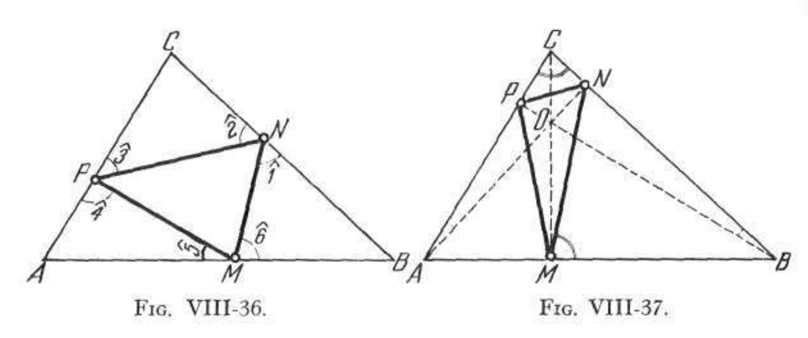


Fig. VIII-36. Fig. VIII-37.

Observaciones:

1°) Esta demostración es válida si el triángulo tiene sus 3 ángulos agudos. El lector podrá ver, en un triángulo obtusángulo, haciendo el dibujo, que el triángulo determinado por los pies de las alturas no resulta inscripto.

2°) Para hacer la demostración hemos admitido la existencia de un triángulo inscripto MNP de longitud mínima. ¿Pero es legítimo el admitir esa *existencia*? Este es un punto sumamente delicado en ciertas demostraciones matemáticas. Con decir "sea MNP el triángulo de perímetro mínimo" no se asegura su existencia, como puede comprobarse en el caso del triángulo obtusángulo de la observación anterior.

II. Dada una recta r y 2 puntos A y B en distintos semiplanos respecto de r, se trata de determinar el punto P de r tal que la diferencia $AP - BP$ sea, en valor absoluto, máxima (fig. 38).

Obsérvese que esta diferencia siempre será positiva, excepto cuando A y B sean simétricos respecto de r, en cuyo caso para cual-

quier punto P la diferencia es nula. También si P está infinitamente alejado, la diferencia será nula.

Si se considera el punto B' simétrico de B respecto de r, la diferencia $AP - BP$ será igual a la diferencia $AP - B'P$. Pero esta diferencia es siempre menor que AB' (porque un lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos), excepto para el punto P', intersección de AB' con r, que es exactamente igual a la diferencia. Luego, P' resuelve el problema. Evidentemente, con las notaciones de la figura 39 es $\alpha = \beta$.

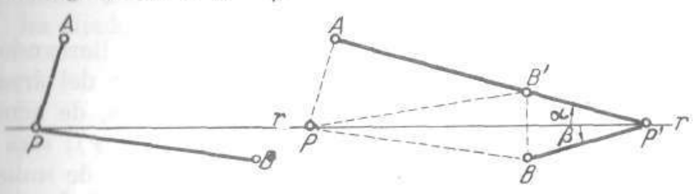


Fig. VIII-38. Fig. VIII-39.

Aplicación: Tangente a la hipérbola: De acuerdo al ejercicio anterior el punto P', que determina la diferencia $AP' - BP'$ = diferencia máxima, se encuentra en la intersección de r con AB', siendo B' el simétrico de B. El lugar geométrico de los puntos P' tales que la diferencia d sea constante es una hipérbola de focos A y B. La recta r es tangente a la hipérbola, pues si fuera secante, los puntos P de la cuerda darían una diferencia $AP - BP$ mayor que d, contrario a lo demostrado que d era máximo. Por consiguiente, la tangente a la hipérbola en P es tal que resulta bisectriz del ángulo APB que forman los radios vectores. La otra bisectriz de los radios vectores es la normal n a la curva.

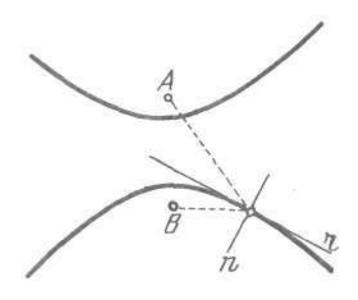


Fig. VIII-40.

III. Para calcular cuándo es máximo el producto de 2 números x e y cuya suma $x + y = s$ es constante basta observar la identidad

$$xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right] = \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \qquad [1]$$

y el mayor valor de esta expresión se obtendrá cuando sea $x = y$, pues para cualquier otro valor habrá que restarle a la cantidad fija $\frac{1}{4}s^2$ un valor positivo.

Este teorema, que ya enunciaron Euclides y Apolonio, se puede interpretar geométricamente en la siguiente forma: entre los rectángulos de perímetro dado el de área máxima es el cuadrado. O, lo que

es lo mismo: entre todos los rectángulos de área dada el de perímetro mínimo es el cuadrado.

APLICACIÓN:

a) El producto de 2 números cuya diferencia es constante es mínimo cuando los números son opuestos. (Utilícese la identidad [1]).

b) Entre todos los triángulos de igual base b y perímetro constante el de mayor área es el isósceles.
Si x e y son los otros 2 lados del triángulo, llamando $2p$ al perímetro, es $2p = b + x + y$, y el cuadrado del área (que es máximo al mismo tiempo que el área) es, de acuerdo a la fórmula de Heron, $p(p-b)(p-x)(p-y)$; será máximo cuando lo sea el producto $(p-x)(p-y)$ de suma constante $(= b)$. Este producto es máximo si los factores son iguales, es decir, si es $x = y$.

EJERCICIOS:

1. Demostrar que la suma mínima de 2 números recíprocos es 2. [Utilícese la desigualdad $(x-1)^2 \geqslant 0$].
2. Demostrar que la suma máxima de 2 números negativos recíprocos es -2. [Aplíquese la desigualdad $(x+1)^2 \geqslant 0$].
3. Demuéstrese que el producto $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$ es siempre $\leqslant \frac{1}{2}$ y $\geqslant -\frac{1}{2}$. ¿Para qué valores de x alcanza los valores máximo y mínimo? (Téngase en cuenta la fórmula de $\operatorname{sen} 2x$).
4. Demostrar que la suma de los cuadrados de 2 números cuya suma $x + y$ es constante es mínima cuando $x = y$.
5. Demostrar que la suma de los cuadrados de 2 números cuyo producto positivo xy es constante es mínima cuando es $x = y$.
6. Entre todos los rectángulos de perímetro dado la mínima diagonal corresponde al cuadrado.
7. Entre todos los rectángulos de área dada el cuadrado es el que tiene la diagonal mínima.
8. Demostrar que entre todos los productos de n factores positivos, $x_1 x_2 \ldots x_n$, cuya suma es constante, el máximo ocurre cuando los n factores son iguales. [Sustitúyanse, por ejemplo, los números distintos x_i y x_j por su semisuma $\frac{1}{2}(x_i + x_j)$ de manera que la suma total no varíe; pero el producto aumenta, pues es $\frac{1}{4}(x_i + x_j)^2 > x_i \cdot x_j$, ya que siempre se verifica $(x_i - x_j)^2 > 0$ si $x_i \neq x_j$].

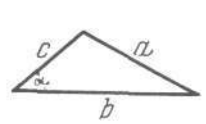
IV. TRIÁNGULOS DE ÁREA MÁXIMA Y PERÍMETRO MÍNIMO:

a) Entre todos los triángulos de los cuales se dan 2 lados el de área máxima es el rectángulo.

Si b y c son datos, el área S depende de α:

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \alpha,$$

y como el mayor valor de sen α es 1, para $\alpha = 90°$, resulta demostrada la proposición.



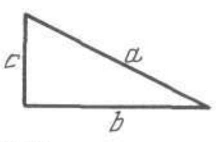


Fig. VIII-41.

b) Entre todos los triángulos de área dada S en los cuales se ha fijado un lado a el de perímetro mínimo es el isósceles.

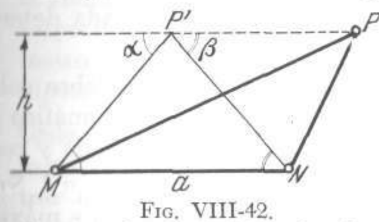


Fig. VIII-42.

Conocidos a y S queda determinada la altura $h = \frac{S}{2a}$. El camino mínimo MPN corresponde a P', con $\alpha = \beta$ (pág. 226), es decir, al triángulo isósceles.

c) Entre todos los triángulos de igual base y perímetro constante el de mayor área es el isósceles. En efecto, si el triángulo de área máxima fuera el MPN (fig. 43), con $MP \neq PN$, trazando por P la recta $PR \parallel MN$ su intersección con la mediatriz de MN determinaría un punto P', y el triángulo $MP'N$ tendría un perímetro menor, de acuerdo a lo visto en el ejercicio anterior. El triángulo isósceles $MP''N$, de igual perímetro que el MPN, tendrá una altura mayor que la del $MP'N$ y, por lo tanto, mayor superficie que el triángulo MPN. Por consiguiente, éste no puede ser el triángulo de área máxima.

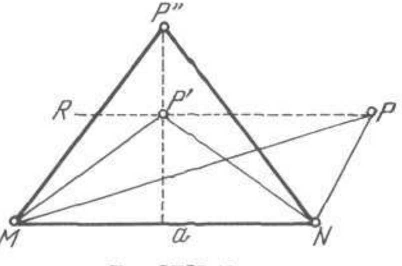


Fig. VIII-43.

d) Entre todos los triángulos de perímetro dado el de mayor área es el equilátero.

Supongamos, como en todos los ejercicios anteriores, que existe un triángulo de área máxima entre todos los triángulos de perímetro dado. Si en este triángulo fijamos un lado, los otros dos deben ser iguales, de acuerdo al ejercicio anterior. Como ello puede hacerse fijando uno cualquiera de los lados, los 3 deben ser iguales.

Nota: Si los lados son x, y, z, con $x + y + z = 2p =$ constante, el cuadrado del área es, de acuerdo a la fórmula de Heron: $p(p-x)(p-y)(p-z)$. El producto de 3 factores positivos de suma constante es máximo cuando los factores son iguales (ejercicio 8, pág. 230), es decir, cuando $x = y = z$.

PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO: El problema isoperimétrico consiste en determinar la figura que con un perímetro fijado encierra el área máxima.

Los griegos han estudiado los problemas isoperimétricos más célebres:

1º) De entre todos los polígonos de perímetro dado determinar el que encierra el área máxima.

2º) De entre todas las figuras planas de perímetro dado determinar la que encierra el área máxima.

3º) De entre todos los cuerpos de superficie dada determinar el que encierra mayor volumen.

Estos problemas, y muchos más, figuran en la célebre colección de PAPPO DE ALEJANDRÍA, en donde afirma que el matemático ZENODORO, del siglo II antes de Cristo, es quien los ha estudiado y resuelto.

En los tiempos modernos ha sido el matemático alemán J. STEINER quien se ocupó especialmente de la determinación de los máximos y mínimos con métodos sintéticos. Estos métodos presentan un punto débil sobre la *existencia* de la solución buscada, al cual hemos hecho referencia en la observación 2ª) de página 228, y por eso en los estudios actuales se ha buscado y alcanzado una fundamentación rigurosa en base a los trabajos de HILBERT (1).

Admitiendo que *exista* la figura de perímetro dado que encierra el área máxima demostraremos que ella debe ser un *círculo*, es decir que debe estar limitada por una *circunferencia*.

1: La figura debe ser convexa. Pues si la figura que encierra el área máxima fuera cóncava, como la *ABCD* de la figura 44,

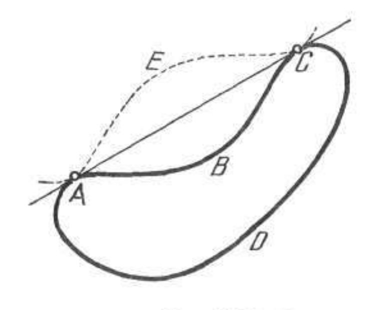


FIG. VIII-44.

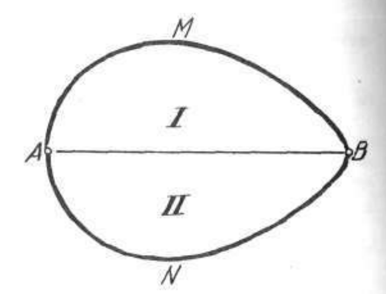


FIG. VIII-45.

(1) Pueden verse, en especial, *Questioni riguardanti le matematiche elementare* raccolte e coordinate da FEDERIGO ENRIQUES, artículos de A. PADOA y O. CHISINI. (Ed. Zanichelli).

Enciclopedia delle matematiche elementare e complementi a cura di L. BERZOLARI, G. VIVANTI e D. GIGLI, artículos de E. G. TOGLIATI en el volumen II, parte II. (Ed. Hoepli).

y si A y C determinaran puntos de una cuerda exterior a la figura, tomando la curva AEC simétrica de ABC respecto de AC habríamos determinado una figura (la $AECD$) de igual perímetro y que encerraría un área mayor, contra la hipótesis de que la figura primitiva encerraba el área máxima.

2: Sean A y B dos puntos de la figura 45, convexa, de área máxima tales que dividan al perímetro en 2 partes, AMB y ANB, iguales. Demostraremos que las áreas de las 2 partes, I y II, que determina la cuerda AB, deben ser iguales. En efecto, si fuera $I > II$, consideraríamos la figura I' simétrica de I respecto de AB y resultaría $I + I'$ una figura de igual perímetro que el de la figura dada y de área mayor, contra la hipótesis de que la figura $AMBNA$ encerraba el área máxima.

3: Cada uno de los arcos AMB y ANB de la figura de área máxima es una semicircunferencia. Para ello bastará demostrar que si M es un *punto cualquiera* del contorno convexo y AB es la cuerda que consideramos anteriormente, el ángulo

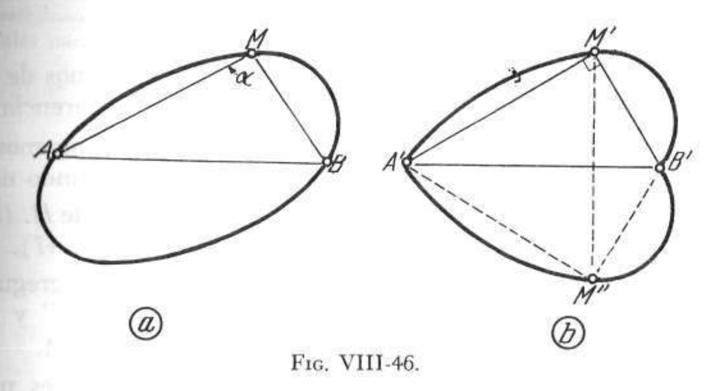


Fig. VIII-46.

$\alpha = A\hat{M}B$ es recto. Si no fuera un ángulo recto, construiríamos otra figura, tal como aparece en la figura 46 (b), en la cual, en lugar del triángulo AMB, dibujaríamos el triángulo $A'M'B'$, con $AM = A'M'$, $BM = B'M'$ y el ángulo en $M' = 90°$. Sobre $A'M'$ construimos luego una figura igual a la que subtiende AM y sobre $M'B'$ una igual a la que subtiende MB. Después construimos $AM''B'$ simétrica de $A'M'B'$ respecto de $A'B'$. La nueva figura total así obtenida tendrá el mismo perímetro que la figura dada y área mayor porque el triángulo $A'M'B'$ es mayor que el triángulo AMB, de acuerdo a lo visto anteriormente. Por consiguiente, para que la figura primitiva fuera la de área máxima deberá ser $\alpha = 90°$.

Hemos demostrado así que el contorno debe ser una figura compuesta por 2 semicircunferencias de diámetro coincidente, es decir, debe ser una circunferencia.

Consecuencias: Como consecuencia de este teorema fundamental deduciremos otros 2 teoremas.

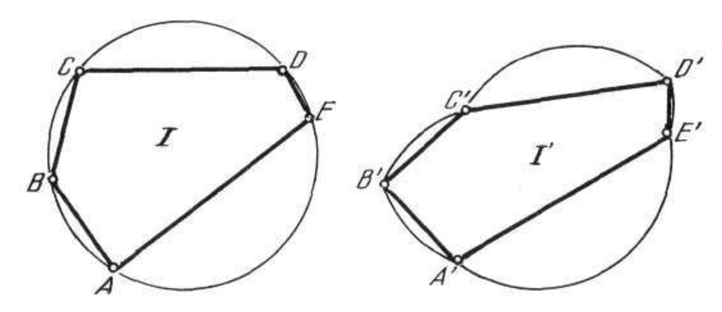


Fig. VIII-47.

Teorema de Cramer (1852): Entre todos los polígonos de lados dados el de área máxima es el inscriptible en una circunferencia.

Sean I y I' dos polígonos de lados iguales y supongamos que el primero sea inscriptible en una circunferencia y el segundo no.

Demostraremos que el área de I es mayor que el área de II. (Sean, para fijar las ideas, dos polígonos de 5 lados, como en la fig. 47).

Tracemos la circunferencia correspondiente de I y agreguemos en la figura I' los arcos circulares $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$ y $E'A'$ iguales, respectivamente, a los arcos AB, BC, CD, DE y EA.

El área encerrada por el círculo correspondiente a I es mayor que la figura isoperimétrica correspondiente de I', de acuerdo al teorema fundamental. Como las áreas de los segmentos circulares limitados por las cuerdas AB, BC, ... y las correspondientes de la otra figura limitadas por $A'B'$, $B'C'$, ... son iguales, resulta que el área I será mayor que el área I'.

Teorema de Zenodoro (del siglo II antes de Cristo): Entre todos los polígonos de n lados de igual perímetro el regular es el de área máxima.

Por de pronto, el polígono de perímetro dado y de área máxima debe tener sus lados iguales. En efecto, sea $ABCDEF$ el polígono de área máxima (fig. 48). Si AB y BC, por ejemplo, son distintos, consideramos un triángulo isósceles APC tal que $AP + PC = AB + BC$.

Como ya hemos visto (ej. IV c), entre todos los triángulos de los cuales se dan un lado y la suma de los otros dos el de área máxima es el isósceles; luego, el triángulo *APC* tiene un área mayor que el triángulo *ABC*, que tiene su mismo perímetro. Por consiguiente, la figura limitada por *APCDEF* tiene un área mayor que la figura primitiva. Entonces, en el polígono de área máxima los lados deben ser iguales.

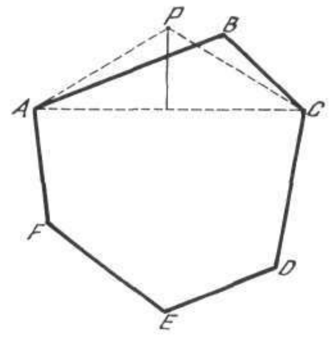


Fig. VIII-48.

Además, como por el teorema de Cramer el polígono de perímetro dado y que encierra el área máxima debe ser inscriptible en una circunferencia, resulta que el polígono debe ser *regular*.

En el muy recomendable libro de R. Courant y H. Robbins: *What is Mathematics?* (Oxford University Press, 1941) del cual existen dos traducciones en castellano, se considera además de los temas antes expuestos, métodos experimentales para la solución de problemas de mínimo.

CAPÍTULO IX

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

1. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea $f(x)$ una función continua que en los puntos $x = a$ y $x = b$ asume los valores $f(a)$ y $f(b)$, diferentes (fig. 1 y fig. 2) o iguales (fig. 3).

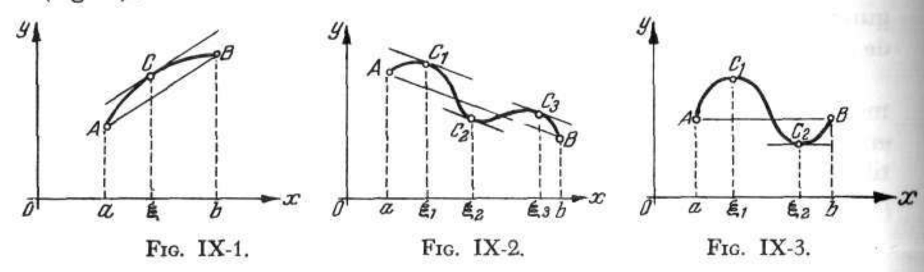


FIG. IX-1. FIG. IX-2. FIG. IX-3.

Supongamos que la función tenga una derivada $f'(x)$ también continua, es decir que la tangente a la curva $y = f(x)$ varíe con continuidad.

En los 3 casos representados *se puede ver* que *existe* por lo menos un punto C de la curva (de abscisa ξ) cuya tangente es paralela a la secante AB. Por consiguiente, la pendiente de esta secante será igual a la pendiente de la recta tangente en C.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pendiente de la secante } AB = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ \text{Pendiente de la tangente en } \xi = f'(\xi)\end{array}\right\} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

y tenemos el teorema del valor medio

$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(\xi). \qquad [1]$$

El incremento de una función continua y derivable es igual al incremento de la variable multiplicado por la derivada en un punto intermedio.

Si designamos con h la longitud del intervalo $(b - a)$, es decir, $b = a + h$, y siendo $a \lesssim \xi < b = a + h$, será $\xi = a + \theta h$, designando con θ un valor numérico comprendido entre 0 y 1 (si $\theta = 0$, es $\xi = a$, y si $\theta = 1$, es $\xi = b$).

El teorema del valor medio o de Lagrange será, con estas notaciones,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h), \qquad 0 < \theta < 1. \qquad [2]$$

También suele escribirse en la forma

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

Teorema de Rolle: En el caso particular de la figura 3, en el cual $f(a) = f(b)$, la igualdad [1] implica $f'(\xi) = 0$. Resulta así el teorema de Rolle:

Si una función continua y derivable toma valores iguales en 2 puntos, existe por lo menos un punto intermedio en el cual la derivada se anula.

Para una función cualquiera es imposible establecer una fórmula que dé exactamente el valor ξ del teorema del valor medio, pero lograremos determinarlo en algunos casos particulares.

1º) Sea $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ una función entera de 2º grado. Será

$$f(b) - f(a) = (Ab^2 + Bb + C) - (Aa^2 + Ba + C) =$$
$$= A(b^2 - a^2) + B(b - a) =$$
$$= (b - a)[A(b + a) + B],$$

y puesto que es

$$f'(x) = 2Ax + B; \qquad f'(\xi) = 2A\xi + B,$$

deberá ser

$$(b - a)[A(b + a) + B] =$$
$$= (b - a)(2A\xi + B).$$

Dividiendo por el factor $(b - a) \neq 0$ y simplificando resulta $\xi = \frac{1}{2}(a + b)$. El significado geométrico de esta conclusión es el siguiente: "La cuerda que une 2 puntos cualesquiera de una parábola de eje vertical es paralela a la tangente trazada en el punto que tiene como abscisa el promedio de las abscisas de los puntos considerados".

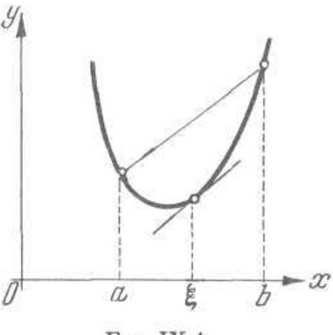


Fig. IX-4.

2º) Sea $f(x) = x^3$, $a = -2$, $b = +2$.

Será $f'(x) = 3x^2$, $f'(\xi) = 3\xi^2$, $f(b) = 8$, $f(a) = -8$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{8 - (-8)}{2 - (-2)} = 4.$$

O sea, $f'(\xi) = 3\xi^2 = 4$, y resulta $\xi = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Es decir, hay dos puntos, $\xi_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ y $\xi_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$, entre -2 y $+2$, donde la tangente a la curva $y = x^3$ es paralela a la cuerda que une los puntos $(-2, -8)$ y $(2, 8)$.

Verifíquense estos resultados mediante la representación gráfica en un diagrama cartesiano.

Ejercicios:

1. Determinar el punto ξ en el caso de la función

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{10}{3}x + 8$$

en el intervalo $2 \leqslant x \leqslant 5$. Efectúese la representación gráfica.

R: $\xi = 1 + \sqrt{7}$.

2. Determinar el punto ξ en el caso de la función

$$y = \operatorname{sen} x$$

en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$. Efectúese la representación gráfica.

R: $\xi \sim 0{,}88$ rad. $\sim 50°28'$.

3. Determinar el punto ξ para la función

$$y = x^2 + 2x - 1$$

en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$.

R: $\xi = \frac{1}{2}$.

4. Determinar el punto ξ en el caso de la función

$$y = x^{\frac{2}{3}}$$

en el intervalo $(0, 1)$.

R: $\xi = \frac{8}{27}$.

5. Determinar el punto ξ en el caso de la función

$$y = \sqrt{x - 1}$$

en el intervalo $a = 1$, $b = 3$.

R: $\xi = \frac{3}{2}$.

6. Determinar el punto ξ en el caso de la función

$$y = e^x$$

en el intervalo $(0, 1)$.

R: $\xi = \ln(e - 1)$.

Observaciones:

La deducción que hemos hecho del teorema del valor medio se basa en consideraciones intuitivas. Pero a veces "la vista engaña".

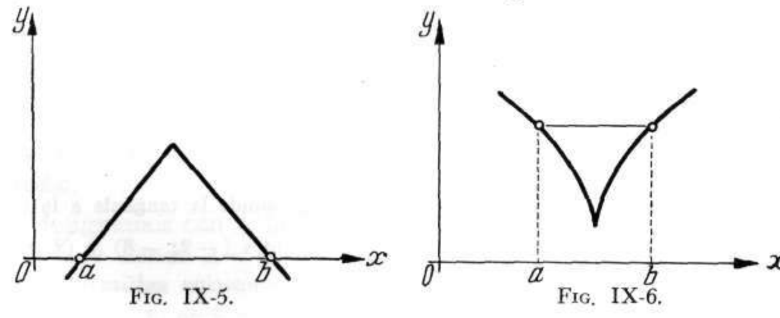


Fig. IX-5. Fig. IX-6.

En los gráficos de las figuras 5 y 6 la función $f(x)$ toma valores iguales en a y en b. Sin embargo, es evidente que en ningún punto intermedio se anula la derivada o, lo que es lo mismo, en ningún punto la tangente es horizontal. ¿Cómo se explica este hecho? ¿Está en contradicción con el teorema de Rolle? Revísense las hipótesis del teorema del valor medio y se hallará la respuesta.

Ejercicios:

1. Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. En los extremos del intervalo $(-1, +1)$ la función adopta

los valores -1 y $+1$, respectivamente. Por ello la pendiente de la cuerda que une esos puntos es 1. Pero siendo la derivada $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, sus valores no serán positivos en ningún punto del intervalo considerado. ¿Está esto en contradicción con el teorema del valor medio?

R: Obsérvese que no se cumplen las condiciones de continuidad exigidas por el teorema del valor medio, como lo muestra la representación grafica (figura V-8).

2. *En el ejercicio anterior determínese el punto* ξ *en el intervalo* (1, 2).

   R: $\xi = \sqrt{2}$.

3. Determinar el punto ξ en el caso de la función $y = \ln x$ en el intervalo (1, 2).

   R: $\xi = 1 : \ln 2$.

4. Considérese la función $y = x^3 - 12x$. Verifíquese que la derivada se anula en 2 puntos comprendidos entre las 3 raíces de $f(x) = 0$. Efectúese la representación gráfica.

   R: Las raíces son $x_1 = 0$; $x_2 = 2\sqrt{3}$; $x_3 = -2\sqrt{3}$, y las raíces de la derivada, $x' = 2$; $x'' = -2$.

5. La función $y = \operatorname{tg} x$ se anula para $x = 0$ y $x = \pi$. Sin embargo, la derivada $f'(x)$ es constantemente positiva en ese intervalo. ¿Por qué?

6. La función $y = x^{\frac{2}{3}}$ toma valores iguales para $a = -1$ y $b = 1$. Además, en el intervalo (a, b) toma valores finitos. Sin embargo, no se verifica el teorema de Rolle en este intervalo, pues la derivada no se anula. ¿Cuál de las hipótesis del teorema no se verifica?

El teorema de Rolle se puede demostrar *rigurosamente* si se admite la validez del teorema de Weierstrass, enunciado en la página 119, según el cual "toda función continua en un intervalo cerrado (a, b) alcanza un valor máximo M y un valor mínimo m": $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Veamos los casos que se pueden presentar:

1º) Si es $m = M$, la función es constantemente igual a este valor, y siendo nula la derivada de una constante, queda probado el teorema de Rolle.

2º) Si es $m \neq M$, estos valores no pueden corresponder ambos a los extremos a y b, puesto que hemos supuesto $f(a) = f(b)$. Luego, la función alcanza uno de esos valores m o M en un punto interior del intervalo (a, b). En ese punto (o puntos) la derivada debe ser nula, pues si fuera positiva, sería una función creciente, y si fuera negativa, sería decreciente, cosas ambas contrarias a la hipótesis que afirmaba que eran puntos mínimos o máximos.

Demostrado el teorema de Rolle, resulta fácil demostrar el teorema del valor medio de Lagrange:

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(\xi).$$

Basta para ello considerar la función

$$\varphi(x) = (b - a)\,[f(x) - f(a)] - (x - a)\,[f(b) - f(a)].$$

Esta función $\varphi(x)$ satisface las mismas condiciones de continuidad y derivabilidad que $f(x)$. Pero, además, es $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, y por

ello se le puede aplicar el teorema de Rolle que afirma que es $\varphi'(\xi) = 0$. En este caso resulta

$$\varphi'(\xi) = (b - a) f'(\xi) - [f(b) - f(a)] = 0,$$

y queda demostrado el teorema de Lagrange.

DOS TEOREMAS IMPORTANTES:

I) Si una función tiene una derivada nula en todos los puntos de un intervalo, es una constante.

En virtud del teorema del valor medio que establece la relación

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(\xi), \qquad a < \xi < x,$$

resulta, con $f'(\xi) = 0$, la igualdad $f(x) = f(a)$ para cualquier x. Esto significa $f(x) =$ constante.

Obsérvese que este teorema es el *recíproco* del teorema que afirma que la derivada de una constante es nula.

II) Si dos funciones tienen derivadas idénticas, difieren en una constante.

Si es $f'(\xi) = g'(\xi)$ para cualquier ξ de un intervalo (a, b), la derivada de la función $f(x) - g(x)$ será idénticamente nula en ese intervalo, y en virtud de I) deberá ser $f(x) - g(x) = k$, con k constante. Luego, es

$$f(x) = g(x) + k.$$

Este resultado está incluído en el importante teorema que afirma que

La condición necesaria y suficiente para que 2 funciones tengan igual derivada es que difieran en una constante.

La condición es necesaria. Pues si es $f(x) = g(x) + k$, con k constante, derivando resulta $f'(x) = g'(x)$.

La condición es suficiente: lo asegura el teorema II.

Este teorema es el fundamental del cálculo integral, pues éste se propone precisamente encontrar *todas* las funciones que tienen una derivada dada. Ha quedado ahora demostrado que si se posee *una* función que tiene una derivada dada, se poseen *todas* sin más que agregarle una constante.

2. TEOREMA DE CAUCHY

Consideremos una combinación lineal de 2 funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas y derivables:

$$f(x) + k\,g(x). \qquad [1]$$

Determinemos k de modo que esta expresión tome valores iguales en dos puntos: $x = a$, $x = b$:

$$f(a) + k\,g(a) = f(b) + k\,g(b).$$

Debe ser, entonces,

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(a) - g(b)}.$$

Reemplazando en [1] se tiene la expresión

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g(x),$$

que, de acuerdo al teorema de Rolle, debe poseer una derivada que se anule en un punto intermedio ξ del intervalo (a, b):

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(\xi) = 0,$$

es decir,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Escribiendo x en lugar de b tenemos el teorema de Cauchy:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

siendo $a < \xi < x$. Es decir: *El cociente de incrementos de dos funciones continuas y derivables en un intervalo es igual al cociente de las derivadas correspondientes en un punto interior del intervalo.*

En particular, si es $g(x) = x$, tenemos nuevamente el teorema del valor medio de Lagrange.

3. LIMITES INDETERMINADOS. REGLA DE L'HOSPITAL

I) El teorema de Cauchy permite en muchos casos calcular en forma sencilla el límite de un cociente de 2 funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ en el caso de que ambas funciones tiendan a cero cuando x tiende a un valor dado. En otras palabras, se podrá salvar la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas y derivables que se anulan en el punto $x = a$. Puesto que es $f(a) = g(a) = 0$, se podrá escribir, entonces,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

Aplicando al segundo miembro el teorema de Cauchy resulta

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{con } a < \xi < x.$$

Si hacemos tender x hacia a, ξ también tenderá hacia a; se tiene pues

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Si es $g'(a)\neq 0$, el cociente de las derivadas en $x=a$ tiene sentido y el límite buscado será igual a ese cociente. Esta relación constituye la *regla de L'Hospital* (en homenaje al matemático francés Guillermo L'Hospital que la dio a conocer y que fue discípulo del eminente sabio Juan Bernouilli) enunciada hacia el año 1700.

Si el cociente de las derivadas resulta del tipo $0:0$, se aplica reiteradamente la regla de L'Hospital, calculando sucesivamente el cociente de las derivadas segundas, terceras, ..., en $x=a$.

EJEMPLOS:

1º) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Aplicando la regla es $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$, concordando con el resultado ya conocido (pág. 103).

2º) Calcular $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$.

La aplicación de la regla da

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1-1}{3\cdot 0}=\frac{0}{0}.$$

Será necesario aplicar la regla de las derivadas una segunda vez:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{6x}=\frac{0}{0}.$$

Para salvar la indeterminación aplicamos por tercera vez la regla de L'Hospital y resulta

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

EJERCICIOS:

Calcular, aplicando la regla de L'Hospital, los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$. R: 4.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$. R: 5.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{3x^2+2x-5}$. R: 0.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\operatorname{sen} x}$. R: 16.
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$. R: n.

Verificar los siguientes límites:

6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\operatorname{sen} x}}{x-\operatorname{sen} x}=1$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\operatorname{sen} x}=2$.
9. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi}\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\pi-2x}=0$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0.$

11. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}\pi} \dfrac{(1 - \operatorname{sen} 2x)\sec^2 x}{1 + \cos 4x} = \dfrac{1}{2}.$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = 2.$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \operatorname{sen} x - 1}{\ln(1 + x)} = 2.$

14. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} 2x - \cos x} = 1.$

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x}{\ln x} = -1.$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}.$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a + x)^x - a^x}{x^2} = \dfrac{1}{a}.$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x - x^3} - \sqrt[3]{x}}{1 - x} = \dfrac{5}{6}.$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}^2 x}{x^3} = 0.$
(Aplíquese la regla 3 veces).

indeterminación insalvable.

Consideremos las funciones $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$ y $g(x) = x$, que tienden a 0 cuando $x \to 0$. ¿Qué sucede cuando se intenta aplicar la regla de L'Hospital? Como es $f(x) : g(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$ y esta función no tiene límite cuando $x \to 0$, resulta que la indeterminación no se puede salvar. Los gráficos de $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$ y de $x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$ se pueden ver en las páginas 120 y 415.

23 *El punto rectificante.*
Considérese una circunferencia de centro O y radio r y una tangente t en T. Si sobre t se lleva un segmento TL de longitud igual a la longitud del arco TA correspondiente a un ángulo central α, queda determinado sobre la recta TO un punto P en la intersección de la prolongación del diámetro con AL. Demuéstrese que la posición límite de P cuando $\alpha \to 0$ es tal que resulta $PT = 3r$.

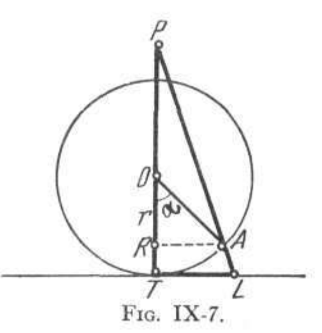


Fig. IX-7.

Así queda justificada la regla de Snelius-Huyghens para rectificar aproximadamente un arco AT: se une el *punto rectificante* P ($TP = 3r$) con A y se determina el punto L en la intersección de PA con la tangente t en T.

La longitud de TL da aproximadamente la longitud del arco. Compruébese que el error relativo producido en la rectificación de un arco con esta regla, para un arco $\leqslant 60°$, es inferior al 1 %.

Solución: Trazando $AR \perp OT$ se tiene, de acuerdo a las notaciones de la figura, designando con α el ángulo TOA medido en radianes y en virtud de la semejanza de triángulos,

$$\frac{PR}{PT} = \frac{AR}{TL}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{PT - PR}{PT} = \frac{TL - AR}{TL}.$$

Como

$$PT - PR = RT = OT - OR = r - r\cos\alpha = r\,(1 - \cos\alpha),$$
$$TL - AR = \alpha r - r\,\mathrm{sen}\,\alpha = r\,(\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha),$$

es

$$PT = \frac{r\,(1-\cos\alpha)\,r\alpha}{r\,(\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)} = r\,\frac{(1-\cos\alpha)\,\alpha}{\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha}\;.$$

Cuando $\alpha = 0$, esta expresión toma la forma $\frac{0}{0}$. Aplicando 3 veces la regla de L'Hospital resulta

$$\lim_{\alpha\to 0} PT = 3r.$$

COMPLEMENTO A LA REGLA DE L'HOSPITAL PARA $x \to \infty$:

Si en lugar de tender x hacia a finito, $x \to \infty$, la regla subsiste, aunque hay que modificar la demostración. En este caso habrá que hacer la sustitución $x = 1/z$; cuando $x \to \infty$, $z \to 0$. Entonces la regla se aplica y, eliminando el factor común $-1/z^2$ que aparece por la derivación, resulta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

II) Así como el cociente de 2 funciones que tienden a 0 (cuando x tiende a un valor finito o infinito) constituye un caso de indeterminación por cuanto el límite de ese cociente podría resultar cero, infinito, un número finito $\neq 0$, o aun podría no existir (ver 22 en la pág. 243), otro tanto puede decirse sobre el límite del cociente de dos funciones, cada una de las cuales tiende a infinito cuando x tiende a un cierto valor. La mayor parte de las veces conviene llevar un tal cociente de infinitos a un cociente de ceros basándose en la identidad $f : g \equiv (1 : g) : (1 : f)$, pero como *la división por cero está prohibida* (ver pág. 13), la demostración correspondiente al caso de infinitos de la regla de L'Hospital exige algún cuidado.

Si en el teorema de Cauchy elegimos x_1 a la derecha de x, resulta

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \equiv \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - [f(x_1) : f(x)]}{1 - [g(x_1) : g(x)]} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad [*]$$

con $a < x < \xi < x_1$.

Supongamos que $[f'(\xi) : g'(\xi)]$ tiene un límite l cuando $\xi \to a$. Elijamos ahora x_1 suficientemente próximo a a para que este cociente difiera de l en menos de ε.

Como de la relación $[*]$ se deduce

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - [g(x_1) : g(x)]}{1 - [f(x_1) : f(x)]}$$

y la segunda fracción del segundo miembro tiende a 1 (por cuanto x_1 ha quedado fijado y $f(x)$ y $g(x)$ tienden a infinito cuando $x \to a$), resulta que si el cociente de las derivadas tiende a l cuando $\xi \to a$, también tiende a l el cociente de las funciones cuando $x \to a$.

En el caso del cociente de infinitos $\ln x : \operatorname{cotg} x$. para $x \to 0$ resulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\cdot \operatorname{sen} x = (-1)\cdot 0 = 0.$$

En cambio, el límite de $\frac{\operatorname{cotg} x}{\ln x}$ cuando $x \to 0$, también de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, es ∞.

EJERCICIOS:

1. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \operatorname{tg} x}$$

Como se trata de un cociente de infinitos se puede aplicar la regla demostrada anteriormente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \cos^2 x = 1$$

Verificar los siguientes límites:

2. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^4} = 0.$

3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{cotg} x} = \frac{1}{2}.$

4. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty.$

5 $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0.$

6. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x + \ln x}{x \cdot \ln x} = 0.$

7. Verificar que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

cualquiera sea $n > 0$.

(El infinito logarítmico es inferior al infinito potencial x^n cualquiera sea el n positivo).

8. Idem que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

cualquiera sea $n > 0$, fijo.

(El infinito potencial es inferior al infinito exponencial cualquiera sea el n positivo).

III) También resulta indeterminado el límite del producto $f(x)\cdot g(x)$ cuando un factor tiende a 0 y el otro a ∞. Basta verlo

en el caso $f(x) = Cx^n$; $g(x) = \frac{1}{x^m}$ cuando $x \to 0$, pues $f(x) \cdot g(x)$ tiende a 0 si es $n > m$; tiende a ∞ si es $n < m$ y tiende a C cuando $n = m$. Pero también en este caso se puede aplicar la regla de l'Hospital, pues siempre se puede llevar a las formas $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ escribiendo $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$.

EJEMPLO:

Mostrar que es $\lim\limits_{x\to 0} (x \cdot \ln x) = 0$.

El producto $x \cdot \ln x$ que para $x = 0$ toma la forma $0(-\infty)$ es indeterminado, pero se puede escribir

$$\lim_{x\to 0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} (-x) = 0.$$

NOTA: En el Capítulo XV veremos otro procedimiento para salvar indeterminaciones mediante los desarrollos en serie de potencias.

EJERCICIOS:

Verificar los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} x = \frac{2}{\pi}$.
2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} \left(x - \frac{1}{2}\pi \right) \operatorname{tg} x = -1$.
3. $\lim\limits_{t\to a} (a - t) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi \frac{t}{a} = \frac{2a}{\pi}$.
4. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}\pi} (1 - \operatorname{tg} x) \sec 2x = 1$.
5. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 1$.
6. $\lim\limits_{\alpha\to 0} (\alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha) = 1$.
7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{1}{2}$.
8. $\lim\limits_{x\to a} \ln \left(2 - \frac{x}{a} \right) \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{a} = -\frac{1}{\pi}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0} (x - \operatorname{sen} x) \ln x = 0$.

IV) Otro caso de indeterminación es el del límite de la diferencia $f(x) - g(x)$ cuando ambas funciones tienden a ∞ para x tendiendo a a, pues no se puede prever, en general, el límite de esa diferencia. Basta verlo en el caso $f(x) = \frac{C}{x^m} + \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{1}{x}$, pues si $x \to 0$, la diferencia $\frac{C}{x^m}$ tiende a C, a ∞ o a 0, según que m sea 0, 1 o -1, respectivamente.

También este caso se puede llevar al caso I) en base a la identidad

$$f(x) - g(x) = \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] : \frac{1}{f(x) \cdot g(x)}, \qquad [1]$$

que es de la forma $\frac{0}{0}$.

EJEMPLO:

Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \left(\text{cotg}\, x - \frac{1}{x}\right)$.

En virtud de la relación [1] es $\text{cotg}\, x - \frac{1}{x} = \frac{x - \text{tg}\, x}{x \cdot \text{tg}\, x}$, que para $x = 0$ toma la forma $\frac{0}{0}$.

Aplicando la fórmula de L'Hospital resulta

$$\lim_{x \to 0}\left(\text{cotg}\, x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \text{tg}\, x}{x \cdot \text{tg}\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\text{tg}\, x + \frac{x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\text{sen}^2 x}{\text{sen}\, x \cos x + x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x}{-\text{sen}^2 x + \cos^2 x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\text{sen}\, x}{\cos x} = \lim_{x \to 0} (-\text{tg}\, x) = 0.$$

EJERCICIOS:

Verificar los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}\right] = 0.$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x^2} - \text{cotg}^2 x\right] = \frac{2}{3}.$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{\text{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right] = \frac{1}{3}.$

4. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} (\sec 3x - \text{tg}\, x) = \infty.$

5. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\ln x}\right] = -\frac{1}{2}.$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{\text{cotg}\, x}{x}\right] = \frac{1}{3}.$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x(1 + x)} - \frac{\ln(1 + x)}{x^2}\right] = -\frac{1}{2}.$

V) Son también indeterminados los límites $f(x)^{g(x)}$ en los casos que se pueden escribir, simbólicamente,

$$0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0.$$

Pero esta indeterminación se salva tomando logaritmos, pues entonces se trata de hallar el límite de $g(x) \cdot \ln [f(x)]$, que en estos 3 casos toma la forma $0 \cdot \infty$, que ya estudiamos en III).

EJEMPLOS:

1°) Calcular $\lim x^x$ cuando $x \to 0$.

Sea la función $y = x^x$. Tomando logaritmos neperianos resulta

$$\ln y = x \cdot \ln x,$$

que se puede escribir

$$\ln y = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}},$$

expresión que para $x \to 0$ es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

La regla de L'Hospital dice que el límite L de este cociente está dado por el límite del cociente de las derivadas

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0.$$

Siendo $L = 0$ el límite de $\ln y$ cuando $x \to 0$, debe ser el límite de $y = e^0 = 1$. Luego, $x^x \to 1$ cuando $x \to 0$.

2°) Calcular $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\operatorname{cotg} x}$.

Este límite es de la forma 1^∞. Tomando logaritmos es

$$\ln y = \operatorname{cotg} x \cdot \ln (1 + x) = \frac{\ln (x + 1)}{\frac{1}{\operatorname{cotg} x}},$$

y el límite L de este cociente, de la forma $\frac{0}{0}$, se halla por la regla de L'Hospital

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x}{1 + x} = 1.$$

Por consiguiente, si $\ln y \to 1$, debe $y \to e^1 = e$.

3°) Calcular $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{sen} x}$

Este límite es de la forma ∞^0. Procediendo como en los casos anteriores resulta

$$\ln y = \operatorname{sen} x \cdot \ln \left(\frac{1}{x} \right) = -\operatorname{sen} x \cdot \ln x = -\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}.$$

El límite L de esta expresión de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, es

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Luego, el límite buscado es $e^0 = 1$.

Ejercicios:

Verificar los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to \infty} (\ln x)^{\frac{1}{1 - \ln x}} = 1.$

2. $\lim_{x \to 0} x^{\operatorname{sen} x} = 1.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{n}{x}\right)^x = e^{-n}.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{x}} = 1.$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} 2x} = 1.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln \operatorname{sen} x}} = e^{-1}.$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(1+x)} = 1.$

9. $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x)^x = 1.$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1.$

11. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi x} = e^{\frac{2}{\pi}}.$

12. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}\pi}\operatorname{sen} x^{\operatorname{tg} x} = 1.$

13. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$

14. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x} = e.$

15. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+x)^{\frac{2}{x}} = e^6.$

16. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2 bx} = e^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}}.$

17. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}a^2}.$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x\right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}.$

19. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\operatorname{cotg}\pi x} = e^{-\frac{1}{\pi}}.$

20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-1}.$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}.$

22. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{cosec}^2 x} = e.$

4. TEOREMA GENERALIZADO DEL VALOR MEDIO

La fórmula de Cauchy permite expresar el cociente de los incrementos de 2 funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ mediante el cociente de las respectivas derivadas consideradas en un punto intermedio del intervalo

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}, \quad a < x_1 < x.$$

Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son nulas en el punto a, resulta

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}.$$

Cuando x varía en un cierto entorno del punto a, x_1 también varía en un conjunto de valores de ese mismo entorno. Si existe el límite de $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ cuando $x\to a$, también existirá el límite $\frac{f'(x_1)}{\varphi'(x_1)}$ cuando $x_1\to a$ y, por consiguiente, también existirá $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. *El*

límite del cociente de 2 funciones que se anulan para $x = a$ es igual al límite del cociente de sus derivadas cuando $x \to a$.

¿Qué sucederá si las derivadas se anulan ambas en $x = a$? Como se trata de 2 funciones $f'(x)$ y $\varphi'(x)$ que se anulan en $x = a$, se puede aplicar el mismo teorema, y el límite del cociente de estas derivadas será igual al límite del cociente de las derivadas segundas en $x = a$:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f''(x_2)}{\varphi''(x_2)}.$$

Si las derivadas segundas también se anulan en $x = a$, se volverá a aplicar el teorema, y si esa anulación se continúa hasta la derivada de orden $(n-1)$, se podrá escribir la generalización del teorema de Cauchy:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{\varphi^{(n)}(\xi)}, \qquad \text{con } a < \xi < x.$$

Una función $\varphi(x)$ que cumple las condiciones exigidas es

$$\varphi(x) = (x-a)^n,$$

pues siendo $\varphi'(x) = n\,(x-a)^{n-1}$; $\varphi''(x) = n\,(n-1)\,(x-a)^{n-2}$; $\ldots$; $\varphi^{(n-1)}(x) = n!\,(x-a)$; $\varphi^{(n)}(x) = n!$, será $\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi''(a) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(a) = 0$; $\varphi^{(n)}(a) = n!$

Se obtiene así la *fórmula generalizada* de Lagrange:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

es decir,

$$f(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(\xi), \qquad \text{con } a < \xi < x,$$

fórmula válida toda vez que la función $f(x)$ y sus $(n-1)$ primeras derivadas se anulen en $x = a$ y exista la derivada n-sima.

5. FORMULA DE MACLAURIN PARA UN POLINOMIO

Estudiaremos las relaciones existentes entre los coeficientes del polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \qquad [1]$$

y las derivadas sucesivas de $P(x)$.

Derivando sucesivamente resulta

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1};$$

$$P''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + \ldots + (n-1)(n-2)\,a_{n-1}x^{n-3} + \\ + n\,(n-1)\,a_nx^{n-2};$$

$$P'''(x) = 3\cdot 2a_3 + \ldots + (n-1)(n-2)(n-3)\,a_{n-1}x^{n-4} + \\ + n\,(n-1)(n-2)\,a_nx^{n-3};$$

$$P^{(r)}(x) = r(r-1)(r-2)\ldots 1a_r + (r+1)r(r-1)\ldots 2a_{r+1}x + \\ + \ldots + n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)a_nx^{n-r};$$

. . . .

$$P^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1a_n.$$

Si en estas expresiones de la función y de sus derivadas reemplazamos x por 0 y escribimos, como siempre, el producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ con el símbolo $n!$, se tendrán las relaciones buscadas:

$$P(0) = a_0; \quad P'(0) = a_1; \quad P''(0) = 2a_2; \quad P'''(0) = 3 \cdot 2a_3 = 3!a_3;$$
$$P^{(r)}(0) = r(r-1)(r-2)\ldots 1a_r = r!a_r;$$
$$P^{(n)}(0) = n(n-1)\ldots 1 = n!a_n.$$

Es decir, será

$$a_0 = P(0); \quad a_1 = P'(0); \quad a_2 = \frac{1}{2}P''(0)$$

y, en general,

$$a_r = \frac{1}{r!}P^{(r)}(0),$$

y reemplazando estos valores en la expresión [1] llegamos a la fórmula de Maclaurin:

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{1}{2!}P''(0)x^2 + \frac{1}{3!}P'''(0)x^3 + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}P^{(n)}(0)x^n, \qquad [2]$$

que se escribe empleando la notación de las sumatorias,

$$P(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!}P^{(r)}(0)x^r.$$

Desarrollo del binomio de Newton: Puesto que el producto de n factores lineales del tipo $(a + bx)$ es un polinomio de grado n, podremos aplicar la fórmula de Maclaurin al polinomio

$$P(x) = (1 + x)^n,$$

para el cual es

$$P'(x) = n(1+x)^{n-1}; \quad P''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2};$$
$$P'''(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}; \quad \ldots;$$
$$P^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1.$$

Haciendo $x = 0$ resulta

$$P(0) = 1; \quad P'(0) = n; \quad P''(0) = n(n-1);$$
$$P'''(0) = n(n-1)(n-2); \quad \ldots;$$
$$P^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = n!$$

Reemplazando en [2] se tiene

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 +$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2}{(n-1)!}x^{n-1} + x^n,$$

y utilizando la expresión de los números combinatorios de Euler:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ \ldots (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!},$$

obtenemos el desarrollo del binomio de Newton:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$$

A partir de esta fórmula es fácil calcular el desarrollo de la potencia n-sima de la suma $(a+b)$. Escribiendo $a+b = a\left[1+\dfrac{b}{a}\right] =$ $= a(1+x)$, con $x = \dfrac{b}{a}$, resulta

$$(a+b)^n = a^n(1+x)^n = a^n\left[1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots +\right.$$
$$\left.\binom{n}{n}x^n\right] = a^n\left[1 + \binom{n}{1}\frac{b}{a} + \binom{n}{2}\frac{b^2}{a^2} + \binom{n}{3}\frac{b^3}{a^3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{b^n}{a^n}\right] =$$
$$= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}b^n.$$

6. FORMULA DE MACLAURIN PARA UNA FUNCION CUALQUIERA

¿Podremos aplicar la fórmula de Maclaurin que hemos deducido para los polinomios al caso de una función como la homográfica $\dfrac{1}{1-x}$ o la trascendente $\operatorname{sen} x$?

Evidentemente, no, pues en el caso de los polinomios al cabo de n derivaciones (siendo n el grado del polinomio) llegamos a un valor constante y la derivada de orden $(n+1)$ será idénticamente nula. En cambio, para $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ resulta

$$f(x) = (1-x)^{-1}; \quad f'(x) = (1-x)^{-2}; \quad f''(x) = 2(1-x)^{-3};$$
$$f'''(x) = 3!\,(1-x)^{-4}; \quad \ldots; \quad f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)},$$

y podremos seguir derivando *indefinidamente*.

Por consiguiente, la fórmula de Maclaurin se podrá escribir, en este caso,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)x^{n-1} + T_n,$$

En el caso de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ resulta

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 2!; \quad f'''(0) = 3!; \quad \ldots; \quad f^{(n-1)}(0) = (n-1)!$$

y, por consiguiente,

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + T_n.$$

Como se sabe del álgebra que $\dfrac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$.

resulta $T_n(x) = \dfrac{x^n}{1-x}$, y esta expresión, si $|x| < 1$ y $n \to \infty$, tiende a 0.

Bajo estas condiciones se podrá escribir

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

resultado ya conocido, por otra parte, del estudio de las series geométricas.

7. FORMULA DE TAYLOR

En las fórmulas de Maclaurin el punto $x = 0$ desempeña un papel excepcional. Es evidente que se podrán obtener otras fórmulas análogas si en lugar del punto $x = 0$ se considera otro punto $x = a$.

Así, si se reemplaza el extremo 0 por a, el extremo x por $a + h$ y el intervalo x por h, tal como lo muestran las figuras I y II, se obtendrá la fórmula de Taylor:

Fig. IX-8.

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + T_n.$$

Con las notaciones de la figura III se obtiene

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + T_n.$$

Expresión del resto en la fórmula de Taylor: Simbolizando con $T_n(x)$ el término complementario o resto de la fórmula de Taylor se tendrá, de acuerdo a la última expresión,

$$T_n(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{1!}f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) - \ldots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a).$$

Evidentemente, es $T_n(a) = 0$; otro tanto sucede con las $(n-1)$ primeras derivadas de $T(x)$ en $x = a$:

$$T'_n(x) = f'(x) - f'(a) - (x-a)f''(a) - \ldots - \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(a); \quad T'_n(a) = 0;$$

$$T''_n(x) = f''(x) - f''(a) - (x-a)f'''(a) - \ldots - \frac{(x-a)^{n-3}}{(n-3)!}f^{(n-1)}(a); \quad T''_n(a) = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a); \quad T_n^{(n-1)}(a) = 0.$$

La derivada n-sima es $T_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$.

Al término complementario $T_n(x)$ se le puede aplicar, por consiguiente, el teorema generalizado del valor medio, pues cumple con las hipótesis de ser una función continua y derivable que se anula así como sus $(n-1)$ primeras derivadas en el punto $x = a$. Entonces se puede escribir el resto en la forma de Lagrange:

$$T_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

y la fórmula de Taylor con el resto será

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi), \qquad \text{con } a < \xi < x.$$

Si $a = 0$, se tiene la fórmula de Maclaurin con la expresión del resto:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x),$$

donde es $0 < \theta < 1$, con lo cual resulta $0 < \theta x < x$.

EJERCICIOS:

1. Aplicar la fórmula de Maclaurin a la función

$$y = \frac{1}{1-x}$$

y determinar el valor de θ en la expresión del resto de Lagrange.

Solución: Por ser

$$f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)}, \qquad f^{(n)}(\theta x) = n!\,(1-\theta x)^{-(n+1)},$$

resulta

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} + T_n,$$

con $T_n = \frac{x^n}{n!} \frac{n!}{(1-\theta x)^{n+1}} = \frac{x^n}{(1-\theta x)^{n+1}}$.

Haciendo directamente la división se tiene como expresión del resto $\frac{x^n}{1-x}$.
Luego, igualando las dos expresiones resulta $(1-\theta x)^{n+1} = 1 - x$, o sea,
$\theta = \frac{1 - \sqrt[n+1]{1-x}}{x}$.

2. Aplicar la fórmula de Maclaurin a la función

$$y = \frac{1}{1+x}$$

y determinar el valor de θ en la expresión del resto de Lagrange.

R: $\frac{\sqrt[n+1]{1+x} - 1}{x}$ si n es par.

Cálculo de funciones mediante la fórmula de Maclaurin: Si repasamos las definiciones dadas en los capítulos III y IV, observaremos que hay funciones, como los polinomios, que se calculan empleando operaciones aritméticas y, por consiguiente, se pueden tabular con tanta aproximación como se quiera. En cambio, hay funciones, como el seno o el coseno de un ángulo, que se han definido geométricamente como el cociente de 2 segmentos. ¿Tendremos que *medir* segmentos para hallar los valores de las funciones trigonométricas? Este procedimiento limitaría enormemente la exactitud de los cálculos. Precisamente el teorema de Maclaurin (y más aún el de Taylor) permite expresar una función mediante *un polinomio* y *un resto*, que, si bien generalmente no se puede calcular exactamente, se puede acotar, y con ello se puede saber cuántas cifras pueden considerarse exactas dentro del valor aproximado que así se obtiene.

Aplicaremos la fórmula de Maclaurin a varias funciones de las más importantes de la matemática, mostrando cómo se determinan efectivamente sus valores.

1º) Desarrollo de e^x: Siendo todas las derivadas de e^x iguales a e^x, las expresiones $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$, serán todas iguales a $e^0 = 1$ y la fórmula de Maclaurin resulta en este caso

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Fijado un valor cualquiera de x, para un valor de n suficientemente grande el cociente $\frac{x^n}{n!}$ puede hacerse tan pequeño como se quiera, y puesto que $e^{\theta x}$ es un valor finito $< e^{|x|}$, se ve que el término complementario tiende a cero.

En particular, si $x = 1$, se tiene una expresión para el cálculo del número e, con el error correspondiente:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} e^{\theta}, \quad 0 < \theta < 1. \quad [1]$$

Para $n = 7$, por ejemplo, resulta

$$e \cong 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!},$$

con un error de fórmula igual a

$$\frac{1}{7!} e^{\theta} < \frac{3}{7!} = \frac{1}{1680} \sim 6 \times 10^{-4}.$$

Se obtiene así $e \sim 2{,}718$, con todas sus cifras exactas.

NOTA: La fórmula [1] permite demostrar que e no es un número racional, pues de ella resulta

$$(n-1)!\, e = \text{número entero} + \frac{e^{\theta}}{n}.$$

Si e fuera racional, siempre se podría encontrar un valor n tal que $(n-1)!\, e$ fuera entero, con lo que resultaría

$$\text{número entero} = \text{número entero} + \text{fraccionario},$$

pues $\frac{e^{\theta}}{n}$ es siempre fraccionario para $n > 3$ por ser $e^{\theta} < 3$. Esto es un absurdo que proviene de haber supuesto que e era un número racional.

El punto de demostración mucho más difícil es el de determinar si se trata de un número *irracional algebraico* (como $\sqrt{2}$) o *irracional trascendente*, es decir que no sea raíz de ninguna ecuación algebraica de coeficientes enteros. En 1874 CHARLES HERMITE, célebre matemático francés, demostró que era un número *trascendente*. Siguiendo sus métodos, el matemático F. LINDEMAN demostró en 1882 que π también era trascendente, cerrando así la secular discusión de la cuadratura del círculo.

2º) DESARROLLO DE $\operatorname{sen} x$:

$$\begin{array}{llll} \text{De} & f(x) = \operatorname{sen} x & \text{resulta} & f(0) = 0; \\ & f'(x) = \cos x & & f'(0) = 1; \\ & f''(x) = -\operatorname{sen} x & & f''(0) = 0; \\ & f'''(x) = -\cos x & & f'''(0) = -1; \\ & f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x & & f^{IV}(0) = 0; \end{array}$$

. . . .

y, en general, $f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2} n\pi\right)$, como ya se ha visto anteriormente (pág. 171).

Aplicando la fórmula de Maclaurin se tiene

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + T_{2n-1},$$

con

$$T_{2n-1} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\theta x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \operatorname{sen}\left[\theta x + \frac{1}{2}(2n+1)\pi\right].$$

Puesto que $\operatorname{sen} \alpha$ siempre toma valores comprendidos entre -1

y + 1, resulta $|T_{2n+1}| < \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$, y para cualquier valor de x esta expresión puede hacerse tan pequeña como se quiera con tal de tomar n suficientemente grande.

Propongámonos calcular sen 2° con 6 decimales exactos. Puesto que $2° \sim 0{,}0349066$ radianes y $T_{2n+1} < \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sim \dfrac{0{,}0349^{2n+1}}{(2n+1)!}$, resulta, para $n = 2$, $T_{2n+1} < 10^{-9}$. Entonces es

$$\operatorname{sen} x \sim x - \frac{x^3}{6},$$

y haciendo los cálculos con 7 decimales se obtiene fácilmente

$$\operatorname{sen} 2° \sim 0{,}034899,$$

con todas las cifras exactas (¹).

3° Desarrollo de $\cos x$:

$$\begin{array}{llll} \text{De} & f(x) = \cos x & \text{resulta} & f(0) = 1; \\ & f'(x) = -\operatorname{sen} x & & f'(0) = 0; \\ & f''(x) = -\cos x & & f''(0) = -1; \\ & f'''(x) = \operatorname{sen} x & & f'''(0) = 0; \\ & f^{\mathrm{IV}}(x) = \cos x & & f^{\mathrm{IV}}(0) = 1; \end{array}$$

. . . .

y, en general, $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{1}{2}n\pi\right)$

En virtud de la fórmula de Maclaurin se obtiene

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + T_{2n},$$

con $T_{2n} = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\cos(\theta x + n\pi)$.

Como el coseno es, en valor absoluto, siempre menor que 1, resulta $|T_{2n}| < \dfrac{|x|^{2n}}{(2n)!}$, y esta expresión puede hacerse tan pequeña como se quiera, cualquiera sea x, con tal de tomar n suficientemente grande.

Sea calcular el coseno de 1 radián con 6 decimales exactos. Resulta

$$|T_{2n}| < \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{(2n)!},$$

y con $2n = 10$ queda $|T_{2n}| < 2{,}76 \cdot 10^{-7}$.

Aplicando el desarrollo de Maclaurin con 5 términos se tiene

(¹) Para lo relativo a errores en los cálculos aritméticos véase M. Sadosky: *Cálculo numérico y gráfico*, pág. 28.

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!}.$$

Efectuando los cocientes con 7 cifras exactas y agregando a los errores de cálculo el error de T_{10} resulta $\cos 1 = 0{,}540302$, con todas sus cifras exactas.

4º) DESARROLLO DEL LOGARITMO: Como en la fórmula de Maclaurin se utilizan los valores de la función $f(x)$ y de sus derivadas para $x = 0$, y la función $f(x) = \ln x$, así como sus derivadas, son discontinuas en $x = 0$, se estudia la función $f(x) = \ln(1 + x)$, que es regular en $x = 0$.

Si suponemos $x > -1$, se obtiene

$$f(x) = \ln(1 + x), \qquad f(0) = 0;$$
$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} = (1 + x)^{-1}, \qquad f'(0) = 1;$$
$$f''(x) = -(1 + x)^{-2}, \qquad f''(0) = -1;$$
$$f'''(x) = 2(1 + x)^{-3}, \qquad f'''(0) = 2;$$
$$f^{\text{IV}}(x) = -2 \cdot 3(1 + x)^{-4}, \qquad f^{\text{IV}}(0) = -2 \cdot 3 = -3!;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{n}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(1 + x)^{-n}.$$

La fórmula de Maclaurin establece la relación

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{3!x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{(n-2)!}{(n-1)!} x^{n-1} + T_n;$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + T_n,$$

con

$$T_n = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!\,x^n}{n!\,(1 + \theta x)^n} = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \left(\frac{1}{1 + \theta x}\right)^n, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Si es $0 \leqslant x < 1$, $\frac{1}{1 + \theta x}$, y la expresión del resto puede hacerse tan pequeña como se quiera sin más que tomar n suficientemente grande, pues es $|T_n| < \frac{1}{n}$.

Más adelante demostraremos que el resto tiende a cero cualquiera sea x del intervalo $(-1, 1)$ excluído $x = -1$.

Calculemos $\ln 1{,}5$ con 2 decimales exactos.

Como es $|T_n| < \frac{x^n}{n} = \frac{0{,}5^n}{n}$, y esta expresión es menor que 0,01 cuando $n \geqslant 5$, resulta

$$\ln 1{,}5 \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4}.$$

Efectuando las operaciones con 3 decimales resulta $\ln 1{,}5 \sim 0{,}40$, con 2 cifras exactas.

Veremos más adelante que el cálculo de los logaritmos neperianos se hace utilizando expresiones mucho más convergentes que la que acabamos de emplear.

En el capítulo XV estudiaremos los desarrollos de Maclaurin y de Taylor de numerosas funciones.

EJERCICIOS:

Verificar los siguientes desarrollos de acuerdo a la fórmula de Maclaurin de 3 términos con la expresión del resto de Lagrange:

1. $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^6}{6} e^{-\theta^2 x^2}$.

2. $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + T_4$,

siendo $T_4 = \dfrac{16x^7}{7!}\,(17 + 248 \operatorname{tg}^2 \theta x + 756 \operatorname{tg}^4 \theta x + 840 \operatorname{tg}^6 \theta x + 315 \operatorname{tg}^8 \theta x)$.

8. APROXIMACION DE FUNCIONES

RECTA TANGENTE. PARÁBOLA OSCULATRIZ: Considerando 1, 2, 3, ... términos de la fórmula de Taylor,

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}\,(x-a)^{n-1} + T_n,$$

se tendrán las siguientes aproximaciones:

(I) $f_0(x) = f(a)$;

(II) $f_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$;

(III) $f_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$.

. . . .

FIG. IX-9.

La fórmula (I) es la aproximación de orden 0.

La fórmula (II) es la *aproximación lineal.* Es la ecuación de una recta; más precisamente, la ecuación de la *recta tangente* a la curva correspondiente a la función $f(x)$ en el punto $x = a$.

La aproximación (III) es la *aproximación cuadrática.* Es la ecuación de una parábola de eje vertical, llamada *parábola osculatriz.*

Tomando más términos se tendrán aproximaciones superiores.

Además, la expresión del término complementario T_n permite calcular el error que se comete al adoptar un polinomio de aproximación.

EJEMPLOS:

1°) Consideremos el desarrollo en serie de Maclaurin de

$$y = e^x.$$

Ya vimos (pág. 255) que es

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + T_n,$$

con $T_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$ $(0 < \theta < 1)$.

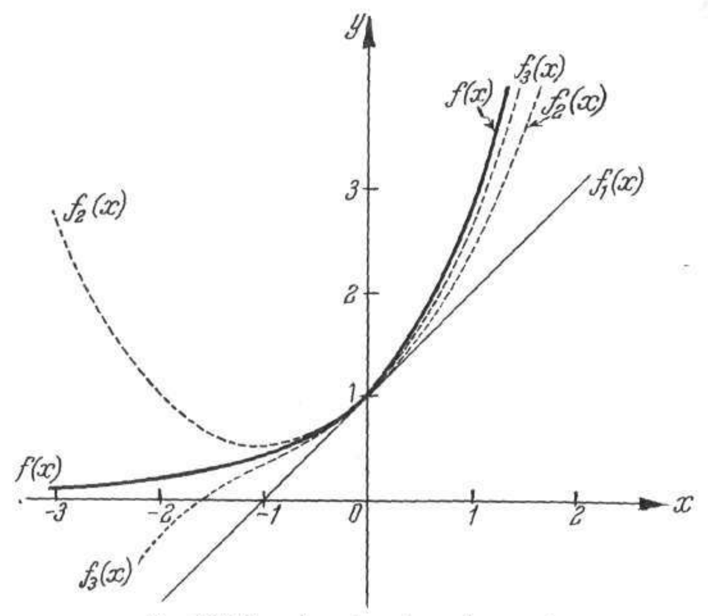


FIG. IX-10. — Aproximaciones de $y = e^x$.

Los polinomios de aproximación para $x = 0$ son

(I) $f_1(x) = 1 + x$, recta tangente;

(II) $f_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, parábola osculatriz;

(III) $f_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$, parábola de aproximación de tercer orden.

Con la parábola osculatriz el error que se comete es

$$e^x - f_2(x) = \frac{x^3}{3!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Si bien no se conoce el valor θ, se puede acotar el 2° miembro en un intervalo dado. Asi, en $0 \leqslant x \leqslant 1$ es $e^{\theta x} < e$, y el error es $< \frac{1}{6} < 0{,}5$. En el intervalo $(0, 2)$ el error será < 10, y si se desea mejorar la aproximación, habrá que recurrir a más términos.

2º) El desarrollo en serie de Maclaurin de

$$y = \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + T_n$$

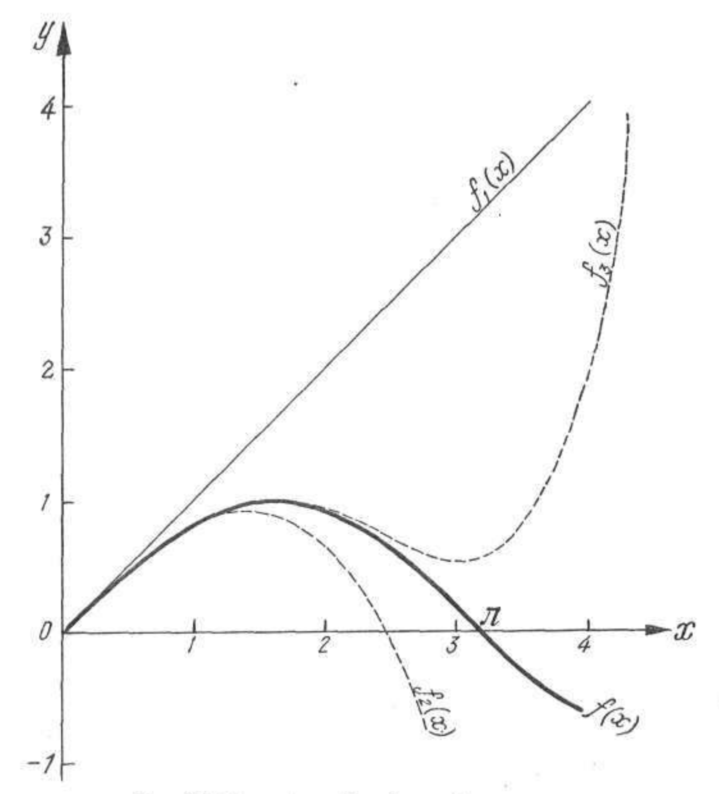


FIG. IX-11. — Aproximaciones de $y = \operatorname{sen} x$.

origina las siguientes aproximaciones:

$$\text{(I)}\ f_1(x) = x;$$

$$\text{(II)}\ f_2(x) = x - \frac{x^3}{6};$$

$$\text{(III)}\ f_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

En el gráfico se ve cómo a medida que aumenta el orden de n **mejora** la aproximación respecto de la función sinusoidal.

EJERCICIOS:

Determinar la ecuación de la parábola osculatriz de las siguientes curvas en los puntos indicados:

1. $y = \cos x$ en el origen. **R:** $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

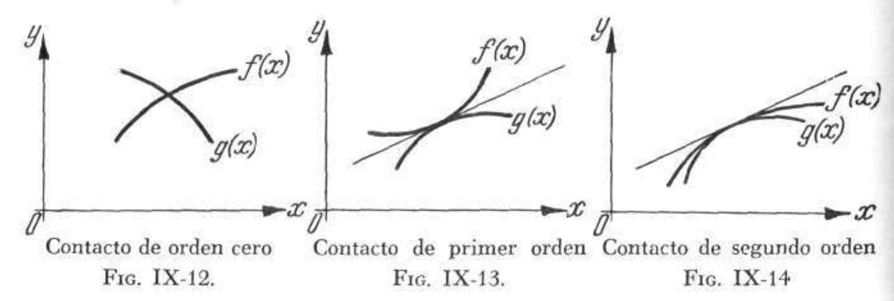
2. $y = \ln(1 + x)$ en el origen. **R:** $y = x - \frac{1}{2}x^2$.

3. $y = e^x$ en el punto $x = 1$. R: $y = \frac{1}{2}e\,(x^2 + 1)$.

4. $y = \frac{1}{1 + x^2}$ en los puntos $x = 0$ y $x = 1$. R: $y = 1 - x^2$; $y = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{5}{4}$.

5. $y = \sqrt{1 + x}$ en el punto $x = 0$. R: $y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$.

Contacto de 2 curvas: Dos curvas que se cortan en un punto se dice que tienen un contacto de orden cero (fig. 12). Si en el punto de contacto tienen derivadas primeras iguales, es decir, si tienen igual tangente (figs. 13 y 14), se dice que las curvas tienen un contacto de primer orden



Contacto de orden cero Fig. IX-12. Contacto de primer orden Fig. IX-13. Contacto de segundo orden Fig. IX-14

En general, si 2 funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen igual valor en un cierto punto x, y además en ese punto tienen iguales las derivadas primera, segunda, ..., n-sima, se dice que las 2 curvas tienen un *contacto de orden n*.

Para asegurar que 2 funciones tienen un contacto de orden n habrá que calcular las derivadas sucesivas y verificar que en el punto común coinciden los valores de las derivadas sucesivas hasta el orden n.

Ejemplos:

1°) Las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ tienen un contacto de primer orden en $x = 0$, pues es $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 1$, mientras que $f''(0) = 1$ y $g''(0) = -1$.

2°) Las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{5}{3}(\operatorname{sen} x + \cos x) - \frac{1}{3}(\operatorname{sen} 2x + 2\cos 2x)$ tienen un contacto de tercer orden en el origen, pues f, f', f'', f''', g, g', g'' y g''' toman para $x = 0$ el mismo valor 1, como el lector verificará fácilmente.

Nota: Más adelante veremos cómo determinar en cada punto de una curva una circunferencia que tenga con ella un contacto de 2° orden (círculo osculador).

Ejercicios:

1. Verificar que las curvas

$$y = \operatorname{Ch} x, \quad y = \frac{1}{2}x^2 + 1,$$

tienen un contacto de tercer orden en el punto (0, 1).

(Esto es lo que permite en la técnica tratar, con una cierta aproximación, como si fuera una parábola, la catenaria. La verdadera naturaleza de esta curva fué reconocida por HUYGENS, LEIBNIZ y J. BERNOUILLI. Aun GALILEO, que estudió el problema de los hilos, no llegó a dar con la solución exacta).

2. Hallar el orden de contacto de las siguientes curvas:

$$y = x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad y = x \cos x,$$

en el origen.

R: 2º orden.

3. Determinar el orden de contacto de las curvas

$$y = x^2, \quad y = x^2 + y^2,$$

en sus puntos de intersección.

R: 3er. orden en el origen

4. Idem de las curvas

$$y = \sqrt{1+x}, \quad y = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3,$$

en el punto de abscisa $x = 0$.

R: 3er. orden.

5. Determinar los coeficientes de la curva

$$y = A \cos x + B \operatorname{sen} x + C \cos 2x + D \operatorname{sen} 2x$$

de modo que sea osculatriz de $y = 3e^{2x}$ en el punto $x = 0$. ¿Cuál es el orden de contacto?

R: $A = 8$; $B = 16$; $C = D = -5$. 3er. orden.

9. DISCUSION ANALITICA DE LOS MAXIMOS Y LOS MINIMOS

Consideremos una función continua y con derivadas continuas en un intervalo (a, e). Hemos mostrado (pág. 201) que toda vez que la derivada en un punto es positiva la función es *creciente*, tal

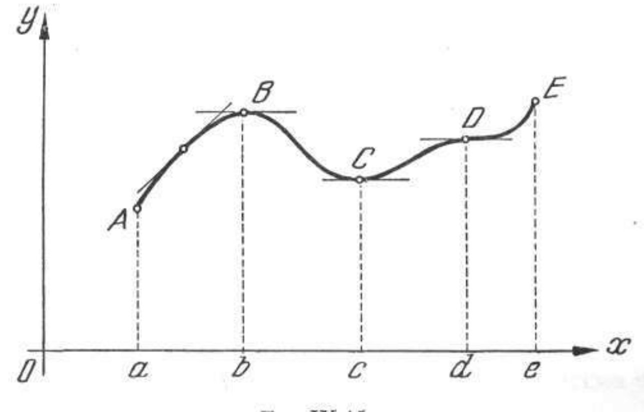


FIG. IX-15.

como ocurre en la figura en los puntos de los intervalos (a, b) y (c, e), y que cuando la derivada es negativa la función es *decreciente*, como ocurre en los puntos del intervalo (b, c).

En los puntos B y C, correspondientes a un máximo y a un mínimo, respectivamente, la derivada es nula. También es nula la derivada en D a pesar de tratarse de un punto creciente.

Utilizando la fórmula de Taylor caracterizaremos estos diversos puntos.

Supongamos que $f(x)$ es desarrollable en el entorno del punto α mediante la fórmula de Taylor de 3 términos:

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha) f'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2}{2!} f''(\xi), \quad \text{siendo } \alpha < \xi < x.$$

Admitiendo que $f'(x)$ se anula en el punto α, mientras que $f''(x)$ no se anula para $x = \alpha$ [con lo cual se puede asegurar que $f''(\xi)$ no será nula gracias a la supuesta continuidad de las derivadas], la expresión anterior se puede escribir en la forma

$$f(x) - f(\alpha) = \frac{(x - \alpha)^2}{2!} f''(\xi) = \text{expresión positiva} \times f''(\xi).$$

Si $f''(\alpha)$ es un valor positivo, también lo será $f''(\xi)$ eligiendo un valor de x suficientemente próximo a α, y entonces la diferencia $f(x) - f(\alpha)$ será positiva. En otros términos, para cualquier x de un cierto entorno de α será $f(x) > f(\alpha)$, lo cual equivale a decir que $f(\alpha)$ es un valor mínimo. Tal es el caso del punto C de la figura 15.

Análogamente, si $f''(\alpha)$ es un valor negativo, también lo será $f''(\xi)$ en un cierto entorno de α, y la diferencia $f(x) - f(\alpha)$ resulta negativa, o, lo que es lo mismo, debe ser $f(x) < f(\alpha)$ cualquiera sea el x de ese entorno. Por ser $f(\alpha)$ mayor que todos los valores $f(x)$ de la función en un entorno del punto $x = \alpha$, resulta ser $f(\alpha)$ el máximo.

Confirmamos así en forma analítica los resultados obtenidos geométricamente en la página 203.

¿Qué sucede si además de ser $f'(\alpha) = 0$ es $f''(\alpha) = 0$? Supongamos entonces que sea $f'''(\alpha) \neq 0$.

La fórmula de Taylor de 4 términos

$$f(x) = f(\alpha) + (x - \alpha) f'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^3}{3!} f'''(\xi)$$

se puede escribir en la forma

$$f(x) - f(\alpha) = \frac{(x - \alpha)^3}{3!} f'''(\xi).$$

Ahora el factor de $f'''(\xi)$ no es siempre positivo, sino que es *positivo* o *negativo* según que sea $x > \alpha$ o $x < \alpha$.

Por consiguiente, resulta:

Si $f'''(\xi) > 0$ $\begin{cases} \text{para } x > \alpha, \text{ es } f(x) > f(\alpha); \\ \text{para } x < \alpha, \text{ es } f(x) < f(\alpha). \end{cases}$

Si $f'''(\xi) < 0$ $\begin{cases} \text{para } x > \alpha, \text{ es } f(x) < f(\alpha); \\ \text{para } x < \alpha, \text{ es } f(x) > f(\alpha). \end{cases}$

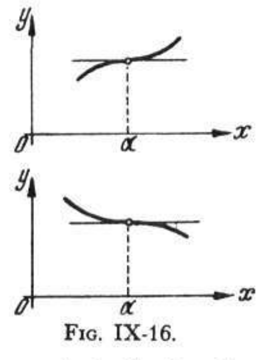


Fig. IX-16.

En los 2 casos la tangente horizontal atraviesa a la curva; en el primero el punto es creciente (punto D de la figura) y en el segundo decreciente. Se trata, entonces, de un *punto de inflexión horizontal.*

Pero también podría resultar $f'''(\alpha) = 0$ y no nula la derivada cuarta. Tal es el caso de $f(x) = x^4$ para $\alpha = 0$.

Consideremos, en general, que las $(n-1)$ primeras derivadas se anulen en un punto $x = \alpha$, mientras que la derivada n-sima tiene un signo determinado. El desarrollo de Taylor queda entonces reducido a

$$f(x) - f(\alpha) = \frac{(x-\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \qquad \text{con } \alpha < \xi < x.$$

Habrá que distinguir dos casos: n par y n impar.

1º) n par. Entonces el signo del 2º miembro sólo depende del signo de la derivada n-sima. Si ésta es positiva, resulta

$f(x) > f(\alpha)$, y en $x = \alpha$ se tiene un *mínimo.*

Si, en cambio, la derivada n-sima es negativa, es

$f(x) < f(\alpha)$, y en $x = \alpha$ se tiene un *máximo.*

2º) n impar. El binomio $(x - \alpha)$ es positivo o negativo cuando es $x > \alpha$ o $x < \alpha$, respectivamente. Elevando a una potencia impar resulta positivo o negativo, respectivamente. Es decir, cambia de signo, y, por consiguiente, la diferencia $f(x) - f(\alpha)$ cambia de signo según que sea x mayor o menor que α. Se trata de un punto de inflexión horizontal. Si además $f^{(n)}(\alpha)$ es positivo, el punto es creciente, y si es negativo, decreciente, tal como hemos visto para $n = 3$.

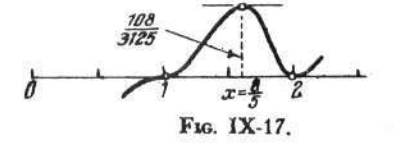


Fig. IX-17.

Ejemplos:

1º) Calcular máximos y mínimos de

$y = (x-1)^3 (x-2)^2.$

La derivada primera

$$y' = (x-1)^2 (x-2)(5x-8)$$

se anula en los puntos $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = \frac{8}{5}$, que dan los posibles máximos y mínimos. Calculando la derivada segunda resulta

$$y''(1) = 0; \quad y''(2) = 2 > 0; \quad y''\left(\frac{8}{5}\right) = -\frac{18}{25} < 0.$$

Luego, hay un mínimo en $x_2 = 2$ y un máximo en $x_3 = \frac{8}{5}$. Para decidir sobre $x_1 = 1$ se calcula allí la derivada tercera $y'''(1) = 6 > 0$. Siendo impar la primer derivada que no se anula en $x_1 = 1$, se trata de un punto de inflexión.

2°) Calcular máximos y mínimos de la función

$$y = (x-2)^4 + 1.$$

La derivada primera es $y' = 4(x-2)^3$; se anula en $x = 2$. Pero también se anulan en ese punto $y'' = 12(x-2)^2$; $y''' = 24(x-2)$; y la primer derivada que no se anula es la cuarta: $y^{IV} = 24 > 0$. Luego, a $x = 2$ corresponde un mínimo, cosa, por otra parte, evidente, pues el valor menor que puede tomar esta función positiva es el correspondiente a la anulación del primer término.

10. CONCAVIDAD, CONVEXIDAD E INFLEXION

Según que una curva esté por encima o por debajo de la recta tangente en el entorno de un punto se dice que es cóncava o convexa en dicho punto, tal como ya dijimos en el capítulo VIII.

Demostraremos ahora, por otro camino, que la concavidad o convexidad depende de que el signo de la derivada segunda en el punto considerado sea positivo o negativo, respectivamente.

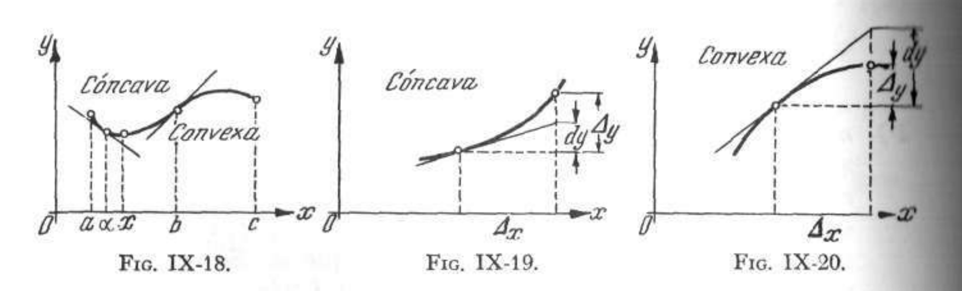


Fig. IX-18. Fig. IX-19. Fig. IX-20.

Supuesta la función $f(x)$ continua y derivable, y con derivada segunda no nula, se puede escribir la fórmula de Taylor de 3 términos:

$$f(x) = f(\alpha) + (x-\alpha) f'(\alpha) + \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 f''(\xi), \quad \text{con } \alpha < \xi <$$

Pero puesto que $(x - \alpha)$ es un incremento de la variable independiente, resulta $f'(\alpha)(x-\alpha) = f'(\alpha)\,\Delta\alpha = df(x)$, y podremos escribir

$$[f(x) - f(\alpha)] - df(x) = \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 f''(\xi) =$$
$$= \text{factor positivo} \times f''(\xi).$$

La expresión entre corchetes es el incremento de la función $f(x)$, de modo que el primer miembro mide la diferencia entre este incremento Δf y el incremento de la tangente df.

Si es $f''(\xi) > 0$, esta diferencia es positiva y la curva está por encima de la tangente, es decir, es *cóncava* o, como también suele decirse, tiene su concavidad hacia el eje de las y positivas.

En cambio, si es $f''(\xi) < 0$, la diferencia será negativa y la curva estará por debajo de la tangente: es *convexa* o tiene la concavidad hacia el eje de las y negativas.

Si la tangente atraviesa a la curva, será $f''(\xi) = 0$, pues si tuviera un signo determinado, la curva, como acabamos de ver, estaría por encima o por debajo de la recta tangente. Luego, los valores que anulan la derivada segunda determinan los posibles puntos de inflexión. Para asegurarse que se trata efectivamente de una inflexión debe analizarse si la diferencia $\Delta f - df$ cambia de signo según que x sea mayor o menor que α.

EJEMPLOS:

1°) Estudiar la concavidad, convexidad e inflexión de la curva

$$y = e^{-x^2}.$$

Siendo $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$,

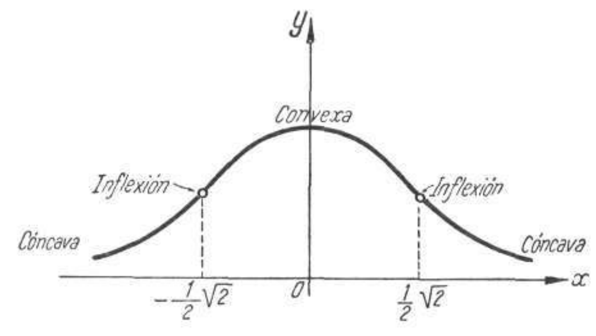


FIG. IX-21.

se observa que es

$y'' > 0$ si $x > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ o $x < -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (concavidad hacia el eje de las y positivas);

$y'' < 0$ si $-\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (concavidad hacia el eje de las y negativas);

$y'' = 0$ si $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (puntos de inflexión).

2°) Estudiar la concavidad, convexidad e inflexión de la curva

$$y = x^3 - 3x + 1.$$

Por ser $y' = 3x^2 - 3$, $y'' = 6x$, resulta que la curva será cóncava si $x > 0$ y convexa si $x < 0$. La inflexión se tiene en $x = 0$, $y = 1$. Además, como la derivada se anula en $+1$ y en -1, se tienen allí el mínimo y el máximo, respectivamente.

EJERCICIOS:

1. Estudio de la curva $\quad y = \dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x}{x^2 - 1}.$

Solución: Efectuando el cociente indicado resulta

$$y = x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Ya hemos visto anteriormente (pág. 54) que los puntos singulares son $x = +1$, $x = -1$, y las rectas que tienen esas ecuaciones constituyen las asíntotas verticales.

El numerador de la función se anula para $x_1 = 0$, $x_2 \sim -0{,}84$, y ésos son los únicos ceros de la función.

La derivada $y' = 2\left[(x-1) - \dfrac{x}{(x^2-1)^2}\right] = 2\dfrac{(x-1)(x^2-1)^2 - x}{(x^2-1)^2}$ se anula en los puntos $x_3 \sim 1{,}62$; $x_4 \sim -0{,}61$; $x_5 \sim -1{,}325$. En estos puntos la tangente es horizontal. Además, siendo el denominador positivo, para los valores $x > x_3$ es $y' > 0$ (función *creciente*); en el intervalo $x_4 < x < x_3$ es $y' < 0$ (función *decreciente*). Para $x_5 < x < x_4$ es $y' > 0$ (función *creciente*), y finalmente, si es $x < x_5$, es $y' < 0$ (función *decreciente*).

Estudiando la derivada segunda se puede ver, tal como aparece en la figura 27 de la página 53, que la curva es *cóncava* si es $x > 1$ ó $x < -1$ y *convexa* en el intervalo $-1 < x < +1$. En el origen, a pesar de anularse la derivada segunda, no hay inflexión porque allí también es nula la derivada tercera.

2. Estudiar las variaciones de la parábola cuártica

$$y = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 10x^2 - 8x + \frac{11}{3}.$$

R: La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$ y creciente en el intervalo $(2, +\infty)$. Para $-\infty < x < 1$ la curva es cóncava, en el intervalo $\left(1, \dfrac{5}{3}\right)$ es convexa y vuelve a ser cóncava entre $x = \dfrac{5}{3}$ y $x = +\infty$.

Los dos puntos de inflexión son $x = 1$ y $x = \dfrac{5}{3}$; en el primero la tangente es horizontal, en el segundo tiene pendiente $-\dfrac{16}{27}$. En el punto $x = 2$ hay un mínimo absoluto.

3. Estudiar las variaciones de la curva $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

R:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
y	$-\infty$	crec.	-2	crec.	0	decr.	$-\frac{4}{27}$	crec.	0	crec.	$+\infty$

La función presenta un punto de inflexión para $x = \frac{4}{3}$.

4. Estudiar las variaciones de la función

$$y = (x - 1)(x^2 + 2x + 5).$$

Mostrar que la curva es siempre creciente. Verificar que la ecuación de la recta tangente en el punto de inflexión es $72x - 27y = 136$.

5. Estudiar el comportamiento de la función

$$y = \frac{x^2 - 1}{4x + 5}.$$

R: La función es discontinua en el punto $x = -\frac{5}{4}$, donde pasa la asíntota vertical. $y = \frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{4}\right)$ es la ecuación de la asíntota oblicua. Hay un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = -\frac{1}{2}$. La curva es cóncava en el intervalo $-\infty < x < -\frac{5}{4}$ y convexa en $-\frac{5}{4} < x < +\infty$.

6. Estudiar las variaciones de la función

$$y = \frac{x^2}{8} + \frac{1}{x}.$$

Solución: Esta función está definida y es continua, salvo en el punto $x = 0$. La derivada $y' = \frac{x^3 - 4}{4x^2}$ se anula para $x = \sqrt[3]{4}$, donde la curva tiene un mínimo.

La asíntota vertical es el eje y. Cuando x crece indefinidamente, $\frac{1}{x}$ tiende a cero y la parábola $y = \frac{1}{8}x^2$ es una curva asintótica.

En el punto $x = -2$ la curva tiene un punto de inflexión.

7. Hallar máximos, mínimos, puntos de inflexión, concavidad y convexidad de la curva

$$y = \frac{x^3 - x}{3x^2 + 1}.$$

Determinar las asíntotas. Efectuar la representación gráfica.

R: Los valores extremos se obtienen en $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1}$, correspondiendo el máximo al signo menos y el mínimo al signo más. Los puntos de inflexión se obtienen en $0, +1, -1$. Para la representación gráfica téngase en cuenta que se trata de una función *impar* y que la asíntota es la recta $y = \frac{1}{3}x$.

8. Dada la función $$y = \frac{7x^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3}$$

determinar las asíntotas, máximos, mínimos, puntos de intersección con los ejes de coordenadas y con la asíntota horizontal.

R: Asíntota horizontal: $y = 7$; asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -3$. Máximo en el punto $x = -2$; en el punto $x = -5$ hay un mínimo.

La curva corta al eje x en el punto de abscisa $-\frac{20}{7}$ y pasa por el origen.

El punto $\left(-\frac{7}{2}, 7\right)$ es la intersección de la curva con la asíntota horizontal, donde la recta tangente tiene pendiente $\frac{8}{3}$.

9. Estudiar el comportamiento de la función

$$y = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi$, determinando máximos, mínimos, concavidad, convexidad, inflexión. Hacer la representación gráfica.

R: La derivada es positiva en los intervalos $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi\right)$ nula en los puntos de abscisa $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ y $\frac{5}{6}\pi$ y negativa en todos los demás puntos.

Los *máximos* se obtienen en $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{5}{6}\pi$ y el *mínimo* en $x = \frac{1}{2}\pi$.

La derivada segunda se anula en $x \sim 1$ rad y $x \sim 2{,}14$ rad; allí se encuentran los *puntos de inflexión*.

10. Estudiar la concavidad, convexidad e inflexiones de la curva

$$y = (1 + x^2)e^{-x^2}.$$

Mostrar que cualquiera sea x es $y \leqslant 1$. Hacer la representación gráfica.

R: Los puntos de inflexión se encuentran en $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. El máximo se obtiene para $x = 0$, siendo $y(0) = 1$. La función es siempre positiva y no tiene mínimo.

11. Mostrar que la curva

$$y = (1 - x^2)e^{x^2}$$

es siempre $\leqslant 1$.

Dibujar la curva determinando previamente máximos, mínimos y puntos de inflexión.

R: El máximo se alcanza en $x = 0$ $[y'(0) = 0,\ y^{\text{IV}}(0) < 0]$. Los puntos de inflexión se encuentran en $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \sim 1{,}2247$.

12. Estudiar las variaciones de la función

$$y = x^4 e^{-x}.$$

R: La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, creciente de 0 a 4 y nuevamente decreciente en el intervalo $(4, +\infty)$.

En los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(6, +\infty)$ es cóncava y para $2 < x < 6$ es convexa.

Tiene un mínimo en el origen y un máximo en $x = 4$. Los puntos de inflexión son $x = 2$ y $x = 6$.

El eje de las abscisas es la asíntota horizontal.

Sadosky-Guber

ANALISIS MATEMATICO I

Cálculo Integral

Queda hecho el depósito que establece la ley 11.723.

IMPRESO EN ARGENTINA

ISBN Obra Completa
950-553-000-5
ISBN Volumen II
950-553-020-X

SEGUNDA PARTE - CALCULO INTEGRAL

INDICE

Capítulo X

INTEGRALES INDEFINIDAS

1. INTRODUCCION

Hemos visto que la derivada de una función $y = f(x)$ puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente.

Para la función $y = x^2$ la derivada $y' = 2x$ mide, para cada punto de abscisa x, la tangente trigonométrica o pendiente del ángulo α que forma la recta tangente con el semieje positivo de las x.

Fig. X-1.

Consideremos ahora el siguiente problema, en cierta forma inverso del anterior. Se asigna a cada punto del plano de abscisa x una dirección tal que su pendiente sea igual al doble de la abscisa x.

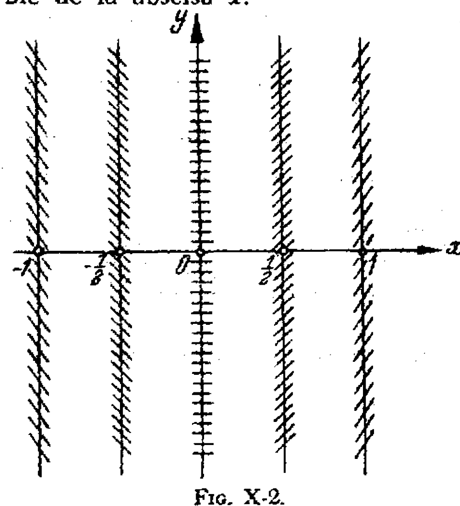


Fig. X-2.

Así, a todos los puntos de abscisa $x = \frac{1}{2}$ les deben corresponder direcciones tales que sea $\operatorname{tg} \alpha = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, es decir, $\alpha = 45°$; a los de abscisa $x = 1$, direcciones de $63°26'$; a los de abscisa $-\frac{1}{2}$, direcciones de $135°$, etc. Es claro que en la figura 2 sólo se han señalado algunas de esas direcciones, porque, de lo contrario, se obtendría una mancha negra.

¿Cuál es la curva o las curvas que en cada punto tienen como pendiente esa dirección prefijada? Evidentemente la curva $y = x^2$ satisface a esa exigencia. Pero también la satisfacen las curvas $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 1$, etc., y, en general, todas las curvas que responden a la ecuación $y = x^2 + C$ (C, constante).

Vemos entonces que, mientras el cálculo de las derivadas conduce a un resultado único, el cálculo de las *primitivas* —esto es, el cálculo de aquellas funciones que tienen una derivada dada— tiene infinitas soluciones.

Subsiste aún una cuestión: ¿Todas las soluciones están representadas por la fórmula $y = x^2 + C$? Así es, pues de acuerdo con el

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL: *Todas las funciones que tienen igual derivada difieren entre sí en una constante,* o, en otros términos, *todas las primitivas de una misma función difieren entre sí en una constante.*

La demostración ya se ha visto en la página 240.

Conviene destacar la importancia de este teorema de demostración tan elemental.

Cuando se efectúa la suma $a + b$ de 2 números el resultado es *único*. Se dice que la adición goza de la propiedad *uniforme*. También tienen esta propiedad las otras operaciones racionales (diferencia, producto, cociente o potencia). La radicación, en cambio, no es uniforme, sino multiforme. Así, $\sqrt{4}$ es igual a $+2$ o a -2 y habrá que aclarar a cuál de las 2 determinaciones nos referimos. En el campo de los números complejos la logaritmación es *infinitiforme*, es decir, tiene infinitas determinaciones; por ejemplo, las *infinitas* determinaciones del logaritmo neperiano de 2 están comprendidas en la fórmula $\ln 2 + 2k\pi i$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Conocido un valor del logaritmo se conocen todos los demás agregándole un número entero de veces $2\pi i$.

En el cálculo de las primitivas vemos que también hay infinitas soluciones, pero, toda vez que se conozca una función que satisfaga al problema, se conocen todas las soluciones, pues cualquier otra función que sea solución debe diferir de la primera en una constante. En otras palabras: una vez encontrada una función tal que su derivada coincida con la expresión dada hemos encontrado *todas* las funciones que cumplen esa condición.

Así, si buscamos una función cuya derivada sea $\frac{1}{(1+x)^2}$, o sea, si buscamos la *primitiva* de $\frac{1}{(1+x)^2}$ y verificamos que tanto $\frac{x}{x+1}$ como $\frac{-1}{x+1}$ son soluciones, *con seguridad* estas 2 expresiones deben diferir en una constante. En este caso es $\frac{x}{x+1} - \left(-\frac{1}{x+1}\right) = \frac{x+1}{x+1} = 1.$

Verifique el lector que tanto $\frac{1}{2}(x + 6)$ como $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ son primitivas de $\frac{1}{2}$. Revisando las fórmulas trigonométricas encontrará que las dos funciones difieren en la constante 3, pues es $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x.$

2. INTEGRALES INDEFINIDAS

Hemos designado con el nombre de primitiva $F(x)$ de una función $f(x)$ a una expresión tal que cumpla la relación $F'(x) = f(x)$, y designaremos con el nombre de *integral indefinida*

$$\int f(x)\,dx$$

(que se lee "integral de efe de x diferencial x") a la expresión *más general* cuya derivada sea $f(x)$ o, lo que es lo mismo, cuya diferencial sea $f(x)\,dx$.

De acuerdo al teorema fundamental es

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Propiedades:

1°) En virtud de la definición es

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

lo cual pone en evidencia que el signo d "destruye", al precederlo, al signo $\int$.

Si $F(x)$ es una integral de $dF(x)$, es

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

y esta expresión muestra que el signo $\int$ "destruye" al signo d si se agrega una constante a la función. Sólo con estas aclaraciones puede decirse que la diferenciación e integración son operaciones inversas.

2°) *Linealidad de la integración:* Puesto que en el cálculo de derivadas y diferenciales hemos visto que es

$$d[Cf(x)] = Cdf(x)$$

y

$$d(u + v - w) = du + dv - dw,$$

resulta

$$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx$$

y

$$\int (u + v - w)\,dx = \int udx + \int vdx - \int wdx,$$

y, en general, la integral de una expresión lineal de varias funciones es igual a la expresión lineal de las integrales correspondientes:

$$\int [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x)]\,dx =$$

$$= C_1\int f_1(x)\,dx + C_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + C_n\int f_n(x)\,dx.$$

Este es el principio de la "*integración por descomposición*".

INTEGRACIÓN INMEDIATA: La simple lectura de una tabla de derivadas nos da una tabla de integrales. Así, de

$$Dx^{\alpha+1} = (\alpha + 1)\, x^{\alpha} \quad \text{resulta} \quad (\alpha + 1) \int x^{\alpha}\, dx = x^{\alpha+1} + C_1,$$

es decir,

$$\text{(I)} \quad \int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \quad \text{si } \alpha \neq -1.$$

Si $\alpha = -1$, recordando que $D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ se obtiene

$$\text{(II)} \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

El lector justificará fácilmente la siguiente tabla efectuando las diferenciaciones correspondientes [1]:

$$\text{(III)} \quad \int e^x\, dx = e^x + C.$$

$$\text{(IV)} \quad \int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$\text{(V)} \quad \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C.$$

$$\text{(VI)} \quad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C.$$

$$\text{(VII)} \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\text{(VIII)} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C.$$

$$\text{(IX)} \quad \int \operatorname{Sh} x\, dx = \operatorname{Ch} x + C.$$

$$\text{(X)} \quad \int \operatorname{Ch} x\, dx = \operatorname{Sh} x + C.$$

$$\text{(XI)} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Ch}^2 x} = \int \operatorname{Sech}^2 x\, dx = \operatorname{Th} x + C.$$

$$\text{(XII)} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{Sh}^2 x} = \int \operatorname{Csech}^2 x\, dx = -\operatorname{Cth} x + C.$$

$$\text{(XIII)} \quad \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

$$\text{(XIV)} \quad \int \frac{dx}{1 - x^2} = \operatorname{Arg\,Th} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} + C.$$

---

(1) Utilizamos en la tabla exclusivamente la letra x para designar la variable. Evidentemente, podíamos haber operado con cualquier otra.

(XV) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x + C.$$

(XVI) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \text{Arg Sh } x + C = \ln [x + \sqrt{x^2+1}] + C.$$

(XVII) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Arg Ch } x + C = \ln [x + \sqrt{x^2-1}] + C.$$

EJERCICIOS:

Verificar las siguientes integrales:

1. $\int x^6 dx = \frac{1}{7}x^7 + C.$ 2. $\int 4Az^2 dz = \frac{4}{3}Az^3 + C.$

3. $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + C.$

(Recuérdese que se puede escribir $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$).

4. $\int \sqrt{bx} = \frac{2}{3}x\sqrt{bx} + C.$

$\left(\text{Téngase presente que } b \text{ es constante y que } \sqrt{x} \text{ es } x^{\frac{1}{2}}\right).$

5. $\int \frac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{y} + C.$

6. $\int (3x^2 - 2x + 1)\, dx = x^3 - x^2 + x + C.$

7. $\int \frac{4x^5 + 2x^3 + x - 1}{x^2} dx = x^4 + x^2 + \ln x + \frac{1}{x} + C.$

(Efectúese el cociente indicado).

8. $\int \frac{x^3 + x + 1}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 + \text{arc tg } x + C.$

(Téngase presente que la expresión subintegral se puede escribir $x + \frac{1}{1+x^2}$, como se ve haciendo el cociente).

9. $\int \left(2x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}\right) dx = \frac{5}{4}x^{\frac{8}{5}} - \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}} + C.$

10. $\int \frac{3x^3 - \sqrt{x}}{x} dx = x^3 - 2\sqrt{x} + C.$

(Efectúese primero el cociente).

11. $\int \left(\frac{x^3}{a} - \frac{a}{x^3}\right) dx = \frac{1}{4}\frac{x^4}{a} + \frac{1}{2}\frac{a}{x^2} + C.$

12. $\int \left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{1}{4}x^2 - 2\ln x + C.$

13. $$\int x(\sqrt{x}-5)\,dx = x^2\left(\frac{2}{5}\sqrt{x}-\frac{5}{2}\right)+C.$$

(Efectúese primero el producto).

14. $$\int\left(3\cos x - e^x + \frac{5}{x}\right)dx = 3\,\mathrm{sen}\,x - e^x + 5\ln x + C.$$

15. $$\int\left(\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x\right)^2 dx = x - \cos x + C.$$

16. $$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{arc\,sen}\,x + x + C.$$

17. $$\int 3^u\,du = \frac{3^u}{\ln 3} + C = \frac{3^u M}{\lg 3} + C.$$

($M = 0{,}43429\ldots$ es el módulo de la transformación de logaritmos neperianos en decimales, como se vió en pág. 64).

18. $$\int\left(\mathrm{Sh}\,\frac{1}{2}x + \mathrm{Ch}\,\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \mathrm{Ch}\,x + \mathrm{Sh}\,x + C.$$

(Recuérdese la fórmula $[\mathrm{Sh}\,u + \mathrm{Ch}\,u]^n = \mathrm{Sh}\,nu + \mathrm{Ch}\,nu$).

Calcular las siguientes integrales [1]:

1. $$\int (2+3x)^2\,dx.$$

(Desarróllese la potencia e intégrese la suma).

2. $$\int x(1+x^2)\,dx.$$

3. $$\int\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$$

4. $$\int\left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right)^2 dz.$$

5. $$\int\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx.$$

6. $$\int \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

7. $$\int \frac{z^3-2}{z^4}\,dz.$$

8. $$\int \sqrt[4]{ax^3}\,dx.$$

9. $$\int (\sqrt{x}+\sqrt{a})^2\,dx.$$

10. $$\int \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2}{\sqrt{x}}\,dx.$$

---

(1) Los ejercicios propuestos llevan la respuesta al final del capítulo, páginas 342-343.

11. $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{(1+2x^2)^4}$.

12. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx$.

13. $\displaystyle\int \frac{1-x^{2m}}{1-x^2}\,dx$.

14. $\displaystyle\int \frac{1-x^m}{1-x}\,dx$.

(m entero mayor que la unidad).

3. INTEGRACION POR SUSTITUCION

Si deseamos calcular

$$I = \int (3x+1)^2\,dx$$

y revisamos la tabla de integrales, vemos que, si bien no aparece en ella la función subintegral $(3x+1)^2$, se podrá llevar a la fórmula (I) haciendo la sustitución $3x+1 = z$. Pero entonces habrá que sustituir también dx por la expresión correspondiente de dz. Diferenciando ambos miembros resulta $3\,dx = dz$, o sea, $dx = \frac{1}{3}\,dz$. Queda entonces $(3x+1)^2\,dx = \frac{1}{3} z^2\,dz$ y las integrales correspondientes serán iguales (¹):

$$I = \int (3x+1)^2\,dx = \int \frac{1}{3} z^2\,dz = \frac{1}{3}\int z^2\,dz = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3} z^3 + C_1\right] =$$

$$= \frac{1}{9} z^3 + C.$$

Reemplazando z por su expresión en función de x, resulta

$$I = \frac{1}{9}(3x+1)^3 + C.$$

Es fácil verificar la exactitud del resultado pues derivando respecto de x, de acuerdo a la regla de derivación de una función de función se tiene:

$$I'(x) = \frac{1}{9}\cdot 3\,(3x+1)^2\cdot 3 = (3x+1)^2$$

En realidad, también puede calcularse la integral propuesta desarrollando directamente el cuadrado e integrando término a término. Verifique el lector que el resultado que así se obtiene coincide con el que acabamos de lograr.

(¹) Al demostrar que las diferenciales son iguales podremos asegurar que las primitivas difieren a lo sumo en una constante; por tratarse de integrales indefinidas esa constante ya se considera incluida.

También se podía haber procedido en la siguiente forma:

Para llevar la integral $\int (3x+1)^2\,dx$ al tipo $\int u^a\,du$ debe aparecer, en lugar de dx, la expresión $d(3x+1)$, que es igual a $d(3x)+d(1)=d(3x)=3\,dx$. Resulta entonces $dx=\frac{1}{3}d(3x+1)$. Reemplazando se tiene

$$\int (3x+1)^2\,dx=\frac{1}{3}\int (3x+1)^2\,d(3x+1),$$

y esta expresión es del tipo $\int u^2\,du=\frac{1}{3}u^3+C$, siendo $u=3x+1$. Resulta finalmente

$$\int(3x+1)^2\,dx=\frac{1}{3}\int (3x+1)^2\,d(3x+1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(3x+1)^3+C=$$
$$=\frac{1}{9}(3x+1)^3+C.$$

Una tercer manera de proceder es la siguiente:

Puesto que $(3x+1)^2$ es, a menos de un factor constante, la derivada de $(3x+1)^3$, empezamos por calcular esta derivada:

$$D(3x+1)^3=3(3x+1)^2\cdot 3=9(3x+1)^2.$$

Entonces la derivada de $\frac{1}{9}(3x+1)^3$ resultará $(3x+1)^2$, que es la expresión subintegral. Se tiene entonces

$$\int (3x+1)^2\,dx=\frac{1}{9}(3x+1)^3+C.$$

Veamos otro ejemplo de integración por sustitución siguiendo los 3 procedimientos indicados en el caso anterior.

Sea calcular

$$J=\int\frac{dx}{2x+5}.$$

1°) Haciendo la sustitución $2x+5=z$ resulta, diferenciando ambos miembros, $2\,dx=dz$, o sea, $dx=\frac{1}{2}dz$. Entonces es

$$J=\int\frac{dx}{2x+5}=\int\frac{\frac{1}{2}dz}{z}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\ln z+C=\frac{1}{2}\ln(2x+5)+C.$$

2°) En el numerador hacemos aparecer el diferencial del denominador. Como es $d(2x+5)=d(2x)+d(5)=2\,dx$, se tendrá

$$J=\int\frac{dx}{2x+5}=\int\frac{\frac{1}{2}d(2x+5)}{2x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+5)}{2x+5}=\frac{1}{2}\ln(2x+5)+C,$$

ya que la tabla indica (fórmula II) que la integral del cociente entre la diferencial de una función y la función es el logaritmo de la función más una constante.

3°) Puesto que el denominador es una expresión lineal en x, es evidente que —a menos de un factor numérico— es la derivada del logaritmo de esa expresión. Calculando primero esa derivada resulta

$$D\,[\ln(2x+5)] = \frac{1}{2x+5}\cdot 2.$$

Por consiguiente, $\frac{1}{2}\ln(2x+5)$ tiene como derivada la expresión subintegral

$$I = \int \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2}\ln(2x+5) + C$$

OBSERVACIONES:

Estos simples ejemplos muestran ya que es más difícil integrar que derivar. Para hacer una derivación basta aplicar unas pocas reglas, mientras que para hacer integraciones habrá que tener presente las correspondientes reglas inversas de las anteriores y además adquirir una cierta pericia para llevar la función subintegral a alguno de los tipos standard que figuran en la tabla.

Por otra parte, por complicada que sea la expresión que resulte de combinar las funciones que hemos estudiado, siempre se podrá calcular su derivada aplicando reiteradamente la regla de derivación de una función de función. En cambio, si se escribe una expresión subintegral cualquiera, *en general* no se podrá calcular la integral correspondiente. Por eso en los libros las integrales aparecen cuidadosamente seleccionadas y escalonadas en cuanto a su dificultad, a fin de que el estudiante se vaya familiarizando con los distintos procedimientos de cálculo.

Cabe recomendar entonces, que se hagan *muchos* ejercicios de integración. Así se irán aprendiendo todos los trucos que el calculista experimentado aplica con rapidez.

Hay finalmente otra circunstancia que queremos señalar para evitar que el lector se descorazone ante algunas dificultades. Como durante un cierto tiempo ha estado aplicando una serie de reglas de derivación, a veces comete errores de este tipo: Los principiantes dicen: "La integral de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$", cuando en realidad es $-\cos x$. Estos casos de inercia mental son bastante frecuentes: Si se pregunta quién mató a Caín, casi seguramente se responderá que fué Abel...

EJEMPLOS:

1°) Calcular $I_1 = \int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{5x^3+1}}$.

Haciendo la sustitución $5x^3+1 = z$ se obtiene, diferenciando ambos miembros, $15x^2\,dx = dz$, es decir, $3x^2\,dx = \frac{1}{5}\,dz$:

$$I_1 = \int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{5x^3+1}} = \int \frac{\frac{1}{5}\,dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{5}\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{5}\,\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x^3+1} + C.$$

2°) Calcular $I_2 = \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$.

Haciendo la sustitución $\operatorname{sen} x = z$ resulta $\cos x\,dx = dz$.

$$I_2 = \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx = \int z^2\,dz = \frac{1}{3}z^3 + C = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C.$$

3°) Calcular $I_3 = \int \operatorname{tg} 2x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}\,dx.$

Haciendo la sustitución $\cos 2x = z$ resulta, diferenciando, $-2\operatorname{sen} 2x\,dx = dz$, o sea, $\operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{1}{2}dz$:

$$I_3 = \int \operatorname{tg} 2x\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2}dz}{z} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2}\ln z + C = -\frac{1}{2}\ln(\cos 2x) + C.$$

4°) Calcular $I_4 = \int e^{-\frac{x}{a}}\,dx.$

Haciendo la sustitución $-\frac{x}{a} = z$ resulta, diferenciando, $dx = -a\,dz$:

$$I_4 = \int e^{-\frac{x}{a}}\,dx = -a\int e^z\,dz = -a e^z + C = -a e^{-\frac{x}{a}} + C.$$

5°) Calcular $I_5 = \int \operatorname{sen} x \cdot \cos x\,dx.$

Se puede proceder en varias formas:

a) Haciendo $\operatorname{sen} x = z$ resulta $\cos x\,dx = dz$ e

$$I_5 = \int z\,dz = \frac{1}{2}z^2 + C_1 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C_1.$$

b) Haciendo $\cos x = t$ resulta $-\operatorname{sen} x\,dx = dt$ e

$$I_5 = -\int t\,dt = -\frac{1}{2}t^2 + C_2 = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2.$$

c) Por ser $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$ resulta

$$I_5 = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,dx,$$

y haciendo $2x = u$ se tiene

$$I_5 = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_3.$$

Verifíquese que los 3 resultados hallados difieren en una constante.

6°) Calcular $I_6 = \int \operatorname{Th}^2 2x\,dx.$

Teniendo en cuenta que es $\operatorname{Th}^2 u = \frac{\operatorname{Sh}^2 u}{\operatorname{Ch}^2 u} = \frac{\operatorname{Ch}^2 u - 1}{\operatorname{Ch}^2 u} = 1 - \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 u}$ resulta, con $2x = u$:

$$I_6 = \frac{1}{2}\int \operatorname{Th}^2 u\,du = \frac{1}{2}[u - \operatorname{Th} u] + C = \frac{1}{2}[2x - \operatorname{Th} 2x] + C =$$

$$= x - \frac{1}{2}\operatorname{Th} 2x + C.$$

EJERCICIOS:

Verificar las siguientes integrales:

1. $\int (x-1)^3\,dx = \frac{1}{4}(x-1)^4 + C.$

2. $\int \frac{1}{(2x-1)^2}\,dx = \frac{\frac{1}{2}}{1-2x} + C.$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}\,dx = -(3-2x)^{\frac{1}{2}} + C.$

4. $\int \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+x}} = 2\sqrt{5+x} + C.$

6. $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z}} = -2(1-z)^{\frac{1}{2}} + C.$

7. $\int (a+bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C.$

8. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{5-2x^2}} = -\frac{1}{3}(5-2x^2)^{\frac{3}{4}} + C.$

9. $\int \frac{x^2+\frac{2}{3}}{\sqrt{x^3+2x}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+2x} + C.$

(Hágase $x^3+2x=t$).

10. Calcular

$$\int \frac{x^3\,dx}{(1+x^2)^3}.$$

Solución: Haciendo la sustitución $1+x^2=z$ resulta $x^3\,dx = x^2\,(x\,dx) =$ $= x^2\cdot\frac{1}{2}d\,(1+x^2) = \frac{1}{2}(z-1)\,dz$ y la integral queda

$$\int \frac{x^3\,dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{z-1}{z^3}\,dz = \frac{1}{2}\left[\int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dz}{z^3}\right] = -\frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{4}\frac{1}{z^2} + C =$$

$$= \frac{-2z+1}{4z^2} + C = -\frac{1+2x^2}{4(1+x^2)^2} + C.$$

Verificar las siguientes integrales:

11. $\int ae^{ax}\,dx = e^{ax} + C.$

12. $\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2e^{\frac{1}{2}x} + C.$

13. $\int \frac{dx}{e^x} = -\frac{1}{e^x} + C.$

14. $\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$

15. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + C.$

16. $\int a^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\frac{a^{2x}}{\ln a} + C.$

17. $\int \frac{dz}{2^{2z}} = -\frac{1}{2^{2z+1}\ln 2} + C.$

18. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\left(e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) + C.$

19. $\int y \cdot a^{y^2}\,dy = \frac{a^{y^2}}{2\ln a} + C.$

20. $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a}\ln(ax + b) + C.$

21. $\int \frac{dx}{1 - x} = -\ln(1 - x) + C = \ln\frac{1}{1 - x} + C.$

22. $\int \frac{x^2}{1 - x}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 - x - \ln(1 - x) + C$

(Efectúese la división indicada).

23. $\int \frac{x + 1}{(x - 1)^2}\,dx = \ln(x - 1) - \frac{2}{x - 1} + C.$

(Obsérvese que el numerador de la expresión subintegral se puede escribir $(x - 1) + 2$ y calcúlense las dos integrales que resultan).

24. Resolver

$$\int \frac{dx}{x(1 + x^n)}.$$

Solución:

$$\int \frac{dx}{x(1 + x^n)} = \int \frac{(1 + x^n) - x^n}{x(1 + x^n)}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x^{n-1}\,dx}{1 + x^n} =$$

$$= \ln x - \frac{1}{n}\ln(1 + x^n) + C = \frac{1}{n}\ln\frac{x^n}{1 + x^n} + C.$$

25. Resolver la siguiente integral:

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Solución:

$$I = \int \ln x \cdot d(\ln x) = \int z\,dz = \frac{1}{2}z^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

Verificar las siguientes integrales:

26. $\int (\cos 2x + \cos x)\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x + C.$

27. $\int \operatorname{sen} (4x - 7)\, dx = -\frac{1}{4} \cos (4x - 7) + C.$

28. $\int \sec^2 \frac{1}{2} x\, dx = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + C.$

29. $\int \sec (3x - 2) \operatorname{tg} (3x - 2)\, dx = \frac{1}{3} \sec (3x - 2) + C.$

30. $\int \operatorname{cotg} \frac{x}{5} \operatorname{cosec} \frac{x}{5}\, dx = -5 \operatorname{cosec} \frac{x}{5} + C.$

31. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 2x} = -\frac{1}{2} \operatorname{cotg} 2x + C.$

32. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 + 2 \cos x} = -\frac{1}{2} \ln (1 + 2 \cos x) + C.$

33. $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos^3 x\, dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C.$

34. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^4 x}\, dx = \frac{1}{3} \sec^3 x + C.$

35. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 x + C.$

36. $\int \left(\operatorname{cotg} 3x + \operatorname{tg} \frac{1}{3} x\right) dx = \frac{1}{3} \ln (\operatorname{sen} 3x) - 3 \ln \left(\cos \frac{1}{3} x\right) + C.$

37. Calcular

$$\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx.$$

Solución:

$$\operatorname{cotg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1 = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

$$\int \operatorname{cotg}^2 x\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx - \int dx = -\operatorname{cotg} x - x + C.$$

Análogamente resulta

38. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \operatorname{tg} x - x + C.$

Verificar las siguientes integrales:

39. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = -2 \operatorname{cotg} 2x + C.$

(Téngase en cuenta que $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$).

40. $\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x) + C = -\operatorname{cotg} \frac{1}{2} x + C.$

(Multiplíquese numerador y denominador por $1 + \cos x$).

41. Calcular

$$I = \int (\operatorname{tg} 3x - 3)^2\, dx.$$

Solución: Desarrollando el cuadrado resulta

$$I = \int \operatorname{tg}^2 3x\, dx - 6\int \operatorname{tg} 3x\, dx + 9\int dx = I_1 - 6I_2 + 9I_3.$$

$$I_1 = \int (\sec^2 3x - 1)\, dx = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x - x + C_1.$$

$$I_2 = -\frac{1}{3}\ln(\cos 3x) + C_2.$$

$$I_3 = x + C_3.$$

$$I = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + 2\ln(\cos 3x) + 8x + C.$$

42. Calcular

$$\int \sec^4 x\, dx.$$

Solución:

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\, dx + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot d(\operatorname{tg} x) + \int d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C.$$

43. Calcular

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx.$$

Solucion:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\operatorname{tg} x\, dx =$$

$$= \int \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x\, dx - \int \operatorname{tg} x\, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg} x \cdot d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln(\cos x) + C.$$

(En la pág. 332 damos un procedimiento más directo y general para resolver este ejercicio).

Verificar las siguientes integrales:

44. $\int \operatorname{Sh}\frac{1}{3}x\, dx = 3\operatorname{Ch}\frac{1}{3}x + C.$

45. $\int x\operatorname{Ch}(x^2+1)\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{Sh}(x^2+1) + C.$

46. $\int \operatorname{Th} x\, dx = \ln(\operatorname{Ch} x) + C.$

47. $\displaystyle\int \mathrm{Cth}\,\frac{1}{2}x\,dx = 2\ln\left(\mathrm{Sh}\,\frac{1}{2}x\right) + C.$

48. $\displaystyle\int (\mathrm{Sh}\,x + \mathrm{Ch}\,x)^3\,dx = \frac{1}{3}(\mathrm{Sh}\,3x + \mathrm{Ch}\,3x) + C.$

49. $\displaystyle\int \mathrm{Sh}\,x\cdot\mathrm{Ch}\,x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Sh}^2\,x + C.$

50. $\displaystyle\int \mathrm{Cth}^2\,x\,dx = x - \mathrm{Cth}\,x + C.$

51. $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{Sh}^2\,x\cdot\mathrm{Ch}^2\,x} = -2\,\mathrm{Cth}\,2x + C.$

52. $\displaystyle\int \mathrm{Sh}^3\,x\,dx = \frac{1}{3}\mathrm{Ch}^3\,x - \mathrm{Ch}\,x + C.$

53. $\displaystyle\int \mathrm{Sech}^4\,\frac{1}{2}x\,dx = 2\,\mathrm{Th}\,\frac{1}{2}x\left(1 - \frac{1}{3}\mathrm{Th}^2\,\frac{1}{2}x\right) + C.$

Calcular las siguientes integrales (1):

1. $\displaystyle\int \sqrt{3+4x}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x}}.$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-2x)^2}.$

4. $\displaystyle\int x(1-2x^2)^9\,dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{x-3}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(a+bx^2)^3}\,dx.$

7. $\displaystyle\int a^2 e^{ax}\,dx.$

8. $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x}\,dx.$

9. $\displaystyle\int \frac{n}{a^{nx}}\,dx.$

10. $\displaystyle\int (e^{5\theta})^2\,d\theta.$

11. $\displaystyle\int \frac{e^{nx}\,dx}{\sqrt{1-e^{nx}}}.$

12. $\displaystyle\int \frac{5x^4+1}{x^5+x}\,dx.$

13. $\displaystyle\int \frac{x-3}{6x-x^2}\,dx.$

14. $\displaystyle\int \frac{z\,dz}{7-2z^2}.$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{3+2x^3}.$

16. $\displaystyle\int \frac{1-2x}{3+x}\,dx.$

17. $\displaystyle\int \frac{1+x}{1-x}\,dx.$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx.$

19. $\displaystyle\int \frac{2x^3+x}{x^2-3}\,dx.$

20. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx.$

21. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx.$

22. $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$

23. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{2-\mathrm{tg}\,x}\,dx.$

24. $\displaystyle\int \frac{(a+\ln x)^2}{x}\,dx.$

---

(1) Los resultados se encuentran en las páginas 343-345.

25. $\int (\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x)\,dx.$

26. $\int \sec^2 \frac{5}{2} x\,dx.$

27. $\int \operatorname{cosec}^2 (3x + 2)\,dx.$

28. $\int \sec^2 \frac{1}{3} x\,dx.$

29. $\int \operatorname{tg}^2 5x\,dx.$

30. $\int (\sec x - \operatorname{tg} x)^2\,dx.$

31. $\int (1 - \operatorname{tg} x)^2\,dx.$

32. $\int \cos 3x\,dx.$

33. $\int \operatorname{cotg} x\,dx.$

34. $\int y^3 \sec^2 y^4\,dy.$

35. $\int \operatorname{cosec}^2 2x\,dx.$

36. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{3 - 4 \operatorname{tg} x}}\,dx.$

37. $\int \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{\cos n\alpha}\,d\alpha.$

38. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \cos x}}\,dx.$

39. $\int \frac{1 + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}\,dx.$

40. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 z}{\sqrt{1 - \operatorname{cotg} z}}\,dz.$

41. $\int \frac{\operatorname{sen} nx\,dx}{2 + \cos nx}.$

42. $\int (\operatorname{cotg} x - 1)^2\,dx.$

43. $\int \sec 2x \cdot \operatorname{tg} 2x\,dx.$

44. $\int e^x \operatorname{tg} (e^x)\,dx.$

45. $\int \frac{d\theta}{\operatorname{cotg} 3\theta}.$

46. $\int \frac{\sec x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx.$

$\left(\text{Llévese la expresión subintegral a la forma } \frac{\sec^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}\right).$

47. $\int (\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)^2\,dx.$

48. $\int \frac{e^x + \sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x + e^x}}\,dx.$

49. $\int \frac{\sec nx \cdot \operatorname{tg} nx}{a \sec nx - b}\,dx.$

50. $\int 4 \operatorname{cotg}^3 2x \cdot \operatorname{cosec}^2 2x\,dx.$

51. $\int \frac{\sec^2 2\alpha}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} 2\alpha}}\,d\alpha.$

52. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}.$

(Multiplíquese numerador y denominador por $1 - \operatorname{sen} x$).

53. $\int \cos^3 x\,dx.$

[Téngase en cuenta que es $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x)$].

54. $\int \operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} x\,dx.$

55. $\int \sec^4 \frac{1}{2} x\,dx.$

56. $\int \operatorname{cotg}^3 x\,dx.$

57. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx.$

[Recuérdese que $\operatorname{tg}^5 x = \operatorname{tg}^3 x\,(\sec^2 x - 1) = \operatorname{tg}^3 x \cdot \sec^2 x - \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x + \operatorname{tg} x$].

58. $\int \mathrm{tg}^3 x \cdot \sec x \, dx.$

[Téngase en cuenta que es $\mathrm{tg}^3 x \cdot \sec x = \mathrm{tg}\, x (\sec^2 x - 1) \sec x$].

59. $\int \mathrm{cotg}^3 x \cdot \mathrm{cosec}^2 x \, dx.$ 60. $\int \mathrm{cotg}^4 x \cdot \mathrm{cosec}^4 x \, dx.$

(Obsérvese que es $\mathrm{cosec}^2 x = 1 + \mathrm{cotg}^2 x$).

61. $\int \mathrm{Ch}\,(ax + b)\, dx.$ 62. $\int \mathrm{Sech}^2\,(1 - x)\, dx.$

63. $\int \mathrm{Cosech}^2\,(2x + 1)\, dx.$ 64. $\int \mathrm{Sech}\, 2x\, \mathrm{Th}\, 2x\, dx.$

65. $\int \mathrm{Cosech}\, nx\, \mathrm{Cotgh}\, nx\, dx.$ 66. $\int \mathrm{sen}\, nu \cdot \cos nu\, du.$

67. $\int \mathrm{sen}\, nu \cdot \cos^2 nu\, du.$ 68. $\int \mathrm{Sh}\, 2x \cdot \mathrm{Ch}^2\, 2x\, dx.$

69. $\int \frac{\mathrm{Ch}\, x}{1 + \mathrm{Sh}\, x}\, dx.$ 70. $\int \mathrm{Sech}^2\, 3x\, e^{\mathrm{Th}\, 3x}\, dx.$

4. INTEGRACION DE EXPRESIONES DE LA FORMA $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$.

Veremos cómo, mediante las fórmulas

$$\text{(XIII)} \quad \int \frac{dx}{1 + x^2} = \mathrm{arc\,tg}\, x + C,$$

$$\text{(XIV)} \quad \int \frac{dx}{1 - x^2} = \mathrm{Arg\,Th}\, x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} + C,$$

se puede integrar cualquier expresión en la que aparezca como cantidad subintegral la unidad dividida por un trinomio de 2º grado.

Empecemos por algunos casos particulares.

1º) Sea integrar $I_1 = \int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}$.

El denominador se puede escribir $a^2 + b^2 x^2 = a^2 \left[1 + \frac{b^2}{a^2} x^2 \right] =$

$$= a^2 \left[1 + \left(\frac{b}{a} x \right)^2 \right].$$

Haciendo la sustitución $\frac{b}{a} x = z$, o sea, $x = \frac{a}{b} z$ y $dx = \frac{a}{b} dz$, resulta

$$I_1 = \frac{a}{b} \int \frac{dz}{a^2 (1 + z^2)} = \frac{1}{ab} \mathrm{arc\,tg}\, z + C = \frac{1}{ab} \mathrm{arc\,tg} \frac{b}{a} x + C.$$

2º) Calcular $I_2 = \int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2}$.

El denominador se puede escribir $a^2 - b^2x^2 = a^2\left[1 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right] =$
$= a^2\left[1 - \left(\frac{b}{a}x\right)^2\right]$.

Haciendo la sustitución $\frac{b}{a}x = z$, o sea, $x = \frac{a}{b}z$ y $dx = \frac{a}{b}dz$, resulta

$$I_2 = \frac{a}{b}\int\frac{dz}{a^2(1-z^2)} = \frac{1}{ab}\operatorname{Arg}\operatorname{Th} z + C = \frac{1}{2}\frac{1}{ab}\ln\frac{1+z}{1-z} + C,$$

y escribiendo estas expresiones en función de x resulta

$$I_2 = \frac{1}{ab}\operatorname{Arg}\operatorname{Th}\frac{b}{a}x + C = \frac{1}{2ab}\ln\frac{a+bx}{a-bx} + C.$$

3º) **El caso en el cual aparece en el denominador un trinomio completo de 2º grado siempre se puede llevar a los anteriores recordando la relación**

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{1}{4}\frac{b^2}{a^2}\right]$$

que se puede escribir en la forma $a_1^2 \pm b_1^2z^2$, con $z = x + \frac{1}{2}\frac{b}{a}$ y a_1 y b_1 determinados por los coeficientes a, b y c.

Mejor que recordar fórmulas generales para este caso es adiestrarse para llevar cualquier trinomio a los casos 1º) y 2º).

Veamos algunos ejemplos:

$$I_3 = \int\frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

El trinomio se puede escribir

$x^2 + 4x + 13 = (x+2)^2 + 13 - 2^2 = (x+2)^2 + 9 = (x+2)^2 + 3^2$.

Con la sustitución $x + 2 = z$ y $dx = dz$ resulta, de acuerdo a I_1,

$$I_3 = \int\frac{dz}{z^2 + 3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arc tg}\frac{1}{3}z + C = \frac{1}{3}\operatorname{arc tg}\frac{1}{3}(x+2) + C.$$

Calcular

$$I_4 = \int\frac{dx}{2x^2 - 4x - 6}.$$

El denominador se puede escribir, en este caso,

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 - 2x - 3) = 2[(x-1)^2 - 3 - 1] = 2[(x-1)^2 - 2^2].$$

Haciendo $x - 1 = z$ y $dx = dz$ se tiene, de acuerdo a I_2,

$$I_4 = \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2 - 2^2} = -\frac{1}{2}\int\frac{dz}{2^2 - z^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Arg}\operatorname{Th}\frac{1}{2}z + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\frac{2+z}{2-z} + C.$$

Pasando a la variable x resulta, finalmente,

$$I_4 = -\frac{1}{4}\,\text{Arg Th}\,\frac{1}{2}(x-1) + C = -\frac{1}{8}\ln\frac{1+x}{3-x} + C$$

EJERCICIOS:

Verificar las siguientes integrales:

1. $$\int \frac{dx}{25 + 9x^2} = \frac{1}{15}\,\text{arc tg}\,\frac{3}{5}\,x + C.$$

2. $$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \text{arc tg}\,x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

3. $$\int \frac{1-x}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\,2x - \frac{1}{8}\ln(1+4x^2) + C.$$

4. $$\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx = 2\,\text{Arg Th}\,x - x + C = \ln\frac{1+x}{1-x} - x + C.$$

(Efectúese la división indicada).

5. $$\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx = 2\,\text{arc tg}\,x - x + C.$$

6. Resolver la integral

$$\int \frac{dx}{1 - 2x + 2x^2}.$$

Solución: Podemos escribir

$$1 - 2x + 2x^2 = 2[x^2 - x + \tfrac{1}{2}] = 2[(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}].$$

La integral resulta

$$\int \frac{dx}{2[(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}]} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}} = \text{arc tg}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \text{arc tg}\,(2x-1) + C.$$

Verificar las integrales

7. $$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \frac{1}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{1}{3}(x+1) + C.$$

8. $$\int \frac{dx}{1 + x + x^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

9. Calcular la integral

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 5}\,dx.$$

Solución: En general, una integral del tipo $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}\,dx$ se puede calcular en base a los resultados anteriores. Habrá que descomponerla en dos expresiones con el denominador dado de modo que en una de ellas el numerador sea el binomio $2ax + b$ (que es precisamente la derivada del denominador) y en la otra expresión el numerador sea un coeficiente numérico. En esta forma se logra hacer el cálculo empleando *logaritmos* y *arcos tangentes*. Veamos cómo se procede en este caso concreto:

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+2}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,dx +$$

$$+ 2\int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \text{arc tg}\,\frac{1}{2}(x-1) + C.$$

10. **Calcular**

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx.$$

Solución: Una integral del tipo $\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}\,dx$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado $\geqslant 2$, siempre se puede resolver haciendo primero la división, como lo muestra este ejemplo:

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1 + \frac{2x}{x^2-x+1} = 1 + \frac{(2x-1)+1}{x^2-x+1}.$$

La integral resulta

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,dx = x + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Calcular las siguientes integrales [1]:

1. $\int \frac{dx}{x^2+25}$.
2. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$.
3. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$.
4. $\int \frac{dx}{4x^2+9}$.
5. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.
6. $\int \frac{4x^3\,dx}{9+x^8}$.
7. $\int \frac{dx}{a^2+(x+b)^2}$.
8. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. (Sustitúyase $e^x = z$).
9. $\int \frac{dx}{3x^2-2x+2}$.
10. $\int \frac{dx}{8x-x^2-7}$.
11. $\int \frac{dx}{3x-x^2-2}$.
12. $\int \frac{dx}{x^2+2x+17}$.
13. $\int \frac{dx}{x^2-x-1}$.
14. $\int \frac{dx}{4x^2-12x+10}$.
15. $\int \frac{dx}{2x-x^2-5}$.
16. $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$.
17. $\int \frac{dx}{x^2+6x+8}$.
18. $\int \frac{4x+10}{x^2+2x+5}\,dx$.
19. $\int \frac{8x-8}{4x^2-4x-3}\,dx$.
20. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$.
21. $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx$.
22. $\int \frac{x+2}{4x-x^2}\,dx$.

---

(1) Los resultados se encuentran en las páginas 345-346.

23. $\int \frac{2x+5}{2x^2+2x+1}\,dx.$ 24. $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\,dx.$

5. INTEGRACION DE EXPRESIONES DE LA FORMA $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Hemos indicado en la tabla de integrales las fórmulas inmediatas:

$$\text{(XV)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\, x + C.$$

$$\text{(XVI)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \text{Arg Sh}\, x + C = \ln\,(x+\sqrt{x^2+1}) + C.$$

$$\text{(XVII)} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \text{Arg Ch}\, x + C = \ln\,(x+\sqrt{x^2-1}) + C.$$

Veremos ahora cómo se conduce a estas fórmulas cualquier caso donde se presenta como expresión subintegral la unidad dividida por la raíz cuadrada de un trinomio de 2º grado.

1º) Sea calcular $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Por ser $a^2 - x^2 = a^2\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$, con la sustitución $\frac{x}{a} = z$, resulta $dx = a\,dz$ e

$$I_1 = \int \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2-a^2z^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{arc sen}\, z + C = \text{arc sen}\, \frac{x}{a} + C.$$

2º) Sea calcular $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Escribiendo $x^2 \pm a^2 = a^2\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1\right]$, con la sustitución $\frac{x}{a} = z$, resulta $dx = a\,dz$ e

$$I_2 = \int \frac{a\,dz}{\sqrt{a^2\,(z^2 \pm 1)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm 1}} = \ln\,(z + \sqrt{z^2 \pm 1}) + C =$$
$$= \ln\,(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C,$$

habiendo incluído el término $-\ln a$ en la constante de integración.

3º) Cuando se trata de un trinomio $ax^2 + bx + c$ siempre se podrá llevar a la forma $a\,(x+\alpha)^2 \pm \beta^2$ y, según sea el signo de a y el signo que antecede a β^2, se podrá llevar a una de las fórmulas (XV) a (XVII), tal como lo muestran los siguientes ejemplos:

Sea calcular $I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$.

El trinomio se puede escribir

$$4x - x^2 - 3 = -3 - (x-2)^2 + 4 = 1 - (x-2)^2.$$

Haciendo $x - 2 = z$ y $dx = dz$ resulta

$$I_3 = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \operatorname{arc\,sen} z + C = \operatorname{arc\,sen}(x-2) + C.$$

Sea ahora calcular $I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 25}}$.

Hacemos las siguientes transformaciones: $x^2 - 6x + 25 = (x-3)^2 + 25 - 9 = 4^2 \left[\frac{1}{4^2}(x-3)^2 + 1 \right]$. Sustituyendo $x - 3 = 4z$ y $dx = 4dz$ resulta

$$I_4 = \int \frac{4\,dz}{4\sqrt{z^2+1}} = \operatorname{Arg\,Sh} z + C = \ln(z + \sqrt{z^2+1}) + C =$$

$$= \operatorname{Arg\,Sh} \frac{1}{4}(x-3) + C = \ln\left[\frac{1}{4}(x-3) + \frac{1}{4}\sqrt{x^2 - 6x + 25}\right] + C =$$

$$= \ln(x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x + 25}) + C'.$$

Por último, consideremos $I_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 3x + \frac{1}{2}}}$.

Hacemos las siguientes transformaciones: $3x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{12}\left[12\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{4}\left[4 \cdot 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right]$ y con la sustitución $2\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) = z$ y $2\sqrt{3}\,dx = dz$ resulta

$$I_5 = \int \frac{dz}{2\sqrt{3}\,\frac{1}{2}\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arg\,Ch} z + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) + C.$$

Volviendo a la variable x se tiene

$$I_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arg\,Ch} \sqrt{3}(2x+1) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left[2\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{12\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1}\right] + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left[\sqrt{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{3x^2 + 3x + \frac{1}{2}}\right] + C'.$$

Ejercicios:

Verificar las siguientes integrales:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2}(3x - 2) + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b} \operatorname{arc\,sen} \frac{bx}{a} + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \text{arc sen}\left(\frac{x}{a} - 1\right) + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{6z - z^2 - 8}} = \text{arc sen}\,(z - 3) + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2 - 30x - 21}} = \frac{1}{3}\,\text{arc sen}\,\frac{1}{2}\,(3x + 5) + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}} = \frac{1}{2}\,\text{Arg Sh}\,\frac{2}{3}\,x + C = \frac{1}{2}\ln\,(2x + \sqrt{4x^2 + 9}) + C'.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 20x}} = \text{Arg Ch}\left(\frac{x + 10}{10}\right) + C = \ln\,(x + 10 + \sqrt{x^2 + 20x}) + C'.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 25}} = \text{Arg Sh}\,\frac{1}{4}\,(x - 3) + C =$

$$= \ln\left[(x - 3) + \sqrt{x^2 - 6x + 25}\right] + C'.$$

Calcular las siguientes integrales (1):

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x - 1)^2}}.$

4. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x\,(1 - x)}}.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7 - 6x - x^2}}.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x - x^2}}.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x^2}}.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x + 3x^2}}.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x - 3}}.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 4x + 5}}.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$

16. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}.$

17. $\displaystyle\int \frac{4x - 1}{\sqrt{4 - x^2}}\,dx.$

18. $\displaystyle\int \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}\,dx.$

19. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 - 6x + 4}}\,dx.$

20. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}.$

21. $\displaystyle\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x}}\,dx.$

22. $\displaystyle\int \frac{2x - 1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}}\,dx.$

(1) Los resultados se encuentran en las páginas 346-347.

23. $\displaystyle\int \frac{1-x}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx.$

24. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

25. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}.$

ALGUNAS INTEGRALES IMPORTANTES: Porque aparecen con frecuencia en las aplicaciones del cálculo integral, es útil tratar especialmente algunas integrales cuyo resultado convendrá retener de memoria.

1º) $$I_1 = \int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$$

Basta recordar la fórmula trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ y resulta

$$I_1 = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right] + C =$$
$$= \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x\cdot\cos x) + C.$$

2º) $$I_2 = \int \cos^2 x\,dx.$$

Análogamente al caso anterior, por ser $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ resulta

$$I_2 = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right] + C =$$
$$= \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x\cdot\cos x) + C.$$

3º) $$I_3 = \int \operatorname{Sh}^2 x\,dx.$$

Por ser $\operatorname{Sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{Ch} 2x - 1)$ resulta

$$I_3 = \frac{1}{2}\int (\operatorname{Ch} 2x - 1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\operatorname{Sh} 2x - x\right] + C =$$
$$= \frac{1}{2}(\operatorname{Sh} x\cdot\operatorname{Ch} x - x) + C.$$

4º) $$I_4 = \int \operatorname{Ch}^2 x\,dx.$$

Por ser $\operatorname{Ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{Ch} 2x + 1)$ resulta

$$I_4 = \frac{1}{2}\int (\mathrm{Ch}\,2x + 1)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\mathrm{Sh}\,2x + x\right] + C =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{Sh}\,x \cdot \mathrm{Ch}\,x + x) + C.$$

5º) $$I_5 = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \operatorname{cosec} x\,dx.$$

Recordando que $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$ y multiplicando numerador y denominador por $\cos \frac{1}{2}x$ queda

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x \cos^2 \frac{1}{2}x}.$$

Haciendo la sustitución $\operatorname{tg} \frac{1}{2}x = z$ y diferenciando se obtiene $\frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = dz$, o sea, $\frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2}x} = 2dz.$

$$I_5 = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{2dz}{2z} = \int \frac{dz}{z} = \ln z + C = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}x\right) + C.$$

6º) $$I_6 = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x\,dx.$$

Haciendo $x = \frac{1}{2}\pi - z$ y $dx = -dz$ resulta, en base a la integral anterior,

$$I_6 = \int \frac{-dz}{\operatorname{sen} z} = -\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}z + C = -\ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) + C.$$

Recordando que en 2 ángulos complementarios α y $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ es $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = 1 : \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)$, tomando logaritmos resulta $\ln \operatorname{tg} \alpha = -\ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)$.

Como $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$ tiene como complemento a $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x$, se tiene finalmente

$$I_6 = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) + C.$$

Obsérvese que a este mismo resultado se llega procediendo de la siguiente manera:

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx =$$

$$= \int \frac{d(\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C = \ln \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} + C =$$

$$= \ln \frac{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)^2}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} + C = \ln \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}x} + C =$$

$$= \ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) + C = \operatorname{Arg\,Sh}(\operatorname{tg} x) + C.$$

Esta integral es precisamente el gudermaniano inverso $gd^{-1}\,x$ función definida en la página 94.

EJERCICIOS:

1 Resolver

$$\int \cos^4 x \cdot \operatorname{sen}^2 x\, dx.$$

Solución: Recordando que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ se tiene, por consiguiente, $\operatorname{sen}^2 2x = 4 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x$. Además, $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, con lo que resulta

$\cos^4 x \cdot \operatorname{sen}^2 x = (\cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x) \cos^2 x = \frac{1}{8} \operatorname{sen}^2 2x\,(1 + \cos 2x).$

La integral queda, entonces,

$$\int \cos^4 x \cdot \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 - \cos 4x)\, dx + \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^2 2x\, d(\operatorname{sen} 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x\right) + C.$$

2. Resolver

$$\int (\sec x + \operatorname{tg} x)\, dx.$$

Solución: Puede procederse con cada función por separado y recordar los resultados hallados anteriormente; pero transformando la expresión subintegral se llega más rápidamente a la solución, pues

$$\sec x + \operatorname{tg} x = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x\,(1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x},$$

y la integral resulta

$$\int (\sec x + \operatorname{tg} x)\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{1 - \operatorname{sen} x} = -\int \frac{d\,(1 - \operatorname{sen} x)}{1 - \operatorname{sen} x} =$$
$$= -\ln (1 - \operatorname{sen} x) + C.$$

Verificar las siguientes integrales:

3. $\int \frac{dx}{\operatorname{Sh} x} = \ln \operatorname{Th} \frac{1}{2} x + C.$

4. $\int \frac{dx}{\operatorname{Ch} x} = \operatorname{arc\,tg}\,(\operatorname{Sh} x) + C.$ (Hágase $\operatorname{Sh} x = z$).

5. $\int \cos^6 x\, dx = \frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C.$

6. Resolver

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x}.$$

Solución:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x} = 2\int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x} + \int \frac{d\,(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^3 x} =$$
$$= \ln (\operatorname{tg} 2x) - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 x + C.$$

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int (1 + \operatorname{cosec} x)^2\, dx.$ R: $x + 2 \ln \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right) - \operatorname{cotg} x + C.$

2. $\int \left(\sec \frac{1}{2} x + \operatorname{cosec} 2x\right) dx.$ R: $2 \ln \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} x + \sec \frac{1}{2} x\right) + \frac{1}{2} \ln (\operatorname{tg} x) + C.$

3. $\int \sec^3 x\, dx.$ R: $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cdot \sec^2 x + \frac{1}{2} \ln (\sec x + \operatorname{tg} x) + C.$

4. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{5} \cos^4 \frac{x}{5}\, dx.$ R: $\frac{1}{16} x - \frac{5}{64} \operatorname{sen} \frac{4}{5} x + \frac{5}{48} \operatorname{sen}^3 \frac{2}{5} x + C.$

5. $\int \operatorname{Th}^4 2x\, dx.$ R: $x - \frac{1}{2} \operatorname{Th} 2x - \frac{1}{6} \operatorname{Th}^3 2x + C.$

6. INTEGRACION DE EXPRESIONES DE LA FORMA $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx$.

Empezaremos por tratar los 3 casos particulares siguientes:

1º) Sea calcular $I_1 = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$

El radical tendrá valores reales si es $x^2 \leqslant a^2$, es decir, si $-a \leqslant x \leqslant +a$, lo cual indica que convendrá hacer la sustitución

$$x = a \operatorname{sen} t.$$

En efecto, como $\operatorname{sen} t$ varía entre -1 y $+1$, x variará entre $-a$ y $+a$.

Resulta entonces $dx = a \cos t \, dt$ e

$$I_1 = \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t}\, a \cos t \, dt = a^2 \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t \, dt =$$
$$= a^2 \int \cos^2 t \, dt.$$

Esta integral ha sido calculada en la página 296; se obtiene entonces

$$I_1 = \frac{1}{2} a^2 (t + \operatorname{sen} t \cdot \cos t) + C.$$

Volviendo a la variable x, por ser $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $t = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}$ resulta

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C.$$

2°) Sea calcular $I_2 = \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx.$

En este caso el radical es real cualquiera sea x. Por consiguiente, haremos la sustitución

$$x = a \operatorname{Sh} t,$$

dado que $\operatorname{Sh} t$ varía de $-\infty$ a $+\infty$. Entonces, $dx = a \operatorname{Ch} t \, dt$ e

$$I_2 = \int \sqrt{a^2 \operatorname{Sh}^2 t + a^2}\, a \operatorname{Ch} t \, dt = a^2 \int \sqrt{\operatorname{Sh}^2 t + 1} \operatorname{Ch} t \, dt = a^2 \int \operatorname{Ch}^2 t \, dt.$$

Puesto que en la página 296 hemos hallado

$$\int \operatorname{Ch}^2 t \, dt = \frac{1}{2}(t + \operatorname{Sh} t \cdot \operatorname{Ch} t) + C,$$

y es $t = \operatorname{Arg\,Sh} \frac{x}{a}$ y $\operatorname{Ch} t = \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2 t} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + x^2}$, resulta

$$I_2 = \frac{1}{2} a^2 (t + \operatorname{Sh} t \cdot \operatorname{Ch} t) + C = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{Arg\,Sh} \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 + x^2}\right) + C.$$

Como $\operatorname{Arg\,Sh} \frac{x}{a}$ y $\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ difieren en una constante (pág. 93), también es

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + x\sqrt{a^2 + x^2}\right] + C.$$

Nota:

También es apropiada la sustitución $x = a \operatorname{tg} z$, pues la tangente varía de $-\infty$ a $+\infty$. Se llega entonces a $\int \sec^3 z \, dz$, cuya solución hemos dado en el ejercicio 3 de la página anterior.

3°) **Finalmente, consideremos** $I_3 = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$.

Como debe ser $x^2 \geqslant a^2$ para que el radical sea real, haremos $x = a \operatorname{Ch} t$, pues la función $\operatorname{Ch} t$ sólo toma valores mayores que 1. Entonces es $dx = a \operatorname{Sh} t\, dt$ e

$$I_3 = \int \sqrt{a^2 \operatorname{Ch}^2 t - a^2}\, a \operatorname{Sh} t\, dt = a^2 \int \sqrt{\operatorname{Ch}^2 t - 1}\, \operatorname{Sh} t\, dt = a^2 \int \operatorname{Sh}^2 t\, dt,$$

y esta integral ha sido calculada anteriormente en la página 296:

$$\int \operatorname{Sh}^2 t\, dt = \frac{1}{2} (\operatorname{Sh} t \cdot \operatorname{Ch} t - t) + C.$$

Como es $\operatorname{Sh} t = \sqrt{\operatorname{Ch}^2 t - 1} = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ y $t = \operatorname{Arg} \operatorname{Ch} \frac{x}{a}$, resulta

$$I_3 = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \operatorname{Arg} \operatorname{Ch} \frac{x}{a} \right) + C,$$

que también puede escribirse, en base a las relaciones entre las funciones hiperbólicas inversas y el logaritmo (pág. 93),

$$I_3 = \frac{1}{2} [x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2})] + C.$$

NOTA:

Esta integral se puede calcular también con la sustitución $x = a \sec z$, pues la secante es siempre mayor que 1.

Cualquier caso de trinomio completo de 2° grado se lleva a uno de los 3 precedentes, como lo muestran los siguientes ejemplos:

Sea calcular $I_4 = \int \sqrt{8 - 4x - 4x^2}\, dx$.

Como es $8 - 4x - 4x^2 = 9 - (2x + 1)^2$, haciendo $2x + 1 = z$ y $2\, dx = dz$ se tiene

$$I_4 = \frac{1}{2} \int \sqrt{9 - z^2}\, dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(9 \operatorname{arc\,sen} \frac{z}{3} + z \sqrt{9 - z^2} \right) + C,$$

y volviendo a la variable x resulta

$$I_4 = \frac{1}{4} \left[9 \operatorname{arc\,sen} \frac{2x + 1}{3} + (2x + 1) \sqrt{8 - 4x - 4x^2} \right] + C.$$

Sea calcular $I_5 = \int \sqrt{x^2 - 2x + 2}\, dx$.

Por ser $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$, con $x - 1 = z$ y $dx = dz$, resulta

$$I_5 = \int \sqrt{z^2 + 1}\, dz = \frac{1}{2} (\operatorname{Arg} \operatorname{Sh} z + z \sqrt{z^2 + 1}) + C =$$

$$= \frac{1}{2} [\ln (z + \sqrt{z^2 + 1}) + z \sqrt{z^2 + 1}] + C'.$$

Reemplazando en estas fórmulas z por $x - 1$ se tiene la integral buscada.

Otro ejemplo es $I_6 = \int \sqrt{2x^2 + 20x + 46}\, dx$.

Como es $2x^2 + 20x + 46 = 2[(x+5)^2 - 2]$, haciendo $x + 5 = z$ y $dx = dz$ resulta

$$I_6 = \sqrt{2} \int \sqrt{z^2 - 2}\, dz = \frac{1}{2} \sqrt{2} \left[z\sqrt{z^2 - 2} - 2 \operatorname{Arg\,Ch} \frac{z}{\sqrt{2}} \right] + C =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2}\, [z \sqrt{z^2 - 2} - 2 \ln (z + \sqrt{z^2 - 2})] + C'.$$

Reemplazando z por $x + 5$ se tiene la integral buscada.

Ejercicios:

Verificar las siguientes integrales:

1. $\int \sqrt{1 - 9x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1 - 9x^2} + \frac{1}{6} \operatorname{arc\,sen} 3x + C.$

2. $\int \sqrt{4x^2 - 9}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{4x^2 - 9} - \frac{9}{4} \operatorname{Arg\,Ch} \frac{2}{3} x + C.$

3. $\int \sqrt{25 + 9x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{25 + 9x^2} + \frac{25}{6} \operatorname{Arg\,Sh} \frac{3}{5} x + C.$

4. $\int \sqrt{5 + 2x + x^2}\, dx = \frac{1}{2} (x+1) \sqrt{5 + 2x + x^2} + 2 \operatorname{Arg\,Sh} \frac{1}{2} (x + 1) + C.$

Calcular las siguientes integrales [1]:

1. $\int \sqrt{9 - 4x^2}\, dx.$

2. $\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\, dx.$

3. $\int \sqrt{4 + 7x^2}\, dx.$

4. $\int \sqrt{5 - 4x - x^2}\, dx.$

5. $\int \sqrt{x^2 - 2x - 8}\, dx.$

6. $\int \sqrt{x^2 - 4x}\, dx.$

7. $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx.$

7. INTEGRACION POR PARTES

A partir de la fórmula de diferenciación de un producto de 2 funciones $u(x)$ y $v(x)$,

$$d\,(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du,$$

se obtiene, integrando ambos miembros,

$$\int d\,(u \cdot v) = \int u\, dv + \int v\, du,$$

o sea, incluyendo la constante que aparece en el primer miembro dentro de las constantes de las otras integrales,

---

[1] Los resultados se encuentran en la página 347.

$$u \cdot v = \int u\,dv + \int v\,du,$$

es decir,

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

Esta fórmula permite llevar el cálculo de la integral del primer miembro al cálculo de la integral del segundo miembro. Si esta segunda integral se calcula más fácilmente, el procedimiento es útil; de lo contrario, debe desecharse.

Ejemplos:

1°) $\int x \operatorname{sen} x\,dx$. Esta integral puede calcularse con la fórmula de integración por partes si se homologa a las funciones u y v en la siguiente forma:

$$u = x, \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx,$$

con lo que resulta

$$du = dx, \qquad v = -\cos x.$$

Entonces será

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = x\,(-\cos x) - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

2°) $\int xe^x\,dx$. Hagamos

$$u = x, \qquad dv = e^x\,dx,$$

con lo que resulta

$$du = dx, \qquad v = e^x.$$

La fórmula da entonces

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x\,(x-1) + C.$$

Observación:

También se podía haber atribuido a u y v las siguientes expresiones:

$$u = e^x, \qquad dv = x\,dx,$$

con lo que habría resultado

$$du = e^x\,dx, \qquad v = \frac{1}{2}x^2,$$

y la aplicación de la fórmula daría

$$\int xe^x\,dx = \frac{1}{2}e^x x^2 - \int \frac{1}{2}x^2 e^x\,dx$$

Como esta última integral es más complicada que la integral dada, este camino debe desecharse.

3°) $\int x^2 e^x\,dx$. Hagamos

$$u = x^2, \qquad dv = e^x\,dx,$$

con lo que resulta

$$du = 2x\,dx, \qquad v = e^x.$$

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2e^x \cdot x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx.$$

Esta última integral es precisamente la del ejemplo 2°). Reemplazándola por su valor resulta

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2e^x\,(x-1) + C = e^x\,(x^2 - 2x + 2) + C.$$

4°) $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$. Hagamos

$$u = \operatorname{sen} x, \qquad dv = e^x\,dx,$$

con lo que resulta

$$du = \cos x\,dx, \qquad v = e^x.$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx. \qquad [1]$$

Calculemos ahora, mediante la integración por partes,

$$\int e^x \cos x\,dx.$$

Haciendo

$$u = \cos x, \qquad dv = e^x\,dx,$$

se tiene

$$du = -\operatorname{sen} x\,dx, \qquad v = e^x,$$

y resulta

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Reemplazando en [1] resulta, en definitiva,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx + C.$$

Pasando la integral del segundo miembro al primero y dividiendo luego por 2 se tiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}\,e^x\,(\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN: La fórmula de integración por partes se aplica a veces para reducir el cálculo de una integral en la que figura un índice n, al cálculo de otra del mismo tipo con un índice menor.

Tal es el caso de $I_n = \int x^n e^x\,dx$, donde n es un número natural. Para cada valor del exponente n se tiene la integral I_n correspondiente. En particular, si es $n = 0$, resulta $I_0 = \int e^x\,dx = e^x + C$.

En general, haciendo $u = x^n$ y $dv = e^x\,dx$ resulta

$$du = nx^{n-1}\,dx, \quad v = e^x$$

y, en virtud de la fórmula de integración por partes, se tiene

$$I_n = x^n e^x - n \int e^x x^{n-1}\, dx = x^n e^x - n I_{n-1}.$$

De acuerdo a la ley de recurrencia resulta, reemplazando n por $n - 1$,

$$I_{n-1} = x^{n-1} e^x - (n-1)\, I_{n-2},$$

y así sucesivamente hasta llegar a I_0.

Reuniendo todos los resultados se tiene

$$I_n = e^x \left[x^n - n x^{n-1} + n(n-1)\, x^{n-2} - n(n-1)(n-2)\, x^{n-3} + \right.$$
$$\left. + \ldots + (-1)^n n!\right] + C.$$

EJERCICIOS:

Verificar las siguientes integrales:

1. $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + C.$

2. $\int \text{arc sen}\, x\, dx = x \,\text{arc sen}\, x - \sqrt{1 - x^2} + C.$

3. $\int \text{arc tg}\, x\, dx = x\, \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$

4. $\int \text{arc cos}\, x\, dx = x\, \text{arc cos}\, x - \sqrt{1 - x^2} + C.$

5. $\int x \cdot e^{2x}\, dx = \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + C.$

6. $\int x\, \text{Sh}\, x\, dx = x\, \text{Ch}\, x - \text{Sh}\, x + C.$

7. $\int x\, \text{Ch}\, x\, dx = x\, \text{Sh}\, x - \text{Ch}\, x + C.$

8. $\int \text{Arg Th}\, x\, dx = x\, \text{Arg Th}\, x + \frac{1}{2} \ln(1 - x^2) + C.$

9. $\int x\, \text{arc tg}\, x\, dx = \frac{1}{2}(1 + x^2)\, \text{arc tg}\, x - \frac{1}{2} x + C.$

10. $\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\text{sen}\, x + \cos x) + C.$

11. $\int x \cdot \cos x\, dx = x \cdot \text{sen}\, x + \cos x + C.$

12. $\int x \cdot \ln x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C.$

13. $\int x^m \ln x\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\ln x - \frac{1}{m+1}\right) + C. \quad [m \neq -1]$

14. $\int x \cdot e^{\frac{x}{a}}\, dx = a(x - a)\, e^{\frac{x}{a}} + C.$

15. $\int x \cdot \arccos x \, dx = \frac{1}{2} \arccos x \, (x^2 - 1) - \frac{1}{4} \operatorname{arc\,sen} x - \frac{1}{4} x \sqrt{1 - x^2} + C.$

16. $\int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{4} x^4 \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C.$

17. $\int x \sec^2 x \, dx = x \operatorname{tg} x - \ln (\sec x) + C.$

18. $\int \ln (a^2 + x^2) \, dx = x \ln (x^2 + a^2) - 2x - 2a \operatorname{Arg\,Th} \frac{x}{a} + C.$

19. $\int \operatorname{sen} (\ln x) \, dx = \frac{1}{2} x \, [\operatorname{sen} (\ln x) - \cos (\ln x)] + C.$

20. $\int \cos (\ln x) \, dx = \frac{1}{2} x \, [\operatorname{sen} (\ln x) + \cos (\ln x) + C.$

21. $\int \frac{x + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \, dx = x \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + C.$

(Téngase en cuenta que $\frac{x + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{\frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x} + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x$ e intégrese por partes el primer sumando de la expresión).

22. Calcular la integral

$$I_n = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^n}.$$

Solución: Podemos escribir

$$\frac{1}{(1 + x^2)^n} = \frac{(1 + x^2) - x^2}{(1 + x^2)^n}$$

y la integral resulta

$$I_n = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^{n-1}} - \int \frac{x \cdot x \, dx}{(1 + x^2)^n}.$$

Calculando la última integral por partes se tiene

$$I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \left[x (1 + x^2)^{-n+1} - \int (1 + x^2)^{-n+1} dx \right] =$$

$$= I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \left[\frac{x}{(1 + x^2)^{n-1}} - I_{n-1} \right].$$

Finalmente se llega a la expresión

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1 + x^2)^{n-1}} - \frac{2n - 3}{2n - 2} I_{n-1}.$$

Caso particular: $I_1 = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

Calcular las siguientes integrales [1]:

1. $\int \arccos \frac{1}{x} \, dx.$

2. $\int e^{2x} \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \, dx.$

---

[1] Los resultados se encuentran en las páginas 347-348.

3. $\int (e^{-x} - x)^2 \, dx$.

4. $\int x \operatorname{arc\,cotg} x \, dx$.

5. $\int \ln (x^2 + 1) \, dx$.

6. $\int x^2 e^{-x} \, dx$.

7. $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$.

8. $\int \dfrac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}}{x^2} \, dx$.

9. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x \, dx$.

10. $\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} \, dx$.

11. $\int \sqrt{x + 1} \ln (x + 1) \, dx$.

12. $\int e^{2x} \cos \frac{1}{2} x \, dx$

13. $\int \sec^3 x \, dx$.

14. $\int \operatorname{cosec}^3 2x \, dx$.

(Hágase $u = \sec x$ y $dv = \sec^2 x \, dx$ y compárese con el resultado hallado en el ej. 3 del § 5).

15. $\int \dfrac{\ln x}{(x + 1)^2} \, dx$.

16. $\int x^3 e^{-x} \, dx$.

17. $\int x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx$.

18. $\int \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx \, dx$.

19. $\int e^x \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx$.

20. $\int \operatorname{Ch} x \cdot \operatorname{sen} x \, dx$.

21. $\int \operatorname{Sh} x \cdot \cos x \, dx$.

22. $\int \operatorname{Ch} x \cdot \cos x \, dx$.

23. Demostrar la siguiente fórmula de reducción:

$$I_n = \int x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1} (\ln x)^n}{m + 1} - \frac{n}{m + 1} I_{n-1}.$$

24. Demostrar las siguientes fórmulas de reducción:

$$I_n = \int x^n \operatorname{sen} x \, dx = - x^n \cos x + n I'_{n-1}.$$

$$I'_n = \int x^n \cos x \, dx = x^n \operatorname{sen} x - n I_{n-1}.$$

8. CALCULO DE INTEGRALES APLICANDO COMPLEJOS

El cálculo de las integrales

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx$$

se puede hacer aplicando dos veces la regla de integración por partes. Pero resultará más sencillo efectuar la combinación $I_1 + iI_2$ (i, unidad imaginaria; $i^2 = -1$). Recordando la fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

resulta, si se admite que $\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$, aún en el caso de ser k un número complejo:

$$I_1 + iI_2 = \int e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx)\,dx = \int e^{ax}e^{ibx}\,dx = \int e^{(a+bi)x}\,dx =$$

$$= \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} + C = \frac{e^{ax}e^{ibx}}{a+bi} + C =$$

$$= \frac{a-bi}{a^2+b^2}e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx) + C.$$

Puesto que la igualdad de 2 complejos comporta la de sus partes reales e imaginarias, resulta

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b \operatorname{sen} bx) + C.$$

$$I_2 = \int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx) + C.$$

NOTA:

Estas integrales pueden calcularse aun más fácilmente observando que en virtud de la regla de diferenciación de un producto es

$$d\,(e^{ax}\operatorname{sen} bx) = (ae^{ax}\operatorname{sen} bx + be^{ax}\cos bx)\,dx,$$

$$d\,(e^{ax}\cos bx) = (ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\operatorname{sen} bx)\,dx.$$

Multiplicando la primera igualdad por a y la segunda por $-b$ y sumando resulta

$$a\,d(e^{ax}\operatorname{sen} bx) - b\,d(e^{ax}\cos bx) = (a^2+b^2)\,e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx.$$

Integrando se tiene

$$(a^2+b^2)\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx) + C.$$

Multiplicando, en cambio, la primera igualdad por b y la segunda por a, sumando e integrando resulta

$$(a^2+b^2)\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}(b \operatorname{sen} bx + a\cos bx) + C.$$

Como recapitulación de los casos de integración tratados hasta aquí recomendamos resolver los siguientes ejercicios, que podrán verificarse con los resultados de las páginas 348-350.

1. $\int \sqrt[3]{2+3x}\,dx.$

2. $\int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx.$

3. $\int x\sqrt{ax^2+b}\,dx.$

4. $\int (e^x - e^{-x})^2\,dx.$

5. $\int e^{\operatorname{tg} x}\sec^2 x\,dx.$

6. $\int a^{nx}\,dx.$

7. $\int \sqrt{e^x}\,dx.$

8. $\int 2^{nx}\,dx.$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx.$

10. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{x-1}.$

(Hágase la sustitución $\sqrt{x} - 1 = t$).

11. $\int \frac{x^3+1}{x+2}\,dx.$

12. $\int \frac{x-2}{2x-1}\,dx.$

13. $\int (\cos x - \operatorname{sen} x)^2\,dx.$

14. $\int \frac{\cos n\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen} n\alpha}}\,d\alpha.$

15. $\int \operatorname{tg}^3 x \cdot \sec^2 x\,dx.$

16. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}}\,dx.$

17. $\int \left(\frac{\sec x}{a+b\operatorname{tg} x}\right)^2 dx.$

18. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{a+b\cos x}\,dx.$

19. $\int \frac{x^2}{1-x^3}\,dx.$

20. $\int \operatorname{sen}^3 2x \cdot \cos^2 2x\,dx.$

21. $\int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^2 x}\,dx.$

22. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\cos x}}\,dx.$

23. $\int \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^4 x\,dx.$

24. $\int \frac{\operatorname{cosec} 2\theta \cdot \operatorname{cotg} 2\theta}{1+2\operatorname{cosec} 2\theta}\,d\theta.$

25. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx.$

26. $\int \operatorname{cotg}^4 x\,dx.$

27. $\int \operatorname{cosec}^6 x\,dx.$

28. $\int \frac{dx}{x^2+4}.$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}.$

31. $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^x}.$

32. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

33. $\int \frac{x\,dx}{1+4x^4}.$

34. $\int \frac{dx}{16+(x-1)^2}.$

35. $\int \frac{dt}{\sqrt{9-(t+1)^2}}.$

36. $\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

37. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx.$

38. $\int \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{4-\cos^2 t}}\,dt.$ (Hágase $\cos t = 2z$).

39. $\int \frac{x-1}{\sqrt{8x-x^2}}\,dx.$

40. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{6x-9x^2+3}}\,dx.$

41. $\int \frac{4x-1}{\sqrt{9-5x^2}}\,dx.$

42. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx.$

[Multiplíquese y divídase la expresión subradical por $(1+x)$].

43. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x}}\,dx.$

44. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3+5x^2}}\,dx.$

45. $\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$

46. $\int \frac{x \operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

47. $\int \operatorname{Sh}^4 x\,dx.$

48. $\int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{Sh} x\,dx.$

9. INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

INTRODUCCIÓN: Hemos calculado anteriormente integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \qquad \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}\,dx,$$

mediante sustituciones apropiadas que las conducen a las fórmulas (XIII) y (XIV).

Otro modo de calcular estas integrales, de aplicación sencilla y que nos permitirá *resolver la integral de cualquier expresión racional*, es la descomposición en fracciones simples (ver pág. 54).

Empecemos por algunos ejemplos sencillos:

Sea calcular $I_1 = \int \frac{4x - 7}{x^2 - 3x + 2}\,dx.$

Por ser $\frac{4x - 7}{x^2 - 3x + 2} = \frac{4x - 7}{(x - 1)(x - 2)}$ se podrá escribir en la forma $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$.

Recordemos que para la determinación de A y B hay que identificar los numeradores: $A(x - 2) + B(x - 1) \equiv 4x - 7$. En particular, si $x = 1$, resulta $-A = -3$, y si $x = 2$, $B = 1$. Entonces es

$$I_1 = \int \left[\frac{3}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} \right] dx = 3 \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{dx}{x - 2} = 3 \ln (x - 1) + \ln (x - 2) + C,$$

que también se puede escribir

$$I_1 = \ln [(x - 1)^3 (x - 2)] + C.$$

Veamos otra integral ya calculada anteriormente (pág. 290):

$$I_2 = \int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2}.$$

Como es $\frac{1}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{(a + bx)(a - bx)} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a + bx} + \frac{1}{a - bx} \right]$, resulta

$$I_2 = \frac{1}{2ab} [\ln (a + bx) - \ln (a - bx)] + C = \frac{1}{2ab} \ln \frac{a + bx}{a - bx} + C.$$

Finalmente, si se trata de calcular

$$I_3 = \int \frac{2x^3 - 11x^2 + 23x - 17}{x^2 - 3x + 2}\,dx,$$

como el grado del numerador de la expresión subintegral es superior al del denominador, se comienza por efectuar el cociente indicado. Resulta

$$\frac{2x^3 - 11x^2 + 23x - 17}{x^2 - 3x + 2} = 2x - 5 + \frac{4x - 7}{x^2 - 3x + 2}$$

y, por lo tanto, es

$$I_3 = \int (2x - 5)\,dx + I_1,$$

con I_1 calculado más arriba. Por consiguiente, resulta

$$I_3 = x^2 - 5x + \ln [(x - 1)^3 (x - 2)] + C.$$

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA GENERAL: Sea

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}\,dx.$$

Si el grado del polinomio $P(x)$ es mayor o igual que el grado del polinomio $Q(x)$, es decir, si $n \geqslant m$, se efectúa la división indicada, obteniéndose como cociente un polinomio de integración inmediata y como resto otra función racional que tendrá un numerador de menor grado que el del denominador $Q(x)$. Por lo tanto, es suficiente referirse, en lo sucesivo, al caso $n < m$.

Distinguiremos 4 casos:

I) Todas las raíces $(a, b, \ldots, l)$ del denominador son simples, es decir, el polinomio $Q(x)$ se puede descomponer en la siguiente forma (ver pág. 49):

$$Q(x) = (x-a)\,(x-b)\,\ldots\,(x-l) \qquad [1]$$

(supuesto que sea $b_0 = 1$).

En este caso se podrá escribir

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}\,.$$

La identidad siempre se puede lograr en este caso, pues los denominadores son idénticos de acuerdo a [1], y para que lo sean los numeradores debe verificarse la relación

$$\begin{aligned} P(x) \equiv A\,(x-b)\,(x-c)\,\ldots\,(x-l) &+ \\ + B\,(x-a)\,(x-c)\,\ldots\,(x-l) &+ \ldots + \\ + L\,(x-a)\,(x-b)\,\ldots\,(x-k)&. \end{aligned}$$

Los coeficientes $A, B, \ldots, L$ se determinan haciendo sucesivamente $x = a$, $x = b$, $\ldots$, $x = l$, pues entonces resulta

$$P(a) = A\,(a-b)\,(a-c)\,\ldots\,(a-l),$$

es decir,

$$A = \frac{P(a)}{(a-b)\,(a-c)\,\ldots\,(a-l)};$$

$$P(b) = B\,(b-a)\,(b-c)\,\ldots\,(b-l),$$

es decir,

$$B = \frac{P(b)}{(b-a)\,(b-c)\,\ldots\,(b-l)},$$

y, finalmente,

$$P(l) = L\,(l-a)\,(l-b)\,\ldots\,(l-k),$$

es decir,

$$L = \frac{P(l)}{(l-a)\,(l-b)\,\ldots\,(l-k)}.$$

EJEMPLO:

Sea calcular $I = \int \frac{x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 85x - 63}{x^3 + x^2 - 17x + 15}\,dx.$

Empezaremos por efectuar el cociente indicado:

$$\frac{x^4 - 3x^3 - 21x^2 + 85x - 63}{x^3 + x^2 - 17x + 15} = x - 4 + \frac{2x-3}{x^3 + x^2 - 17x + 15}.$$

Integrando resulta

$$I = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \int \frac{2x-3}{x^3 + x^2 - 17x + 15}\,dx.$$

El denominador de la fracción que figura en la expresión subintegral admite, evidentemente, la raíz $a = 1$. Despojándolo de esta raíz queda el trinomio de segundo grado $x^2 + 2x - 15$, cuyas raíces son $b = -5$ y $c = 3$. La descomposición resulta entonces

$$\frac{2x-3}{x^3 + x^2 - 17x + 15} = \frac{2x-3}{(x-1)\,(x+5)\,(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x-3}.$$

Como deben ser idénticos los numeradores

$$A\,(x+5)\,(x-3) + B\,(x-1)\,(x-3) + C\,(x-1)\,(x+5) \equiv 2x - 3,$$

se obtiene, haciendo sucesivamente $x = 1$, $x = -5$ y $x = 3$,

$$6\,(-2)\,A = 2 - 3, \qquad A = \frac{1}{12};$$

$$(-6)\,(-8)\,B = -10 - 3, \qquad B = -\frac{13}{48};$$

$$2\,(8)\,C = 6 - 3, \qquad C = \frac{3}{16};$$

y resulta

$$I = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{13}{48}\int\frac{dx}{x+5} + \frac{3}{16}\int\frac{dx}{x-3},$$

es decir,

$$I = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{12}\ln(x-1) - \frac{13}{48}\ln(x+5) + \frac{3}{16}\ln(x-3) + C$$

que se puede escribir

$$I = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{48}\ln\frac{(x-1)^4\,(x-3)^9}{(x+5)^{13}} + C.$$

Otro método para hallar los coeficientes en la descomposición de las fracciones racionales. Puesto que en el caso de las raíces simples es

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l},$$

multiplicando ambos miembros por $(x-a)$ y pasando al límite para $x \to a$ se tiene

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}\,(x-a) = A.$$

Como tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando $x \to a$, se puede determinar su "verdadero valor", de acuerdo a la regla de L'Hospital, calculando el cociente de las derivadas:

$$A = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}(x-a) = \lim_{x \to a} \frac{P'(x) \cdot (x-a) + P(x)}{Q'(x)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

En la misma forma resulta $B = \frac{P(b)}{Q'(b)}$, $C = \frac{P(c)}{Q'(c)}$, ..., $L = \frac{P(l)}{Q'(l)}$.

Para el ejemplo antes considerado, con $P(x) = 2x - 3$ y $Q(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$, se tiene $Q'(x) = 3x^2 + 2x - 17$, y haciendo sucesivamente $x = 1$, $x = -5$ y $x = 3$ se obtiene $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{13}{48}$ y $C = \frac{3}{16}$.

II) Las raíces del denominador son múltiples, es decir, es

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \dots (x-l)^{\lambda}$$

(indicando con α, β, ..., λ los órdenes de multiplicidad y pudiendo ser algunos iguales a 1: caso de raices simples).

Supongamos, para fijar las ideas, que el denominador sea

$$Q(x) = (x-a)^3 (x-b)(x-c).$$

Mostraremos que la fracción racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede escribir como suma de 5 sumandos de integración inmediata:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^3} + \frac{A_1}{(x-a)^2} + \frac{A_2}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}.$$

El M.C.M. de los denominadores es $(x-a)^3(x-b)(x-c)$, que es precisamente $Q(x)$. El numerador es entonces

$$\begin{aligned} A_0(x-b)(x-c) &+ A_1(x-a)(x-b)(x-c) + \\ &+ A_2(x-a)^2(x-b)(x-c) + \\ &+ B(x-a)^3(x-c) + \\ &+ C(x-a)^3(x-b), \end{aligned}$$

polinomio que debe identificarse con $P(x)$. Para determinar los coeficientes, lo más cómodo es darle a la variable x los valores a, b, c y otros dos valores cualesquiera. Así resulta, para $x = a$,

$$A_0(a-b)(a-c) = P(a),$$

y de aquí se obtiene A_0. En forma análoga se hallan B y C. Para determinar A_1 y A_2 basta dar a x los valores 0 y 1, por ejemplo (si ninguna de las raíces tiene esos valores), u otros 2 cualesquiera, para obtener 2 ecuaciones con 2 incógnitas (teniendo en cuenta que ya se han obtenido 3 coeficientes).

EJEMPLO:

Sea calcular $I = \int \frac{x^2+x+1}{x^3(x+1)^2}dx.$

Puesto que en el denominador se presenta la raíz doble -1 y la raíz triple 0, escribiremos

$$\frac{x^2+x+1}{x^3(x+1)^2}=\frac{A_0}{x^3}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B_0}{(x+1)^2}+\frac{B_1}{x+1}.$$

Siendo el M.C.M. $x^3(x+1)^2$ resulta de la identificación de los numeradores

$$A_0(x+1)^2+A_1(x+1)^2x+A_2x^2(x+1)^2+B_0x^3+B_1x^3(x+1)\equiv$$
$$\equiv x^2+x+1.$$

Haciendo $x=0$ resulta $A_0=1$, y haciendo $x=-1$ resulta $B_0=-1$.

Faltan determinar 3 coeficientes. Como se trata de una identidad podemos dar a x valores cualesquiera, por ejemplo, para $x=1$, $x=2$ y $x=3$, es:

$$4A_0+4A_1+4A_2+B_0+2B_1=3,$$
$$9A_0+18A_1+36A_2+8B_0+24B_1=7,$$
$$16A_0+48A_1+144A_2+27B_0+108B_1=13.$$

Teniendo en cuenta que es $A_0=1$ y $B_0=-1$ resultan $A_1=-1$, $A_2=2$, $B_1=-2$ y la integral buscada se transforma en la siguiente:

$$I=\int\frac{dx}{x^3}-\int\frac{dx}{x^2}+2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}-2\int\frac{dx}{x+1},$$

es decir,

$$I=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2\ln x+\frac{1}{x+1}-2\ln(x+1)+C,$$

que puede escribirse

$$I=\frac{4x^2+x-1}{2x^2(x+1)}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C.$$

Otro procedimiento para el cálculo de los coeficientes, similar al explicado para el caso de raíces simples, lo encontrará el lector en la página 320, ejercicio Nº 44.

III) En el denominador hay raíces imaginarias simples. Si bien en este caso puede procederse como en el caso I), a fin de evitar la aparición de coeficientes imaginarios es conveniente dejar sin resolver las expresiones cuadráticas que corresponden a raíces imaginarias conjugadas.

La integración de expresiones del tipo $\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ se puede resolver siempre (de acuerdo a lo visto en pág. 291) utilizando arcos tangentes y logaritmos. Veamos en un ejemplo concreto cómo debe procederse:

Sea $I=\int\frac{x\,dx}{1+x^3}$.

El denominador admite la raíz $x=-1$ y aplicando la regla de Ruffini resulta

$$1+x^3=(x+1)(x^2-x+1).$$

El factor cuadrático x^2-x+1 admite 2 raíces imaginarias y para evitarlas intentaremos una descomposición del tipo

$$\frac{x}{1+x^3} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}. \qquad [1]$$

Debiendo existir identidad de numeradores se tiene

$$A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) \equiv x.$$

Con $x = -1$ se obtiene $3A = -1$, o sea, $A = -\frac{1}{3}$.

Con $x = 0$ y $x = 1$ se obtienen, sucesivamente,

$$A + C = 0 \quad y \quad A + 2B + 2C = 1.$$

Así, resulta $B = \frac{1}{3}$ y $C = \frac{1}{3}$.

El cálculo de I se lleva a la forma

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx.$$

La primera es una integral inmediata: $-\frac{1}{3}\ln(x+1) + C_1$.

La segunda se puede escribir

$$\frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] + \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} + C_2.$$

Reuniendo los resultados parciales y haciendo algunas simplificaciones se obtiene

$$I = \int \frac{x}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

También podía haberse procedido, como en el caso I, utilizando raíces complejas.

Por ser

$$1 + x^3 = (x+1)(x^2-x+1) = (x+1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2),$$

con

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i),$$

será

$$\frac{x}{1+x^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-\alpha_1} + \frac{C}{x-\alpha_2}.$$

Los coeficientes A, B y C se determinan identificando los numeradores

$$A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)+B(x+1)(x-\alpha_2)+C(x+1)(x-\alpha_1)\equiv x.$$

Para $x=-1$ resulta $A(-1-\alpha_1)(-1-\alpha_2)=-1$.

Para $x=\alpha_1$ resulta $B(\alpha_1+1)(\alpha_1-\alpha_2)=\alpha_1$.

Para $x=\alpha_2$ resulta $C(\alpha_2+1)(\alpha_2-\alpha_1)=\alpha_2$.

De acuerdo a los valores de α_1 y α_2 se obtiene $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{1-\sqrt{3}i}{6}$ y $C=\frac{1+\sqrt{3}i}{6}$.

Como se ve, los coeficientes B y C son complejos conjugados. Efectuando la suma de los 2 últimos términos se tiene

$$\frac{B}{x-\alpha_1}+\frac{C}{x-\alpha_2}=\frac{\frac{1}{6}(1-\sqrt{3}i)}{x-\alpha_1}+\frac{\frac{1}{6}(1+\sqrt{3}i)}{x-\alpha_2}=$$

$$=\frac{(1-\sqrt{3}i)(x-\alpha_2)+(1+\sqrt{3}i)(x-\alpha_1)}{6\,[x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2]}=$$

$$=\frac{2x+2}{6(x^2-x+1)}=\frac{x+1}{3(x^2-x+1)},$$

tal como había resultado anteriormente.

NOTA:

Es fácil ver que este resultado es general, mostrando que si $Q(x)$ admite una raiz compleja $\alpha+\beta i$, admite también la conjugada $\alpha-\beta i$ y que los coeficientes correspondientes son complejos conjugados: $M+Ni$ y $M-Ni$. Entonces, de $\frac{M+Ni}{x-(\alpha+\beta i)}+\frac{M-Ni}{x-(\alpha-\beta i)}$ se llega, efectuando las operaciones necesarias a $\frac{2Mx-(M\alpha+N\beta)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, con lo cual queda justificada la regla dada en [1].

IV) En el denominador hay raíces imaginarias múltiples. También este caso se puede resolver procediendo como se ha explicado en el caso II). Pero a fin de evitar los imaginarios se dejan sin descomponer los correspondientes factores cuadráticos.

En el caso de raíces dobles se llega a expresiones cuyas integrales son inmediatas si agregamos a las ya vistas la integral

$$I=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\int\frac{(x^2+a^2)+(a^2-x^2)}{(x^2+a^2)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{a^2\,dx}{(x^2+a^2)^2}-\frac{1}{2a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx.$$

Resulta entonces

$$I=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}I+\frac{1}{4a^2}\int x\,d\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right).$$

Agrupando los términos en I e integrando por partes la última expresión resulta

$$\frac{1}{2}I = \frac{1}{2a^3}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{a} + \frac{x}{4a^2\,(x^2 + a^2)} - \frac{1}{4a^3}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{a} + C.$$

O sea, finalmente,

$$I = \frac{1}{2a^3}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\,\frac{x}{a^2\,(x^2 + a^2)} + C. \qquad [1]$$

EJEMPLO:

Sea calcular $I = \int \frac{3x^3 + 4x - 2}{(x^2+1)^2}\,dx.$

Las raíces son $+i$ y $-i$ contadas 2 veces. Pero en lugar de proceder como en el caso II, escribiremos

$$\frac{3x^3 + 4x - 2}{(x^2+1)^2} \equiv \frac{Ax + B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1}.$$

La identidad de los numeradores conduce a

$Ax + B + (Cx + D)(x^2 + 1) = Cx^3 + Dx^2 + (A + C)\,x + B + D \equiv 3x^3 + 4x - 2,$ y debiendo coincidir los coeficientes resulta $C = 3$, $D = 0$, $A = 1$ y $B = -2$.

Entonces es

$$I = \int \frac{(x-2)\,dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{3x\,dx}{x^2+1},$$

que escribiremos así:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = I_1 + I_2 + I_3, \text{ con}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{d\,(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2\,(x^2+1)} + C_1.$$

$$I_2 = -2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = -\,\text{arc tg}\,x - \frac{x}{x^2+1} + C_2 \text{ por [1]}$$

$$I_3 = \frac{3}{2}\int \frac{d\,(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{3}{2}\ln\,(x^2+1) + C_3.$$

Y resumiendo,

$$I = -\frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+1} - \text{arc tg}\,x + \frac{3}{2}\ln\,(x^2+1) + C.$$

En el caso de raíces imaginarias múltiples, con un orden de multiplicidad superior a 2, aparecen expresiones del tipo $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, que ya hemos calculado mediante una fórmula de recurrencia, aplicando la integración por partes (pág. 306).

TEOREMA GENERAL DE INTEGRACIÓN DE LAS FUNCIONES RACIONALES: Hemos mostrado, en base a ejemplos concretos, cómo toda ex-

presión racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, se puede descomponer en fracciones simples de integración inmediata.

En base a estos resultados, cuya generalidad es evidente, podemos afirmar que

Toda expresión racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *es integrable mediante funciones elementales: algebraicas (polinomios y racionales fraccionarias) y trascendentes (logaritmos y arcos tangentes).*

EJERCICIOS:

Verificar las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\frac{x-3}{x+3} + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2}{x^3-x}\,dx = x + \ln\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2} + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{1}{6}\ln\frac{x^3(x-2)}{(x+1)^4} + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x^3+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{x} + \ln\frac{x^3}{(x+1)^2} + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{(x-2)(x-1)^2}\,dx = \frac{4}{x-1} + \ln\frac{(x-2)^6}{(x-1)^5} + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^3} = \frac{1-2x}{2(x-1)^2} + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{1+x}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + \operatorname{arc\,tg} x + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2+x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{x^2-a^2}{x(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2+a^2}{x^2} - \frac{1}{x^2+a^2} + C.$

Calcular las siguientes integrales [1]:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-25}.$

2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} t}{9-\cos^2 t}\,dt.$ (Hágase $\cos t = z$).

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x}.$

4. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{2x-x^2}\,dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x}\,dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{1+x^2}{x^3+3x^2+2x}\,dx.$

---

[1] Los resultados se encuentran en las páginas 350-352.

7. $\int \frac{x\,dx}{x^2+6x+8}$.

8. $\int \frac{x^2-1}{(x-2)(x-3)}\,dx$.

9. $\int \frac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}\,dx$.

10. $\int \frac{dx}{x(1-x^2)}$.

11. $\int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}\,dx$.

12. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

13. $\int \frac{2x-1}{x^2-6x-7}\,dx$.

14. $\int \frac{dx}{x^2+2x-8}$.

15. $\int \frac{dt}{t^2-14t+45}$.

16. $\int \frac{dx}{1+3x+2x^2}$.

17. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$.

18. $\int \frac{3\,dx}{x^3-9x}$.

19. $\int \frac{x^2+3x}{(x-2)(x^2+3x+2)}\,dx$.

20. $\int \frac{x-1}{(x+1)^2\,x}\,dx$.

21. $\int \frac{x^2-4x+8}{x^3+4x^2}\,dx$.

22. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^3}\,dx$.

23. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx$.

24. $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+2}\,dx$.
(Hágase $e^{2x}=z$).

25. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$.
(Hágase la sustitución $\sqrt{x}=t$).

26. $\int \frac{x\,dx}{x^4-x^2-2}$.

27. $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$.

28. $\int \frac{x\,dx}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

29. $\int \frac{x\,dx}{(x-a)^2(x-b)}$.

30. $\int \frac{x\,dx}{(x-a)^2(x-b)^2}$.

31. $\int \frac{x\,dx}{(x-a)^3}$.

32. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

33. $\int \frac{2x}{x^4-16}\,dx$.

34. $\int \frac{8\,dx}{(x^2+4)(x+2)^2}$.

35. $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+2)(x^2+1)}$.

36. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

37. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx$.

38. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)^2}$.

39. $\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x+2)^2}$.

40. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

41. $\int \frac{dx}{x^2(1-x)^2}$.

42. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^2}$.

43. $\int \frac{dx}{x^3(x+1)}$.

44. Si un polinomio $Q(x)$ admite las raíces múltiples $a, b, \ldots, l$, con los órdenes de multiplicidad $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, la descomposición $P(x) : Q(x)$ toma la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} +$$

$$+ \frac{B_0}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \frac{L_0}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} .$$

Si se construyen las funciones $A(x), B(x), \ldots, L(x)$, mediante las relaciones

$$A(x) = (x-a)^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} ; \; B(x) = (x-b)^\beta \frac{P(x)}{Q(x)} ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \; L(x) = (x-l)^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)} ,$$

demuéstrese que los coeficientes se pueden calcular por las fórmulas, muy útiles en las aplicaciones prácticas.

$$A_0 = A(a); \; A_1 = \frac{A'(a)}{1!}; \; A_2 = \frac{A''(a)}{2!}; \; \ldots ; \; A_{\alpha-1} = \frac{A^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)!};$$

$$B_0 = B(b); \; B_1 = \frac{B'(b)}{1!}; \; B_2 = \frac{B''(b)}{2!}; \; \ldots ; \; B_{\beta-1} = \frac{B^{(\beta-1)}(b)}{(\beta-1)!};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

$$L_0 = L(l); \; L_1 = \frac{L'(l)}{1!}; \; L_2 = \frac{L''(l)}{2!}; \; \ldots ; \; L_{\lambda-1} = \frac{L^{(\lambda-1)}(l)}{(\lambda-1)!}$$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$.

46. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^4}\,dx$.

47. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(1+x)(1+x^2)}$

48. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}$

49. $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^3+4x}\,dx$.

50. $\displaystyle\int \frac{(3x+7)\,dx}{2x^2-3x+5}$.

51. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+2x+3}\,dx$.

52. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+1}{x^4+x^2}\,dx$.

53. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x-1}{x^4+x^2}\,dx$.

54. $\displaystyle\int \frac{x^2-a^2}{x^2(x^2+a^2)}\,dx$.

55. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

56. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+8}{(x^2+4)^2}\,dx$.

57. $\displaystyle\int \frac{4x^3-2x^2+x-1}{x^2(4x^2+1)}\,dx$.

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$.

59. $\int \frac{dx}{1+x^4}$. 60. $\int \frac{dx}{1+x^3}$.

61. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ 62. $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

63. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

$\left[\text{Intégrese por partes, con } u = \operatorname{arc\,tg} x \text{ y } dv = \frac{dx}{(1+x^2)^2}\right]$.

64. Verificar la fórmula $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+xi}{1-xi}$ aplicando al cálculo de la integral $\int \frac{dx}{1+x^2}$ el método de integración por descomposición en fracciones simples $[1+x^2 = (x+i)(x-i)]$.

10. INTEGRACION DE FUNCIONES IRRACIONALES ALGEBRAICAS

Hemos mostrado en el § 9 que toda función racional es integrable mediante funciones elementales (polinomios, racionales fraccionarias, logaritmos, circulares inversas).

No existe un teorema análogo para las funciones irracionales, pero sí se pueden estudiar casos integrables de estas funciones.

Ya se han presentado numerosos tipos de expresiones irracionales con argumento lineal y cuadrático que hemos podido integrar. Así, ha resultado:

I) En el caso de argumento lineal:

1º) $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$

2º) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int (2x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = (2x+1)^{\frac{1}{2}} + C.$

3º) $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx = \frac{n}{(m+n)\,a}(ax+b)^{\frac{m+n}{n}} + C.$

Más general aún, una integral irracional con argumento lineal fraccionario, tal como $\int \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\,dx$, donde m y n son números naturales, se puede integrar con la sustitución $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, con lo que resulta

4°) $$\int \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\, dx = \int \frac{t^m \cdot t^{n-1}\, n\,(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}\, dt =$$

$$= n\,(ad-bc) \int \frac{t^{m+n-1}}{(a-ct^n)^2}\, dt,$$

expresión racional en t y por lo tanto, integrable.

Estos son casos particulares de un teorema general que asegura la integrabilidad, toda vez que la cantidad subintegral sea del tipo

$$R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m'}{n'}}, \dots\right],$$

donde R es una función racional de sus argumentos.

Veamos cómo se procede en varios ejemplos.

1°) Sea calcular $I_5 = \displaystyle\int \frac{1-\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx.$

La expresión subintegral es la función racional $R = \dfrac{1-\alpha}{1+\beta}$, con $\alpha = x^{\frac{1}{4}}$ y $\beta = x^{\frac{1}{2}}$. Para racionalizar esta expresión hacemos la sustitución $x = t^4$; con lo cual se logra que desaparezcan los dos radicales, dado que es $x^{\frac{1}{4}} = t$ y $x^{\frac{1}{2}} = t^2$.

Se tiene entonces

$$I_5 = 4 \int \frac{1-t}{1+t^2}\, t^3\, dt = 4 \int \left(-t^2 + t + 1 - \frac{1+t}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= -\frac{4}{3}t^3 + 2t^2 + 4t - 4 \operatorname{arc\,tg} t - \ln(1+t^2)^2 + C,$$

y expresada en función de x resulta

$$I_5 = -\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} - 4 \operatorname{arc\,tg} x^{\frac{1}{4}} - \ln\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^2 + C.$$

En general, la potencia de la nueva variable es el M.C.M. de los denominadores de las potencias a que se encuentra elevada x.

2°) Calcular $I_6 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}.$

En este caso es $R = \dfrac{1}{\alpha - \beta}$, con $\alpha = \sqrt[3]{1+x}$ y $\beta = \sqrt{1+x}$, y siendo $\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{1}{2}$ los exponentes de $(1+x)$, para los cuales el M.C.M. de sus denomi-

nadores es 6, elegiremos la sustitución $1 + x = t^6$, con lo que resulta $\sqrt[3]{1+x} = t^2$, $\sqrt{1+x} = t^3$ y $dx = 6t^5\,dt$, y la integral es entonces

$$I_6 = 6\int \frac{t^5\,dt}{t^2 - t^3} = -6\int \frac{t^3\,dt}{t-1} = -2t^3 - 3t^2 - 6t - 6\ln(t-1) + C =$$

$$= -2(1+x)^{\frac{1}{2}} - 3(1+x)^{\frac{1}{3}} - 6(1+x)^{\frac{1}{6}} - 6\ln(\sqrt[6]{1+x} - 1) + C$$

II) Hemos estudiado ya todas las integrales del tipo

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

con a, b y c constantes cualesquiera (positivas o negativas), habiendo mostrado que siempre se pueden conducir a uno de los casos siguientes:

$$\int \sqrt{z^2 + 1}\,dz, \qquad \int \sqrt{z^2 - 1}\,dz, \qquad \int \sqrt{1 - z^2}\,dz,$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}}, \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}}, \ldots \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Ya hemos visto también (pág. 293 y 299) cómo estas integrales se resuelven muy fácilmente con las siguientes sustituciones:

$z = \operatorname{Sh} t$, $z = \operatorname{Ch} t$, $z = \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{Sh} t$, $z = \operatorname{Ch} t$, $z = \operatorname{sen} t$,

advirtiendo además que las tres últimas ya figuran en la tabla de integrales inmediatas.

Volveremos a calcular ahora algunas de estas expresiones sin emplear funciones hiperbólicas (directas e inversas).

1°) Sea calcular $I_1 = \int \sqrt{z^2 + 1}\,dz$. Haciendo $\sqrt{z^2 + 1} = t + z$ resulta $1 = t^2 + 2tz$ y, por lo tanto, $z = \dfrac{1 - t^2}{2t}$ y $dz = -\dfrac{t^2 + 1}{2t^2}dt$.

La integral queda entonces

$$I_1 = -\int \left(t + \frac{1 - t^2}{2t}\right)\frac{t^2 + 1}{2t^2}\,dt = -\frac{1}{4}\int \frac{(1 + t^2)^2}{t^3}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int (t^{-3} + 2t^{-1} + t)\,dt = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}t^{-2} + 2\ln t + \frac{1}{2}t^2\right) + C =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t^2} - t^2\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{t} + C.$$

Si $t = \sqrt{z^2 + 1} - z$, resulta, racionalizando, $\dfrac{1}{t} = \sqrt{z^2 + 1} + z$ y $\dfrac{1}{t^2} - t^2 = 4z\sqrt{z^2 + 1}$, con lo que se obtiene, finalmente,

$$I_1 = \frac{1}{2} z\sqrt{z^2+1} + \frac{1}{2}\ln(z+\sqrt{z^2+1}) + C.$$

2º) Calcular $I_2 = \int \sqrt{z^2-1}\, dz$. Sustituyendo $\sqrt{z^2-1} = t + z$ resulta $-1 = t^2 + 2tz$ y, por consiguiente, $z = -\frac{1+t^2}{2t}$,

$dz = -\frac{t^2-1}{2t^2}dt$ e

$$I_2 = -\int \left(t - \frac{1+t^2}{2t}\right)\frac{t^2-1}{2t^2}dt = -\frac{1}{4}\int \frac{(t^2-1)^2}{t^3}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int (t^{-3} - 2t^{-1} + t)\, dt = -\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}t^{-2} - 2\ln t + \frac{1}{2}t^2\right] +$$

$$+ C = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t^2} - t^2\right) + \frac{1}{2}\ln t + C =$$

$$= \frac{1}{2} z\sqrt{z^2-1} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{z^2-1} - z) + C.$$

3º) Calcular $I_3 = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+1}}\cdot$ Haciendo la misma sustitución que en los casos anteriores se tiene $1 = t^2 + 2tz$, pero en lugar de despejar z a partir de esta relación y calcular luego dz, es mucho más conveniente diferenciar ambos miembros, con lo que se obtiene $0 = 2t\, dt + 2t\, dz + 2z\, dt$, o sea, $dz = -\frac{t+z}{t}\, dt$. Reemplazando resulta

$$I_3 = -\int \frac{1}{t+z}\,\frac{t+z}{t}\, dt = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C = \ln\frac{1}{t} + C =$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{z^2+1} - z} + C = \ln(z + \sqrt{z^2+1}) + C.$$

Análogamente resulta

4º) $I_4 = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \ln(z + \sqrt{z^2-1}) + C.$

EJEMPLOS:

1º) Para calcular $\int \sqrt{x^2+6x+10}\, dx$ basta escribir el trinomio en la forma $x^2 + 6x + 10 = (x+3)^2 + 1$ y hacer la sustitución $x + 3 = z$. Resulta entonces

$$\int \sqrt{x^2 + 6x + 10}\, dx = \int \sqrt{z^2 + 1}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2} z \sqrt{z^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln (z + \sqrt{z^2 + 1}) + C =$$

$$= \frac{1}{2} (x + 3) \sqrt{x^2 + 6x + 10} + \frac{1}{2} \ln (x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 10}) + C.$$

2°) Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x - 10}}$. El trinomio se escribirá

$$2x^2 + x - 10 = 2\left(x^2 + \frac{1}{2} x - 5\right) = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{81}{16}\right].$$

Con la sustitución $x + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} z$ resulta

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x - 10}} = \frac{9}{4} \int \frac{dz}{\sqrt{2} \cdot \frac{9}{4} \sqrt{z^2 - 1}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \ln (z + \sqrt{z^2 - 1}) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2} \ln \left[\frac{4x + 1}{9} + \sqrt{\frac{8}{81} (2x^2 + x - 10)}\right] + C.$$

3°) Calcular $\int \sqrt{3 + 2x - x^2}\, dx$. Esta integral se resuelve siguiendo el método indicado en página 301, mediante una sustitución trigonométrica. Resulta

$$\int \sqrt{3 + 2x - x^2}\, dx = 2\left[\text{arc sen} \frac{1}{2} (x - 1) + \frac{1}{4} (x - 1) \sqrt{3 + 2x - x^2}\right] + C.$$

III) Otras integrales en las que aparecen raíces cuadradas de trinomios de 2° grado son las del tipo

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

y se calculan llevándolas a las formas estudiadas en II).

Haciendo $x = \frac{1}{z}$ la integral dada resulta

$$\int \frac{-dz}{\sqrt{a + bz + cz^2}}.$$

Verifique el lector los siguientes resultados:

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{1 + x^2}} = \ln \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} + 1} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} = -\text{arc sen} \frac{1}{x} + C.$$

EJERCICIOS:

Verificar las siguientes integrales:

1. $$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = -x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{2+3\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\left[\sqrt{x} - \frac{2}{3}\ln(2+3\sqrt{x})\right] + C.$$

3. $$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{105}(x+1)^{\frac{3}{2}}(15x^2-12x+8) + C.$$

4. $$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\,dx = 2\left[\sqrt{x+1} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x+1}\right] + C.$$

5. $$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+4}} = -\frac{x^2}{8} + \frac{x}{8}\sqrt{x^2+4} + \frac{1}{2}\ln\left[x+\sqrt{x^2+4}\right] + C.$$

6. $$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

7. $$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\,dx = (x+1) - 4\sqrt{x+1} + 4\ln(1+\sqrt{x+1}) + C.$$

(Racionalícese).

8. $$\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+1}\,dx = x - 2\sqrt{x} + \ln(1+\sqrt{x})^2 + \sqrt{x-x^2} +$$
$$+ \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x} - 4\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{2}} + C.$$

(Hágase $\sqrt{x} = z$).

9. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

10. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}} = -\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x} + C.$$

Calcular las siguientes integrales (¹):

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^3}-\sqrt[7]{x}}.$$

(Hágase $x = z^7$).

2. $$\int \frac{dx}{(x+3)^{\frac{1}{2}}-(x+3)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. $$\int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}}\,dx.$$

4. $$\int \frac{y^{\frac{2}{3}}\,dy}{y+1}.$$

(Hágase $z^3 = y$).

(¹) Los resultados se encuentran en las páginas 352-354.

5. $\displaystyle\int \frac{z^5\,dz}{\sqrt{1+z^3}}$.

6. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{3}}}$.

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}-2}\,dx$.

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}+1}$.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x}}$.

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx$.

11. $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\,dx$.

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}}$

(Racionalícese el denominador).

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\,dx$.

15. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

(Hágase la sustitución $x^2+1=t^2$).

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$.

17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$.

18. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{x\,(1+\sqrt[4]{x})}\,dx$.

20. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{4}}}\,dx$.

21. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{1+2x^3}}$.

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

24. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+2x}}$.

25. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx$.

26. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+16)^{\frac{3}{2}}}$.

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$.

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}$.

29. $\displaystyle\int \frac{t+2}{t\sqrt{t+1}}\,dt$.

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(1-\sqrt[4]{x})}$.

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$.

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{25+x^2}}$.

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$.

11. INTEGRACION DE DIFERENCIALES BINOMIAS

Se llama *diferencial binomia* a una expresión de la forma

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

donde a y b son constantes cualesquiera y m, n y p números racionales.

EJEMPLO:

$\dfrac{\sqrt{x}\, dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}}$ es una diferencial binomia, con $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $a = b = 1$ y $p = -\frac{3}{2}$.

Con la sustitución $x = z^\alpha$, donde α es el M.C.M. de los denominadores de los números racionales m y n, se puede hacer que en la correspondiente expresión en la variable z sólo subsista en forma fraccionaria el exponente p.

En efecto, si $x = z^\alpha$, $dx = \alpha z^{\alpha-1}\, dz$ y la diferencial binomia se transforma en

$$z^{m\alpha} (a + bz^{n\alpha})^p \alpha z^{\alpha-1}\, dz = \alpha z^{m\alpha+\alpha-1} (a + bz^{n\alpha})^p\, dz,$$

que tiene exponentes enteros para z.

En el ejemplo anterior hacemos $x = z^6$ y la diferencial se transforma en $6z^8 (1 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\, dz$.

CASOS DE INTEGRACIÓN: De acuerdo a este resultado sólo es necesario considerar las diferenciales binomias del tipo

$$x^m (a + bx^n)^p\, dx,$$

con m y n enteros y p fraccionario igual a $\frac{r}{s}$.

Veremos 3 casos de diferenciales binomias integrables elementalmente.

1°) En el caso particular de que sea p un número entero, esta diferencial binomia es integrable. En efecto, si p es un número natural, aplicando la fórmula del binomio de Newton la expresión se puede calcular con $p + 1$ términos de integración inmediata. Si p es entero negativo, se calcula de acuerdo a los métodos vistos para las funciones racionales.

2°) Si $\dfrac{m+1}{n}$ es un número entero, sustituyendo $a + bx^n = z^s$ re-

sulta $x = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ y la diferencial binomia queda expresada así:

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx = \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} z^r \frac{1}{n}\left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1-n}{n}} \frac{s}{b} z^{s-1} \, dz =$$

$$= \frac{s}{bn} z^{r+s-1}\left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

Como se ve, si $\frac{m+1}{n}$ es un número entero cualquiera, esta expresión es racional y, por lo tanto, integrable.

3°) Si $\frac{m+1}{n} + p =$ *número entero*, con la sustitución $a + bx^n = z^s x^n$, donde $p = \frac{r}{s}$, resulta $x^n (b - z^s) = -a$, o sea, $x^n = a (z^s - b)^{-1}$, y se tiene $x = a^{\frac{1}{n}} (z^s - b)^{-\frac{1}{n}}$. Reemplazando resulta

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx =$$

$$= a^{\frac{m}{n}} (z^s - b)^{-\frac{m}{n}} \left[a + \frac{ba}{z^s - b}\right]^{\frac{r}{s}} (-1) \, a^{\frac{1}{n}} \frac{s}{n} (z^s - b)^{\frac{-1-n}{n}} z^{s-1} \, dz =$$

$$= -a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}} \frac{s}{n} z^{r+s-1} (z^s - b)^{-\frac{m}{n}-\frac{r}{s}-\frac{1+n}{n}} \, dz,$$

y esta expresión es racional si el exponente de $(z^s - b)$, que es $-\left(\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} + 1\right)$, es entero, es decir, si se cumple la condición enunciada.

En el ejemplo antes considerado, como la expresión transformada en z era $6z^8 (1 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$ y en ella se verifica $\frac{m+1}{n} + p = \frac{8+1}{2} - \frac{3}{2} = 3$, número en-

tero, la integral se resuelve haciendo $1 + z^2 = t^2z^2$, resultando $z^2(t^2 - 1) = 1$, es decir, $z = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$ y $dz = -\frac{t\,dt}{(t^2 - 1)^{3/2}}$, y la diferencial binomia se transforma en $-6\frac{dt}{t^2(t^2-1)^4}$ expresión fácilmente integrable. Reemplazando en el resultado obtenido t^2 por $\frac{1+z^2}{z^2}$ y z por $x^{\frac{1}{6}}$ se obtiene la integral de la diferencial binomia en función de x.

Hemos visto tres casos de integración de diferenciales binomias:

$$p = \text{entero}, \quad \frac{m+1}{n} = \text{entero}, \quad \frac{m+1}{n} + p = \text{entero}.$$

Hay un teorema notable de Chebichev (1853) que asegura que estos tres son los *únicos* casos de diferenciales binomias que se pueden integrar con funciones elementales.

En la tabla anexa a este volumen damos las fórmulas generales que permiten reducir sucesivamente las integrales binomias.

Ejemplo:

La integral considerada precedentemente

$$I = \int z^8 (1 + z^2)^{-3/2}\, dz,$$

se puede resolver utilizando sucesivamente 3 veces la primera y una vez la segunda de las fórmulas 78 de la página 63 del apéndice.

En este caso es $m = 8$, $n = 2$, $p = \frac{3}{2}$, $a = 1$, $b = 1$ y resulta:

$$I = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\left[z^7 - \frac{7}{3}z^5 + \frac{35}{8}z^3 + \frac{105}{8}z\right] - \frac{105}{8}\,\text{Arg Sh}\, z + C.$$

Reemplazando z por $x^{1/6}$ se tiene resuelta la integral que aparece en la página 328:

$$\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^{3/2}}.$$

Funciones integrables y no integrables elementalmente:

Se consideran como funciones elementales todas las que hemos estudiado en los capítulos III y IV: polinomios, fracciones racionales, exponenciales, logarítmicas, circulares e hiperbólicas. Con este "arsenal" de funciones no se pueden calcular expresiones de aspecto tan simple como

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \qquad \int \sqrt{1+x^3}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x}} \qquad [1]$$

Pero, a su vez, estas expresiones pueden definir (a menos de una constante) nuevas funciones que, en la medida que sirvan para otros cálculos o estudios y que posean propiedades interesantes, se incorporarán al "arsenal" de las funciones utilizables.

Así, con la primera de las expresiones [1] se define una función denominada exponencial integral, $Ei(x)$ (¹), y las otras se pueden expresar mediante las integrales elípticas que consideraremos más adelante.

12. INTEGRACION DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

En la tabla de integrales inmediatas ya han aparecido integrales de funciones trigonométricas. Otras expresiones más complicadas pueden llevarse al tipo de integrales racionales mediante sustituciones apropiadas.

Consideraremos algunos tipos particulares, indicando en cada caso cómo pueden hacerse las generalizaciones correspondientes.

I) Calcular $I = \int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

Escribiendo

$$\operatorname{sen}^5 x\,dx = -\operatorname{sen}^4 x \cdot d(\cos x) = -(1-\cos^2 x)^2\,d(\cos x)$$

y haciendo la sustitución $\cos x = t$ resulta

$$I = -\int (1 - 2t^2 + t^4)\,dt = -t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

Esta sustitución vale toda vez que se trate de una integral de los tipos

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx, \qquad \int \cos^n x\,dx,$$

con *n impar* (en la segunda integral la sustitución será, evidentemente, $\operatorname{sen} x = t$).

(¹) La función $Ei(x)$ se caracteriza porque su derivada es $\frac{e^x}{x}$ y porque su valor es nulo para $x = -\infty$.

II) También se calculará en forma análoga cualquier integral del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx,$$

siendo m y n números naturales y uno de ellos *impar*.

$$\text{Así, } \int \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x \, dx = \int \operatorname{sen}^6 x \cdot \cos^4 x \, d(\operatorname{sen} x) =$$

$$= \int \operatorname{sen}^6 x \, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \, d(\operatorname{sen} x) =$$

$$= \int t^6 (1 - t^2)^2 \, dt = \int (t^6 - 2t^8 + t^{10}) \, dt =$$

$$= \frac{t^7}{7} - \frac{2}{9} t^9 + \frac{1}{11} t^{11} + C = \frac{1}{7} \operatorname{sen}^7 x - \frac{2}{9} \operatorname{sen}^9 x + \frac{1}{11} \operatorname{sen}^{11} x + C.$$

III) Todas las integrales del tipo $\int \operatorname{tg}^n x \, dx$, con n entero, par o impar, se resuelven con la sustitución $\operatorname{tg} x = z$, pues entonces es $x = \operatorname{arc\,tg} z$, $dx = \dfrac{dz}{1 + z^2}$ y la integral toma la forma $\displaystyle\int \frac{z^n}{1 + z^2} \, dz$, que por ser racional se puede integrar en todos los casos.

EJEMPLO: Calcular $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$. Con $z = \operatorname{tg} x$ resulta

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{z^3}{1 + z^2} \, dz = \int \left(z - \frac{z}{1 + z^2} \right) dz = \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} \ln (1 + z^2) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2} \ln (1 + \operatorname{tg}^2 x) + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln (\cos x) + C.$$

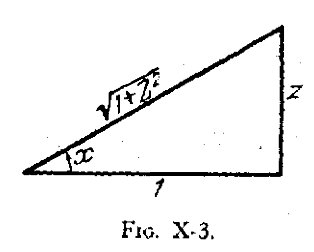


FIG. X-3.

IV) Todas las integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, con $m + n = 2k$ (k entero, positivo o negativo) se integran con la sustitución $\operatorname{tg} x = z$.

Para expresar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ en función de $\operatorname{tg} x$ lo mejor es construir un triángulo rectángulo en el cual al cateto opuesto al ángulo agudo x le corresponde el valor z, al cateto adyacente el valor 1 y, por consiguiente, aplicando el teorema de Pitágoras, a la hipotenusa el valor $\sqrt{1 + z^2}$. De acuerdo a la figura 3 resulta

$$\operatorname{sen} x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \qquad [1]$$

y de $x = \operatorname{arc\,tg} z$ se deduce $dx = \dfrac{dz}{1+z^2}$. [2]

La integral es entonces

$$\int \operatorname{sen}^m x \cdot \cos^n x \, dx = \int \frac{z^m}{(1+z^2)^{k+1}}\, dz,$$

que siempre se puede calcular por tratarse de una expresión racional.

Ejemplo: Calcular $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^5 x}{\cos^3 x} dx.$

Con $\operatorname{tg} x = z$ y las transformaciones [1] y [2] se obtiene

$$I = \int \frac{z^5}{(1+z^2)^2}\, dz = \int \left[z - \frac{2z^3+z}{(1+z^2)^2} \right] dz = \int \left[z - \frac{2z(z^2+1)-z}{(1+z^2)^2} \right] dz =$$

$$= \int \left[z + \frac{z}{(1+z^2)^2} - \frac{2z}{1+z^2} \right] dz = \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{1+z^2} - \ln(1+z^2) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2} \cos^2 x + \ln(\cos^2 x) + C.$$

Teorema general: Si la expresión subintegral es una combinación de sumas, restas, productos (potencias) y cocientes de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, o, en otros términos, si es una función racional $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ de sus argumentos, se puede calcular la integral mediante la sustitución

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = z.$$

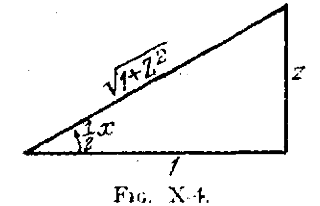


Fig. X-4.

En efecto, de acuerdo a las notaciones de la figura 4 es

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos \frac{1}{2} x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

y, por consiguiente,

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cdot \cos \frac{1}{2} x = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad [1]$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{1}{2} x - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \qquad [2]$$

$$\frac{1}{2}x = \operatorname{arc\,tg} z, \quad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}. \qquad [3]$$

Resulta entonces

$$\int R\,(\operatorname{sen} x,\ \cos x)\,dx = 2\int R\left[\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right]\frac{dz}{1+z^2},$$

que es la integral de una función racional.

EJEMPLOS:

1°) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$. Esta integral ya ha sido calculada empleando un artificio en la página 297. Ahora la resolveremos empleando la sustitución general $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = z$ y las transformaciones [1] y [3]:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{1+z^2}{2z}\,\frac{2\,dz}{1+z^2} = \int \frac{dz}{z} = \ln z + C = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right) + C.$$

2°) $\int \frac{dx}{\cos x}$. Aunque esta integral se puede calcular reemplazando en la anterior x por $x + \frac{1}{2}\pi$, aplicaremos ahora la sustitución general $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = z$ y las transformaciones [2] y [3]:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+z^2}{1-z^2}\,\frac{2\,dz}{1+z^2} = 2\int \frac{dz}{1-z^2} = 2\operatorname{Arg\,Th} z + C = \ln\frac{1+z}{1-z} + C =$$

$$= \ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x} + C = \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi + \operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}x} + C = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) + C.$$

EJERCICIOS:

Verificar las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{5}\cos^5 t - \frac{1}{3}\cos^3 t + C.$

2. $\int \operatorname{tg}^2 4\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\operatorname{tg} 4\theta - \theta + C.$ 3. $\int \frac{\cos 2t}{\operatorname{sen}^4 2t}\,dt = -\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^3 2t + C.$

4. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x}\,dx = \cos x + \sec x + C.$

5. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x} = -\frac{1}{3}\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{cotg} x + C.$

6. $\int \cos^4 x\cdot\operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C.$

7. $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} x + \sec x + 1 + C.$

8. $\int \frac{dx}{4 + 5 \cos x} = \frac{1}{3} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x + 3}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} x - 3} + C.$

9. $\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right) - x + C.$

10. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x} = \ln \left(1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} x \right) + C.$

Calcular las siguientes integrales (1):

1. $\int \operatorname{sen}^5 \frac{x}{6} \cos \frac{x}{6} dx.$

2. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x} dx.$

3. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx.$

4. $\int \operatorname{cotg}^3 x \, dx.$

5. $\int \operatorname{sen}^2 y \cos^2 y \, dy.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

7. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x} dx.$

8. $\int \operatorname{sen}^8 x \, dx.$

9. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} x.$

10. $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x} dx.$

11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^3 x}.$

12. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}.$

13. $\int \frac{dx}{\cos x + \operatorname{tg} x}.$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}.$

15. $\int \frac{dx}{3 - 2 \cos x}.$

16. $\int \frac{dx}{2 \cos x + \operatorname{sen} x - 3}.$

17. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{2 + 3 \cos x} dx.$

18. $\int \frac{dx}{1 + 2 \operatorname{sen} x}.$

19. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{2 - 3 \operatorname{sen} x}.$

20. $\int \frac{dx}{4 \operatorname{sen} x + 3 \cos x + 13}.$

21. $\int \frac{dx}{4 \sec x + 5}.$

---

(1) Los resultados se encuentran en las páginas 354-355.

13. INTEGRACION DE PRODUCTOS DE SENOS Y COSENOS

La integración de expresiones del tipo

$$\operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx,$$
$$\cos mx \cdot \cos nx,$$
$$\operatorname{sen} mx \cdot \cos nx,$$

con m y n números naturales, se hace teniendo en cuenta las fórmulas trigonométricas del apéndice, en virtud de las cuales los productos se transforman en sumas de senos y cosenos.

Así resulta para $m \neq n$

$$\int \operatorname{sen} mx \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x] \, dx =$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n} + C.$$

Verifique el lector las integrales análogas

$$\int \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx \, dx = -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n} + C,$$
$$\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n} + C.$$

En el caso $m = n$ resultan expresiones que ya se han integrado anteriormente.

Para la integral de productos de senos y cosenos hiperbólicos se procede en la misma forma utilizando las tablas del apéndice.

EJERCICIOS:

Verificar las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen} 3x \cdot \cos 4x \, dx = \frac{-1}{14} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos x + C.$

(Téngase en cuenta que $\operatorname{sen} 3x \cdot \cos 4x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 7x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$).

2. $\int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x \, dx = -\frac{1}{6} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + C.$

3. $\int \cos 3x \cdot \cos 2x \, dx = \frac{1}{10} \operatorname{sen} 5x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + C.$

Calcular las siguientes integrales (1):

1. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx.$ 2. $\int \cos(2x+3) \cos(1-2x) \, dx.$

(1) Los resultados se encuentran en la página 355.

3. $\int \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)dx.$ 4. $\int \cos 2x \cos(3x-4)\,dx.$

5. $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x\,dx.$ 6. $\int \operatorname{sen}^2 2x \operatorname{sen}^2 3x\,dx.$

7. $\int \cos^2 3x \cos 5x\,dx.$ 8. $\int \operatorname{Sh} 3x \operatorname{Sh} 2x\,dx.$

9. $\int \operatorname{Sh} 2x \operatorname{Ch} x\,dx.$ 10. $\int \operatorname{Ch} 5x \operatorname{Ch} 2x\,dx.$

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN: Si bien la expresión

$$I_{m,n}=\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx,$$

con m y n enteros (positivos o negativos), es una expresión racional de senos y cosenos y, por consiguiente, es integrable mediante la sustitución $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x=z$, es posible aplicar fórmulas de reducción que conduzcan a integrales con los exponentes 0, 1 y -1, cuya solución sea inmediata.

Para ello habrá que contar con 4 fórmulas: dos que permitan disminuir m o n cuando estos exponentes sean positivos y dos que permitan aumentar estos exponentes cuando sean negativos.

Si en la expresión

$$I_{m,n}=\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx=-\frac{1}{n+1}\int \operatorname{sen}^{m-1} x\,d(\cos^{n+1} x)$$

aplicamos la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$I_{m,n}=-\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x\cdot\cos^{n+1} x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int \operatorname{sen}^{m-2} x\cdot\cos^{n+2} x\,dx. \quad [1]$$

Puesto que es

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^{m-2} x\cdot\cos^{n+2} x &= \operatorname{sen}^{m-2} x\cdot\cos^n x\cdot\cos^2 x=\\ &= \operatorname{sen}^{m-2} x\cdot\cos^n x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)=\\ &= \operatorname{sen}^{m-2} x\cdot\cos^n x-\operatorname{sen}^m x\cdot\cos^n x,\end{aligned}$$

la integral del 2º miembro de [1] se descompone en 2, de las cuales la segunda es precisamente $I_{m,n}$. Pasando esa expresión al primer miembro resulta

$$I_{m,n}\left(1+\frac{m-1}{n+1}\right)=-\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x\cdot\cos^{n+1} x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}I_{m-2,n},$$

es decir, si $m+n\neq 0$,

$$I_{m,n}=-\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x\cdot\cos^{n+1} x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}. \quad [I]$$

14. DETERMINACION DE LA CONSTANTE DE INTEGRACION

Al calcular la integral indefinida de una función dada aparece una constante de integración que se puede calcular cuando se impone alguna condición suplementaria.

Así, si se trata de determinar entre todas las curvas con subtangente constantemente igual a 1 la que pasa por el punto $P(0, 1)$, procedemos en la siguiente forma:

1º) Determinación de *todas* las curvas de subtangente igual a 1.

Por ser $S_t = \dfrac{y}{y'}$ debe ser $\dfrac{y'}{y} = 1$, o sea, $\dfrac{dy}{y} = dx$.

Integrando los dos miembros se tiene $\ln y = x + C$, es decir,

$$y = e^{C+x}. \qquad [1]$$

2º) De las infinitas soluciones así logradas hay que determinar aquella que pase por el punto $P(0, 1)$. Debiendo ser, de acuerdo a [1], $1 = e^C$, resulta $C = 0$.

Luego, la *única* curva de subtangente constantemente igual a 1 que pasa por el punto $P(0, 1)$ es la exponencial $y = e^x$.

EJERCICIOS:

1. Determinar la curva cuya pendiente en el punto (x, y) es $3x^2$ si debe pasar por el punto $P(1, -1)$.

Solución: Se trata de resolver la *ecuación diferencial* $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ con las *condiciones iniciales* $y = -1$ cuando $x = 1$.

Escribimos $dy = 3x^2\,dx$ e, integrando miembro a miembro, resulta

$$y = x^3 + C. \qquad [2]$$

Para calcular C aplicamos las condiciones iniciales

$$-1 = 1^3 + C; \quad C = -2.$$

Sustituyendo el valor de C en la ecuación general [2] obtenemos la curva particular que pasa por el punto dado

$$y = x^3 - 2.$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de condiciones iniciales dadas:

2. $\dfrac{dy}{dx} = 4x$, $P(2, 3)$. R: $y = 2x^2 - 5$.

3. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - x^2$, $P(1, 2)$. R: $3y = 3x - x^3 + 4$.

4. $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 2x$, $P(0, 2)$. R: $y = 2x^3 - x^2 + 2$.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $P(4, 4)$. R: $y = 4\sqrt{x} - 4$.

6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, $P(3, 1)$. R: $3xy = 3 + 2x$.

7. $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1 + x^2}$, $P(0, -3)$. R: $(3y + 10)^2 = (1 + x^2)^3$.

8. $\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}$, $P(1, 4)$. R: $6y^{\frac{1}{2}} = x^3 + 11$.

9. $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$, $P(1, 1)$. R: $y(2 - x^2) = 1$.

Significación física de la constante de integración: Hemos visto (pág. 193) que la *velocidad* de un punto que se mueve sobre una recta según una ley $s = f(t)$ está dada, en cada instante, por la derivada $f'(t)$, mientras que la *aceleración* está dada por $f''(t)$.

Si, inversamente, el dato conocido es la velocidad o la aceleración, al establecer la ecuación del movimiento aparecerán 1 ó 2 constantes de integración, que habrá que determinar de acuerdo a las condiciones iniciales del problema.

Así, por ejemplo, si la aceleración a de un movimiento rectilíneo es constante, es decir, si

$$f''(t) = a, \quad \text{siendo } a \text{ constante,}$$

integrando resulta la velocidad v:

$$v = f'(t) = at + d,$$

siendo d la constante de integración. El significado físico de d es inmediato, pues para $t = 0$ resulta la velocidad inicial v_0: $v_0 = d$, y se podrá escribir

$$v = at + v_0 = f'(t).$$

Integrando esta expresión se tiene la ley del movimiento

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + d',$$

siendo d' una nueva constante, que se determina con la condición de que en el instante inicial ($t = 0$) el espacio es igual a s_0: $s_0 = d'$.

La ley del movimiento es entonces

$$s = f(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0.$$

Ejercicios:

Determinar la posición s en función de t dada la velocidad $v = \frac{ds}{dt}$. Calcular la constante de integración de manera que sea $s = s_0$ cuando $t = 0$.

1. $v = 3t^2$. R: $s = t^3 + s_0$.

2. $v = (t + 1)^2$. R: $s = \frac{1}{3}(t + 1)^3 - \frac{1}{3} + s_0$.

3. $v = (t + 1)^{-2}$. R: $s = -(t + 1)^{-1} + 1 + s_0$.

4. $v = (t^2 + 1)^2$. R: $s = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t + s_0$.

5. $v = \sqrt{t}$. R: $s = \frac{2}{3}t \cdot t^{\frac{1}{2}} + s_0$.

Determinar la velocidad v y la posición s como funciones de t dada la aceleración $a = \frac{dv}{dt}$. Calcular la constante de integración teniendo en cuenta que para $t = 0$ es $s = s_0$ y $v = v_0$.

6. $a = \sqrt[3]{2t + 1}$. R: $v = \frac{3}{8}(2t + 1)^{\frac{4}{3}} + v_0 - \frac{3}{8}$;

$$s = \frac{9}{112}(2t + 1)^{\frac{7}{3}} + v_0 - \frac{3}{8} \quad t + s_0 - \frac{9}{112}.$$

7. $a = (2t + 1)^{-3}$. R: $v = -\frac{1}{4}(2t + 1)^{-2} + v_0 + \frac{1}{4}$;

$$s = \frac{1}{8}(2t + 1)^{-1} + \left(v_0 + \frac{1}{4}\right)t + s_0 - \frac{1}{8}.$$

8. $a = t$. R: $v = \frac{1}{2}t^2 + v_0$; $s = \frac{1}{6}t^3 + v_0 t + s_0$.

9. $a = -32$. R: $v = -32t + v_0$; $s = -16t^2 + v_0 t + s_0$.

10. $a = 12t^2$. R: $v = 4t^3 + v_0$; $s = t^4 + v_0 t + s_0$.

SOLUCIONES DE LAS INTEGRALES INDEFINIDAS

Respuestas del § 2 (págs. 278-279):

1. $\frac{1}{9}(2 + 3x)^3 + C$.

2. $\frac{1}{4}x^2(2 + x^2) + C$.

3. $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{8}{3}} + \frac{32}{17}x^{\frac{17}{6}} - \frac{64}{81}x^3 + C$.

4. $\frac{1}{7}z^7 - 2z - \frac{1}{5}z^{-5} + C$.

5. $\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C.$

6. $2x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{3}x\right) + C.$

7. $\ln z + \frac{2}{3}\frac{1}{z^3} + C.$

8. $\frac{5}{8}x\sqrt[5]{ax^3} + C.$

9. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x\sqrt{ax} + ax + C.$

10. $\frac{2}{3}(\sqrt{x} + \sqrt{a})^3 + C.$

11. $-\frac{1}{4}\frac{1}{(1 + 2x^2)^3} + C.$

12. $\sqrt{x^2 - 2x} + C.$

13. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{1}{2m-1}x^{2m-1} + C.$

14. $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{1}{m}x^m + C.$

Respuestas del § 3 (págs. 287-289):

1. $\frac{1}{6}(3 + 4x)^{\frac{3}{2}} + C.$

2. $-\frac{1}{2}\sqrt{3 - 4x} + C.$

3. $\frac{1}{2}\frac{1}{5 - 2x} + C.$

4. $-\frac{1}{40}(1 - 2x^2)^{10} + C.$

5. $-\sqrt{6x - x^2} + C.$

6. $\frac{1}{2b^2}\left(\frac{a}{2(a + bx^2)^2} - \frac{1}{a + bx^2}\right) + C$

7. $a\,e^{ax} + C.$

8. $x - e^{-x} + C.$

9. $-\frac{1}{a^{nx} \cdot \ln a} + C.$

10. $\frac{e^{2nx}}{2n} + C.$

11. $-\frac{2}{n}\sqrt{1 - e^{nx}} + C.$

12. $\ln(x^5 + x) + C.$

13. $-\frac{1}{2}\ln(6x - x^2) + C.$

14. $-\frac{1}{4}\ln(7 - 2x^2) + C.$

15. $\frac{1}{6}\ln(3 + 2x^3) + C.$

16. $7\ln(x + 3) - 2x + C.$

17. $-2\ln(1 - x) - x + C.$

18. $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x - 1)^2 + C.$

19. $x^2 + \frac{7}{2}\ln(x^2 - 3) + C.$

20. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C.$

21. $-\ln(1 - e^x) + C.$

22. $\ln(1 + e^x) + C.$

23. $-\ln(2 - \operatorname{tg} x) + C.$

24. $\frac{1}{3}(a + \ln x)^3 + C.$

25. $-\frac{1}{3}\cos 3x + \cos x + C.$

26. $\frac{2}{5}\operatorname{tg}\frac{5}{2}x + C.$

27. $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}(3x+2) + C.$

28. $3\operatorname{tg}\frac{1}{3}x + C.$

29. $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x - x + C.$

30. $2(\operatorname{tg} x - \sec x) - x + C.$

31. $\operatorname{tg} x + 2\ln\cos x + C.$

32. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C.$

33. $\ln(\operatorname{sen} x) + C.$

34. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}(x^4) + C.$

35. $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg} 2x + C.$

36. $-\frac{1}{2}(3 - 4\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2}} + C.$

37. $-\frac{1}{n}\ln(\cos nx) + C.$

38. $2\sqrt{1-\cos x} + C.$

39. $\ln(x - \cos x) + C.$

40. $2\sqrt{1-\operatorname{cotg} z} + C.$

41. $-\frac{1}{n}\ln(2 + \cos nx) + C.$

42. $-\operatorname{cotg} x - 2\ln(\operatorname{sen} x) + C.$

43. $\frac{1}{2}\sec 2x + C.$

44. $-\ln(\cos e^x) + C.$

45. $-\frac{1}{3}\ln(\cos 3\theta) + C.$

46. $\ln(1 + \operatorname{tg} x) + C.$

47. $2(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x) - x + C.$

48. $2(\operatorname{tg} x + e^x)^{\frac{1}{2}} + C.$

49. $\frac{1}{an}\ln(a\sec nx - b) + C.$

50. $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^4 2x + C.$

51. $\frac{1}{2}\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} 2u} + C.$

52. $\operatorname{tg} x - \sec x + C.$

53. $\operatorname{sen} x\left(1 - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 x\right) + C.$

54. $2\cos\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{3}\cos^2\frac{1}{2}x - 1\right) + C.$

55. $2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x + 1\right) + C.$

56. $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x - \ln(\operatorname{sen} x) + C.$

57. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln(\cos x) + C.$

58. $\frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C.$

59. $-\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x + C.$

60. $-\frac{1}{7}\operatorname{cotg}^7 x - \frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x + C.$

61. $\frac{1}{a}\operatorname{Sh}(ax + b) + C.$

62. $-\operatorname{Th}(1 - x) + C.$

63. $-\frac{1}{2}\operatorname{Cth}(2x+1)+C.$

64. $-\frac{1}{2}\operatorname{Sech} 2x+C.$

65. $-\frac{1}{n}\operatorname{Cosech} nx+C.$

66. $\frac{1}{2n}\operatorname{sen}^2 na+C_1=-\frac{1}{2n}\cos^2 na+C_2=-\frac{1}{4n}\cos 2na+C_3.$

67. $-\frac{1}{3n}\cos^3 na+C.$

68. $\frac{1}{6}\operatorname{Ch}^3 2x+C.$

69. $\ln(1+\operatorname{Sh} x)+C.$

70. $\frac{1}{3}e^{\operatorname{Th} 3x}+C.$

Respuestas del § 4 (págs. 292-293):

1. $\frac{1}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}x+C.$

2. $\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2}x+C.$

3. $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{3}{5}}x+C.$

4. $\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}x+C.$

5. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{3}{2}}x+C.$

6. $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}x^3+C.$

7. $\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+b}{a}+C.$

8. $\operatorname{arc\,tg} e^x+C.$

9. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x-1}{\sqrt{5}}+C.$

10. $\frac{1}{3}\operatorname{Arg\,Th}\frac{x-4}{3}+C.$

11. $2\operatorname{Arg\,Th}(2x-3)+C.$

12. $\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}(x+1)+C.$

13. $-\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{Arg\,Th}\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$

14. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(2x-3)+C.$

15. $-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}(x-1)+C.$

16. $-\operatorname{Arg\,Th}(x+2)+C.$

17. $-\operatorname{Arg\,Th}(x+3)+C.$

18. $2\ln(x^2+2x+5)+3\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}(x+1)+C.$

19. $\ln(4x^2-4x-3)+\operatorname{Arg\,Th}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C.$

20. $-\operatorname{Arg\,Th}(x+1)+C.$

21. $\ln(x^2+2x+2)+\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C.$

22. $-\frac{1}{2}\ln(x^2-4x)+2\operatorname{Arg\,Th}\left(\frac{1}{2}x-1\right)+C.$

23. $\frac{1}{2}\ln(2x^2 + 2x + 1) + 4 \operatorname{arc\,tg} 2\left(x + \frac{1}{2}\right) + C.$

24. $x + \ln(x^2 - x - 1) - \frac{6}{\sqrt{5}} \operatorname{Arg\,Th} \frac{2x - 1}{\sqrt{5}} + C.$

Respuestas del § 5 (pág. 295):

1. $\operatorname{arc\,sen}(x - 2) + C.$

2. $\operatorname{arc\,sen}(x - 1) + C.$

3. $\operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2}(x - 1) + C.$

4. $-\sqrt{2x - x^2} + 2 \operatorname{arc\,sen}(x - 1) + C.$

5. $\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{3}{2}}\, x + C.$

6. $\operatorname{arc\,sen}(2x - 1) + C.$

7. $\operatorname{arc\,sen} \frac{1}{4}(x + 3) + C.$

8. $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2}{5}x - 1\right) + C.$

9. $\operatorname{Arg\,Ch} \frac{1}{3}x + C = \ln(x + \sqrt{x^2 - 9}) + C'.$

10. $\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arg\,Sh}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, x\right) + C = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln(\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 + 2}) + C'.$

11. $\operatorname{Arg\,Ch} \frac{x - 1}{3} + C = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 8}) + C'.$

12. $\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arg\,Sh} \frac{3x + 1}{\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln\left(\frac{3x + 1}{\sqrt{3}} + \sqrt{1 + 2x + 3x^2}\right) + C'.$

13. $\operatorname{arc\,sen}(x + 2) + C.$

14. $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Arg\,Sh} \sqrt{\frac{2}{3}}(x - 1) + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln[\sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{2x^2 - 4x + 5}] + C'.$

15. $\operatorname{Arg\,Sh} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C = \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + C'.$

16. $-\sqrt{5 + 4x - x^2} + 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x - 2}{3} + C.$

17. $-4\sqrt{x^2 - 4} - \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{2}x + C.$

18. $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \operatorname{Arg\,Ch}(x - 2) + C.$

19. $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2 - 6x + 4} - \frac{5}{4}\sqrt{2} \operatorname{Arg\,Ch}(2x - 3) + C.$

20. $\sqrt{x^2+4x+5} - 2 \operatorname{Arg Sh}(x+2) + C.$

21. $\sqrt{x^2+2x} + 2 \operatorname{Arg Ch}(x+1) + C.$

22. $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+2} - \operatorname{Arg Sh}(2x+1) + C.$

23. $-\frac{1}{4}\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arg Sh} 2x + C.$

24. $2\sqrt{x^2-1} + 3 \operatorname{Arg Ch} x + C.$

25. $\frac{1}{2}\operatorname{Arg Ch}\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}} + C.$

Respuestas del § 6 (pág. 302):

1. $\frac{1}{2}x\sqrt{9-4x^2} + \frac{9}{4}\operatorname{arc sen}\frac{2}{3}x + C.$

2. $\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-b^2x^2} + \frac{a^2}{2b^2}\operatorname{arc sen}\frac{b}{a}x + C.$

3. $\frac{1}{2}x\sqrt{4+7x^2} + \frac{4}{14}\sqrt{7}\operatorname{Arg Sh}\frac{\sqrt{7}}{2}x + C.$

4. $\frac{1}{2}(x+2)\sqrt{5-4x-x^2} + \frac{9}{2}\operatorname{arc sen}\frac{x+2}{3} + C.$

5. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-8} - \frac{9}{2}\operatorname{Arg Ch}\frac{x-1}{3} + C.$

6. $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-4x} - 2\operatorname{Arg Ch}\frac{1}{2}(x-2) + C.$

7. $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2} + 2\operatorname{arc sen}\frac{1}{2}(x+1) + C.$

Respuestas del § 7 (págs. 306-307):

1. $x \operatorname{arc cos}\frac{1}{x} - \operatorname{Arg Ch} x + C.$

2. $\frac{2}{17}e^{2x}\left[4\operatorname{sen}\frac{1}{2}x - \cos\frac{1}{2}x\right] + C.$

3. $-\frac{1}{2}e^{-2x} + 2e^{-x}(x+1) + \frac{1}{3}x^3 + C.$

4. $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arc cotg} x + \frac{1}{2}x + C.$

5. $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arc tg} x + C.$

6. $-e^{-x}(x^2+2x+2) + C.$

7. $\frac{1}{4}(1-2x^2)\cos 2x+\frac{1}{2}x\,\text{sen}\,2x+C.$

8. $-\left(1+\frac{1}{x}\right)\text{arc tg}\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+C.$

9. $-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{9}x\,\text{sen}\,3x+\frac{2}{27}\cos 3x+C.$

10. $(1+x)\,\text{arc tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$

11. $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\left[\ln(x+1)-\frac{2}{3}\right]+C.$

12. $\frac{2}{17}e^{2x}\left[\text{sen}\,\frac{1}{2}x+4\cos\frac{1}{2}x\right]+C.$

13. $\frac{1}{2}\ln(\sec x+\text{tg}\,x)+\frac{1}{2}\sec x\cdot\text{tg}\,x+C.$

14. $-\frac{1}{4}\ln(\text{cosec}\,2x+\text{cotg}\,2x)-\frac{1}{4}\text{cosec}\,2x\cdot\text{cotg}\,2x+C.$

15. $\frac{x}{x+1}\ln x-\ln(x+1)+C.$

16. $-e^{-x}(x^5+5x^4+20x^3+60x^2+120x+120)+C.$

17. $-\frac{1}{4}x\cdot\cos 2x+\frac{1}{8}\text{sen}\,2x+C.$

18. $\frac{n\,\text{sen}\,mx\cdot\cos nx-m\cos mx\cdot\text{sen}\,nx}{m^2-n^2}+C.$

19. $\frac{1}{10}e^x(\text{sen}\,2x-2\cos 2x)+C.$

20. $\frac{1}{2}(\text{Sh}\,x\cdot\text{sen}\,x-\text{Ch}\,x\cdot\cos x)+C.$

21. $\frac{1}{2}(\text{Ch}\,x\cdot\cos x+\text{Sh}\,x\cdot\text{sen}\,x)+C.$

22. $\frac{1}{2}(\text{Sh}\,x\cdot\cos x+\text{Ch}\,x\cdot\text{sen}\,x)+C.$

23. $\frac{1}{32}x^4[8(\ln x)^2-4\ln x+1]+C.$

Respuestas del § 8 (págs. 306-309):

1. $\frac{1}{4}(2+3x)^{\frac{4}{3}}+C.$ 2. $\frac{1}{3}(a^3+x^3)^{\frac{3}{2}}+C.$

3. $\frac{1}{3a}(ax^2+b)^{\frac{3}{2}}+C.$

4. $\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})-2x+C.$

5. $e^{\operatorname{tg} x}+C.$

6. $\frac{a^{nx}}{n\cdot\ln a}+C.$

7. $2e^{\sqrt{x}}+C.$

8. $\frac{2^x e^x}{1+\ln 2}+C.$

9. $(\sqrt{x}-1)^2+4(\sqrt{x}-1)+2\ln(\sqrt{x}-1)+C.$

10. $2x+\ln(x-1)^3+C.$

11. $\frac{1}{2}x^2-2x+\ln(x+2)^5+C.$

12. $\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\ln(2x-1)+C.$

13. $x+\frac{1}{2}\cos 2x+C.$

14. $\frac{2}{n}\sqrt{\operatorname{sen} nx}+C.$

15. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C.$

16. $2\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+C.$

17. $-\frac{1}{b(a+b\operatorname{tg} x)}+C.$

18. $-\frac{1}{b}\ln(a+b\cos x)+C.$

19. $\frac{1}{3}\ln\frac{1}{1-x^3}+C.$

20. $\frac{1}{10}\cos^5 2x-\frac{1}{6}\cos^3 2x+C.$

21. $\sec x+2\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$

22. $2\sqrt{\sec x}+C.$

23. $\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$

24. $-\frac{1}{4}\ln(1+2\operatorname{cosec} 2\theta)+C.$

25. $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x+C.$

26. $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x+\operatorname{cotg} x+x+C.$

27. $-\left(\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x+\frac{2}{3}\operatorname{cotg}^3 x+\operatorname{cotg} x\right)+C.$

28. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}x+C.$

29. $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}x+C.$

30. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}x+C.$

31. $\operatorname{arc\,tg} e^x+C.$

32. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x^2+C.$

33. $\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} 2x^2+C.$

34. $\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}(x-1)+C.$

35. $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3}(t+1)+C.$

36. $\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,sen} x)^2+C.$

37. $\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2+C.$

38. $-\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{2}\cos t\right)+C.$

39. $-\sqrt{8x-x^2}+3\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{4}x-1\right)+C.$

40. $-\frac{2}{9}\sqrt{6x-9x^2+3}-\frac{7}{9}\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}(3x-1)+C.$

41. $-\frac{4}{5}\sqrt{9-5x^2}-\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}x\right)+C.$

42. $\operatorname{arc\,sen} x-\sqrt{1-x^2}+C.$

43. $\sqrt{x^2+x}+\frac{3}{2}\operatorname{Arg\,Ch}(2x+1)+C=$

$=\sqrt{x^2+x}+\frac{3}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right)+C'.$

44. $\frac{2}{5}\sqrt{3+5x^2}+\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{Arg\,Sh}\sqrt{\frac{5}{3}}x+C=$

$=\frac{2}{5}\sqrt{3+5x^2}+\frac{\sqrt{5}}{5}\ln(\sqrt{5}x+\sqrt{3+5x^2})+C'.$

45. $\frac{1}{3}x^3\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+C$

46. $x-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sen} x+C.$

47. $\operatorname{Sh}^3 x\operatorname{Ch} x-\frac{3}{32}\operatorname{Sh} 4x+\frac{3}{8}x+C.$

48. $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x\operatorname{Ch} x-\cos x\operatorname{Sh} x)+C.$

Respuestas del § 9 (págs. 318-321):

1. $\frac{1}{20}\ln\frac{2x-5}{2x+5}+C.$

2. $-\frac{1}{6}\ln\frac{3+\cos t}{3-\cos t}+C.$

3. $\frac{1}{4}\ln\frac{x-4}{x}+C.$

4. $\ln\frac{x}{(2-x)^4}+C.$

5. $\frac{1}{2}x^2+\ln\frac{x^2-1}{x}+C.$

6. $\frac{1}{2}\ln\frac{x(x+2)^5}{(x+1)^4}+C.$

7. $\ln\frac{(x+4)^2}{x+2}+C.$

8. $x-\ln\frac{(x-2)^3}{(x-3)^8}+C.$

9. $x+\ln\frac{x-2}{x-1}+C.$

10. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1-x^2}+C.$

11. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^{10}}{x^9(x+2)}+C.$

12. $\frac{1}{2}\ln\frac{(x-3)^9(x-1)}{(x-2)^8}+C.$

13. $\frac{1}{8}\ln(x+1)^3(x-7)^{15}+C.$

14. $\frac{1}{6}\ln\frac{x-2}{x+4}+C.$

15. $\frac{1}{4}\ln\frac{t-9}{t-5}+C.$

16. $\ln\frac{2x+1}{x+1}+C.$

17. $x+\ln\frac{x-1}{x+1}+C.$

18. $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-9}{x^2}+C.$

19. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-2)^5(x+1)^4}{(x+2)^3}+C.$

20. $-\frac{2}{x+1}+\ln\frac{x+1}{x}+C.$

21. $-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x+4)^5}{x^3}+C.$

22. $\frac{1+2x}{(1+x)^2}+\ln(x+1)+C.$

23. $2\ln\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)^2}+C.$

24. $\frac{1}{4}\ln(e^{2x}+2)+\frac{1}{2}x+C.$

25. $\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+C.$

26. $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-2}{x^2+1}+C.$

27. $-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-1}+C.$

28. $\frac{a(b-c)\ln(x-a)+b(c-a)\ln(x-b)+c(a-b)\ln(x-c)}{(b-a)(c-b)(a-c)}+C.$

29. $\frac{a}{b-a}\frac{1}{x-a}+\frac{b}{(b-a)^2}\ln\frac{x-b}{x-a}+C.$

30. $-\frac{1}{(a-b)^2}\left[\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}\right]-\frac{a+b}{(a-b)^3}\ln\frac{x-a}{x-b}+C.$

31. $\frac{a-2x}{2(x-a)^2}+C.$

32. $\frac{1}{2}\frac{1}{a^2-b^2}\ln\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}+C.$

33. $\frac{1}{8}\ln\frac{x^2-4}{x^2+4}+C.$

34. $-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2+4}+C.$

35. $\frac{1}{2}\ln\frac{(x^2+2)^2}{x^2+1}+C.$

36. $\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+C.$

37. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+C.$

38. $-\frac{2}{x+2}+\ln\frac{x+2}{x+1}+C.$

39. $\frac{4}{x+2}+\ln(x+1)+C.$

40. $\frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2-1}+C.$

41. $2\ln\frac{x}{1-x}+\frac{2x-1}{x(1-x)}+C.$

42. $-\frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2-1}+C.$

43. $-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+\ln\frac{x}{x+1}+C.$

45. $-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\operatorname{arc\,tg} x+C.$

46. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C.$

47. $\frac{1}{4}\ln[(1+x^2)(1+x)^2] - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$

48. $\frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$ 49. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+4}{x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}x + C.$

50. $\frac{3}{4}\ln(2x^2 - 3x + 5) + \frac{37}{2\sqrt{31}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-3}{\sqrt{31}} + C.$

51. $\ln(x^2 + 2x + 3) - \frac{3}{2}\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$

52. $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\operatorname{arc\,tg} x + C.$

53. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^4}{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x + C.$ 54. $-\frac{1}{x} + \frac{2}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$

55. $-\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C$

56. $-\frac{1}{2}\frac{1}{4+x^2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}x + C$ 57. $\frac{1}{x} - \ln x + \operatorname{arc\,tg} 2x + C$

58. $-\frac{2+3x^2}{2x(1+x^2)} - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$

59. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1-\sqrt{2}x+x^2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2} + C.$

60. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

61. $\frac{1}{a^2-b^2}\left[a\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - b\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}\right] + C.$

62. $\frac{1}{2(a^2-b^2)}\left[(a^2\ln(x^2+a^2) - b^2\ln(x^2+b^2)\right] + C.$

63. $\frac{1}{4}\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\left[\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\right] + C.$

RESPUESTAS DEL § 10 (págs. 326-327):

1. $\frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + \frac{7}{2}\sqrt[7]{x^2} + \frac{7}{2}\ln\frac{\sqrt[7]{x}+1}{\sqrt[7]{x}-1} + C.$

2. $\ln\frac{1+(x+3)^{\frac{1}{2}}}{1-(x+3)^{\frac{1}{2}}} + C.$

3. $12(x+1)\left[\frac{\sqrt[4]{x+1}}{15} + \frac{\sqrt[12]{x+1}}{13}\right] + C.$

4. $\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\ln\frac{z^2-z+1}{(z+1)^2} - \sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + C.$

5. $\frac{2}{9}(1+z^3)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(1+z^3)^{\frac{1}{2}}+C.$

6. $-\left[2y^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{3}}+6y^{\frac{1}{6}}+6\ln\left|y^{\frac{1}{6}}-1\right|\right]+C.$

7. $x+2+8\sqrt{x+2}+16\ln(\sqrt{x+2}-2)+C.$

8. $\ln(x+\sqrt{x}+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt{3}}+C.$

9. $\sqrt{2}\operatorname{Arg\,Th}\sqrt{\frac{1}{2}(1+x)}+C.$ 10. $2\sqrt{x}-2\operatorname{Arg\,Th}\sqrt{x}+C.$

11. $\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C.$ 12. $2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}-1)+C.$

13. $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]+C.$

14. $\frac{1}{15}(3x-4\sqrt{x}+8)\sqrt{1+\sqrt{x}}+C.$

15. $\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1}-\operatorname{Arg\,Sh}\sqrt{x^2+1})+C.$

16. $\ln(x+\sqrt{x-1})-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}+C.$

17. $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-x+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}-2x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{4}}-4\ln\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)+C.$

18. $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt{1-x^2}+C.$

19. $6x^{\frac{1}{6}}+3\ln(1+\sqrt[3]{x})-6\operatorname{arc\,tg}x^{\frac{1}{6}}+C.$

20. $x^{-\frac{1}{4}}\left[1-\frac{1}{1+x^{\frac{3}{4}}}\right]+C.$ 21. $\frac{1}{40}(1+2x^3)^{\frac{2}{3}}(4x^3-3)+C.$

22. $\frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$ 23. $\frac{1}{4}\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2}x-\sqrt{1+x^2}}+C.$

24. $\frac{1}{15}\sqrt{1+2x}\,(3x^2-2x+2)+C.$

25. $\sqrt{x(a-x)}+\frac{1}{2}a\operatorname{arc\,sen}\left(2\frac{x}{a}-1\right)+C.$

26. $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \ln\dfrac{1}{4}\left(x + \sqrt{x^2+16}\right) + C.$

27. $-2\,\text{Arg Th}\sqrt{1+x} + C.$

28. $-\dfrac{\sqrt{1+x}}{x} + \text{Arg Th}\sqrt{1+x} + C.$

29. $2\sqrt{t+1} - 4\,\text{Arg Th}\sqrt{t+1} + C.$

30. $4\ln\dfrac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[4]{x}} + C.$

31. $\dfrac{1}{16}\left[\dfrac{2}{x^2}\sqrt{x^2-4} - \text{arc sen}\dfrac{2}{x}\right] + C.$

32. $-\dfrac{1}{x}\sqrt{1-x^2} + C.$

33. $\dfrac{1}{3x^3}\sqrt{1+25x^2}\,(50x^2-1) + C.$

34. $-\text{arc sen}\dfrac{1-x}{\sqrt{2}x} + C.$

RESPUESTAS DEL § 12 (pág. 335):

1. $\text{sen}^6\dfrac{x}{6} + C.$

2. $\dfrac{1}{2}\cos^2 x - \ln(\cos x) + C.$

3. $\dfrac{1}{12}\cos^4 x\,(2\cos^3 x - 3) + C.$

4. $-\dfrac{1}{2}\text{cotg}^2 x - \ln(\text{sen}\,x) + C.$

5. $\dfrac{1}{8}\left[y - \dfrac{1}{4}\text{sen}\,4y\right] + C.$

6. $\dfrac{\text{sen}\,x}{15\cos^5 x}(3 + 4\cos^2 x + 8\cos^4 x) + C.$

7. $\dfrac{1}{4}\dfrac{\text{sen}^4 x}{\cos^6 x} - \dfrac{1}{12}\text{tg}^6 x + C.$

8. $-\dfrac{\text{sen}\,x\cos x}{1\,920}(240\,\text{sen}^6 x + 336\,\text{sen}^4 x + 350\,\text{sen}^2 x + 525) + \dfrac{35}{128}x + C.$

9. $\dfrac{1}{2}\text{tg}^4\dfrac{x}{2} - 2\,\text{tg}^2\dfrac{x}{2} - 4\ln\cos\dfrac{x}{2} + C.$

10. $-\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos x}{\text{sen}^2 x} - \dfrac{1}{2}\ln\left|\text{tg}\dfrac{1}{2}x\right| + C.$

11. $2\ln(\text{tg}\,x) + 2\,\text{cosec}^2 2x - \text{cosec}^2 x + C.$

12. $\ln\dfrac{\text{tg}\dfrac{1}{2}x}{1+\text{tg}\dfrac{1}{2}x} + C.$

13. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[\ln\left(\text{sen}\,x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \ln\left(\text{sen}\,x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] + C.$

14. $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\ln\dfrac{\text{tg}\dfrac{1}{2}x - 1 + \sqrt{2}}{\text{tg}\dfrac{1}{2}x - 1 - \sqrt{2}} + C.$

15. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\text{arc tg}\left(\sqrt{5}\,\text{tg}\dfrac{1}{2}x\right) + C.$

16. $-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\left(5\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+C.$ 17. $\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2+3\cos x}+C.$

18. $-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arg\,Th}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+2}{\sqrt{3}}+C.$

19. $-\frac{x}{3}-\frac{4}{3\sqrt{5}}\operatorname{Arg\,Th}\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-3}{\sqrt{5}}+C.$

20. $\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{5}{6}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)+C.$ 21. $\frac{x}{5}+\frac{4}{15}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x-3}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+3}+C.$

Respuestas del § 13 (págs. 336-337):

1. $-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$ 2. $\frac{1}{2}x\cos 4+\frac{1}{8}\operatorname{sen}(4x+2)+C.$

3. $-\frac{1}{2}x\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$ 4. $\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(5x-4)}{5}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(4-x)+C.$

5. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{9}\cos 9x+\cos x-\frac{1}{7}\cos 7x-\frac{1}{3}\cos 3x\right]+C.$

6. $\frac{1}{4}\left[x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x-\frac{1}{6}\operatorname{sen}6x+\frac{1}{20}\operatorname{sen}10x\right]+C.$

7. $\frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sen}11x}{11}+2\frac{\operatorname{sen}5x}{5}+\operatorname{sen}x\right)+C.$

8. $\frac{\operatorname{Sh}5x}{10}-\frac{1}{2}\operatorname{Sh}x+C.$

9. $\frac{1}{6}\operatorname{Ch}3x+\frac{1}{2}\operatorname{Ch}x+C.$

10. $\frac{1}{14}\operatorname{Sh}7x+\frac{1}{6}\operatorname{Sh}3x+C.$

CAPÍTULO XI

INTEGRALES DEFINIDAS

1. EL PROBLEMA DEL AREA

En geometría se estudian las fórmulas que permiten calcular las áreas de los polígonos.

Recordemos los pasos que se siguen en ese estudio. Primero se determina el área de un rectángulo por comparación con un cuadrado que se toma como *unidad* y luego se demuestra que un paralelogramo es equivalente a un rectángulo de igual base y altura y que un triángulo es equivalente a un paralelogramo de igual base y altura mitad.

En general se puede calcular el área de cualquier polígono descomponiéndolo en un número finito de triángulos.

Cuando hay que calcular el área del círculo se debe recurrir al concepto de *límite*. Se inscriben y circunscriben en la circunferencia

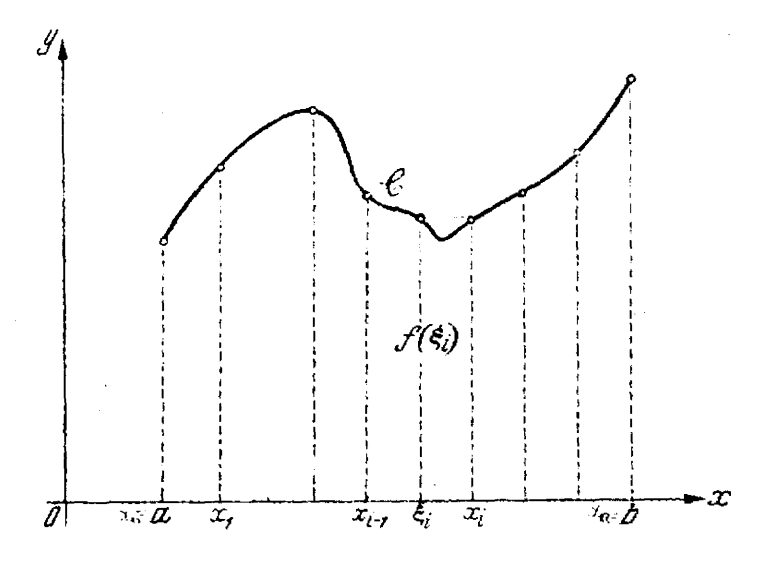


FIG. XI-1.

polígonos regulares de n lados y se define el área del círculo como el límite común de las áreas de los polígonos inscriptos y circunscriptos cuando el número n tiende a infinito.

ÁREA DE CONTORNOS CURVOS: Se trata ahora de definir el área de una figura con un contorno curvo cualquiera. Empezaremos por con-

siderar el recinto R limitado por la curva C que representa una función continua $y = f(x)$ definida en un intervalo (a, b), el eje de las abscisas y las ordenadas extremas trazadas en los puntos $x = a$, $x = b$.

Dividimos el intervalo (a, b) en n partes (iguales o desiguales) mediante los puntos x_1, x_2, ..., x_{n-1} y consideramos además $x_0 = a$; $x_n = b$.

En cada uno de los intervalos parciales se eligen sendos puntos ξ cualesquiera:

$$x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1; \quad x_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_2; \quad x_2 \leqslant \xi_3 \leqslant x_3; \quad \ldots; \quad x_{n-1} \leqslant \xi_n \leqslant x_n$$

y en los puntos ξ_i se calcula el valor $f(\xi_i)$. El producto $(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$ mide el área del rectángulo de base $(x_i - x_{i-1})$ y altura $f(\xi_i)$. Formando la suma de las áreas de todos los rectángulos análogos se tendrá un *valor aproximado* del área buscada:

$$A_{\text{aprox.}} = (x_1 - x_0)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})f(\xi_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})f(\xi_i).$$

Si existe el límite de esta suma cuando el número n de intervalos tiende a infinito y cada uno de los intervalos tiende a cero, ese número es *por definición* el área A del recinto:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx$$

donde la última notación se lee "integral definida entre a y b de *efe* de x diferencial x".

El símbolo $\int$ no es otra cosa que una modificación de la letra S, inicial de suma y el diferencial x corresponde a $(x_i - x_{i-1}) = \Delta x_i$.

Aplicaremos esta definición a algunas funciones muy sencillas:

EJEMPLOS:

1º) Si se trata de la función $f(x) = k$, cuya gráfica es una recta paralela al eje de las x, resulta:

$$A_{\text{aprox.}} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})f(\xi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})k;$$

como k es un factor común se puede sacar fuera de la suma y resulta:

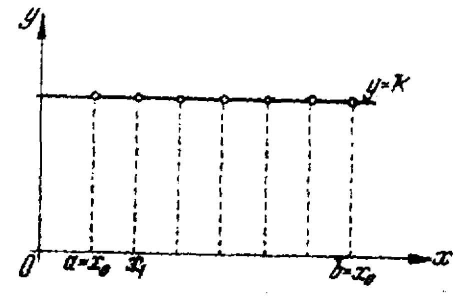


FIG. XI-2.

$$A_{\text{aprox.}} = k \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = k(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1}) =$$

$$= k(x_n - x_0) = k(b - a).$$

Como esta expresión es independiente de n su límite para $n \to \infty$ será el mismo valor:

$$A = \int_a^b k\,dx = k(b-a).$$

2º) Sea $y = x$ definida en el intervalo $(0, 1)$. Dividamos este intervalo en n partes iguales mediante los puntos:

$$x_0 = 0;\ x_1 = \frac{1}{n};\ x_2 = \frac{2}{n};\ \ldots;\ x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

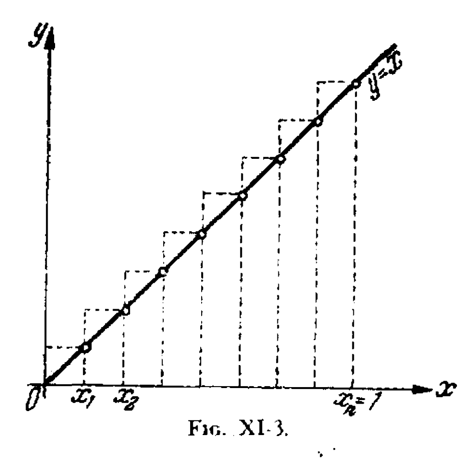


FIG. XI-3.

Adoptemos como valor ξ_i el punto x_i con lo que resulta $f(\xi_i) = \xi_i = \frac{i}{n}$ y por ser $(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n}$, se tiene:

$$A_{\text{aprox.}} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i =$$

$$= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n).$$

La expresión entre paréntesis es una progresión aritmética de razón 1. Reemplazándola por su suma resulta:

$$A_{\text{aprox.}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2}(1+n)n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

y el límite de esta expresión es

$$A = \int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Confírmase así el resultado elemental de que el área del triángulo rectángulo isósceles de catetos unidad es igual a $\frac{1}{2}$.

3º) Sea $y = x^2$ en el mismo intervalo y con los mismos puntos de división del ejemplo anterior. Resulta

$$A_{\text{aprox.}} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2).$$

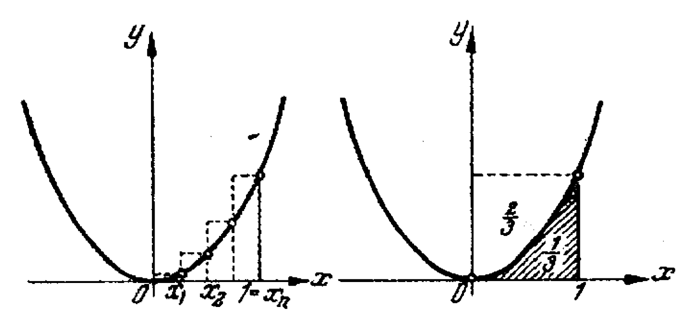


Fig. XI-4.

La expresión entre paréntesis es la suma S_2 de los cuadrados de los n primeros números naturales; se puede expresar en forma cerrada como se ha visto en la página 14 mediante la fórmula $S_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$. Resulta entonces:

$$A_{\text{aprox.}} = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Pasando al límite, cuando $n \to \infty$ es

$$A = \int_0^1 x^2\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Observaciones:

1. De haber tenido que determinar las áreas por este procedimiento, las posibilidades del cálculo integral hubieran sido muy escasas pues aún para funciones simples, el cálculo de las sumas que aparecen en la definición son muy difíciles o imposibles. Veremos más adelante como el concepto de integral se vincula con el de derivada, permitiendo obtener las áreas en forma sencilla.

2. Hemos definido el área del recinto R como el límite de una suma ¿Existirá siempre ese límite? Para el caso de las *funciones continuas* en un intervalo cerrado, que son las que hemos considerado en este párrafo, la contestación es *afirmativa*, como se puede ver en el fascículo de "Complementos teóricos" que integra esta edición.

2. DEFINICION GENERAL DE INTEGRAL DEFINIDA

Acabamos de definir el área de un recinto R limitado por una curva C, diagrama de una *función continua* $y = f(x)$, como límite de una suma.

Consideremos ahora una función $y = f(x)$ acotada, continua o no, definida en un intervalo (a, b). Dividimos este intervalo en n partes, iguales o desiguales, mediante los puntos $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, $x_n = b$ y en cada uno de ellos consideramos un valor ξ_i con $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Formamos los productos $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ y hacemos la suma correspondiente a los n intervalos. Calculamos ahora el límite de esta suma cuando el número de intervalos tiende a ∞ (y cada uno de los intervalos tiende a cero). Si este límite existe y es finito, es por definición la *integral definida* de $f(x)$ en el intervalo (a, b):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

FIG. XI-5.

En particular si $f(x)$ es continua esta definición coincide con la definición de área dada anteriormente. Si $f(x)$ tiene como en la figura un número finito de discontinuidades finitas en c_1, c_2, ..., c_n, puede considerarse como el área del contorno limitado por la línea gruesa de la figura [1].

Conviene señalar que la integral definida es un *algoritmo matemático* que puede aplicarse a distintas cuestiones concretas recibiendo entonces interpretaciones diversas: áreas, volúmenes, momentos, trabajos, etc., tal como veremos en los capítulos XII y XIII.

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS: Para completar la definición de integral definida agregaremos las dos siguientes, perfectamente acordes con la definición general:

1º) $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

2º) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Si consideramos en el intervalo (a, c) un punto interior b tal que

$$ab + bc = ac$$

resulta de acuerdo a la definición general:

3º) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

(1) Más adelante extenderemos la noción de integral al caso de discontinuidades infinitas y de intervalos de integración infinitos.

y por 2°) la relación vale aún cuando b sea exterior al intervalo (a, c).

Si la función $f(x)$ es negativa en un intervalo como el (b, c) de la figura, correspondientemente la integral resulta negativa de acuerdo a la definición. Si se trata de una función continua se puede considerar que el área limitada por la curva y el eje de las abscisas es negativa.

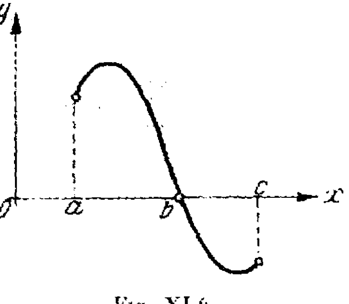


Fig. XI-6.

3. TEOREMA DE LA MEDIA

Hemos supuesto que la función $f(x)$ es acotada, es decir que se verifica

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Por consiguiente será

$$m\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) \leqslant M \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$$

o sea

$$m(b-a) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) \leqslant M(b-a)$$

y haciendo tender n a ∞, si el límite de la sumatoria existe y es finito, resulta

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Es decir, que existe un valor μ comprendido entre m y M tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\mu.$$

Resulta, entonces, el teorema de la media:

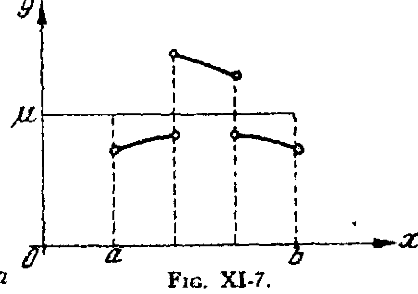


Fig. XI-7.

La integral definida de una función acotada cuyos valores están comprendidos entre m y M es igual a la amplitud del intervalo de integración multiplicado por un valor μ comprendido entre m y M.

Si la función $f(x)$ es continua, entonces por lo menos en un punto ξ del intervalo $[a, b]$, la función *tomará el valor* μ y en este

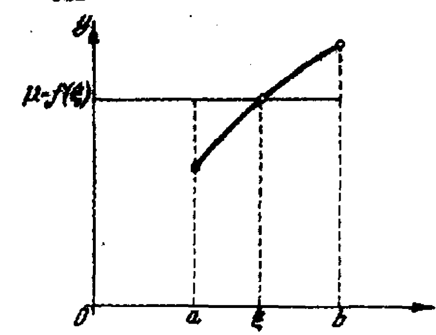


Fig. XI-8. — El valor medio μ es la altura de un rectángulo de base $(b-a)$ y área igual a la del recinto R.

caso se podrá escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi).$$

La integral definida de una función *continua* es igual al intervalo de integración multiplicado por el valor que toma la función en un cierto punto intermedio.

Se llama *valor medio* de una función $f(x)$ en un intervalo (a, b) al valor μ definido por la relación

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

4. INTEGRACION GRAFICA

La integración gráfica constituye una manera rápida de calcular aproximadamente el área de un recinto R limitado por una curva C, imagen de una función $y = f(x)$.

Antes de estudiar el caso general consideraremos un caso particular: el de la función $f(x) = k$, siendo k un valor constante, lo cual significa que la curva C será un segmento de recta AB paralela al eje de las abscisas en un intervalo (a, b).

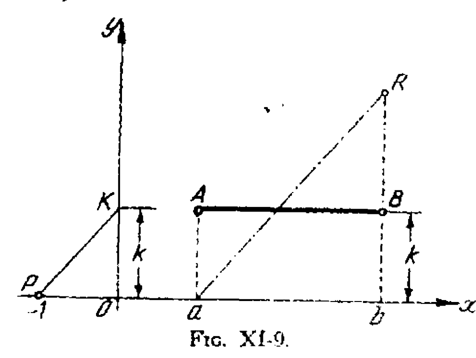


Fig. XI-9.

Designemos con P (polo) al punto de coordenadas $(-1{,}0)$ y sea K la proyección de AB sobre el eje de las y. Queda así determinado el segmento PK, al cual se le traza por a una paralela aR, hasta la intersección con la recta $x = b$.

Demostraremos que el segmento Rb tiene como medida el área del rectángulo $aABb$, considerando que todos los segmentos se han medido tomando como unidad el segmento $PO = 1$.

De la construcción gráfica surge que los triángulos rectángulos PKO y aRb son semejantes y por consiguiente sus lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{KO}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{Rb}} \quad \text{y dado que } \overline{PO} = 1, \text{ resulta}$$

$$\overline{Rb} = \overline{KO}\,.\,\overline{ab} = k(b-a) = \text{área del rectángulo } aABb.$$

En otros términos, el segmento Rb tiene la misma medida que la integral definida

$$\int_a^b k\,dx.$$

En el caso de una función "casi-constante" o "escalera" que se caracteriza por tomar en intervalos sucesivos (a, b), (b, c), (c, d), ..., valores constantes k_1, k_2, k_3, ... no habrá más que aplicar reiteradamente el procedimiento.

En la figura se han trazado 4 "peldaños", el tercero de los cuales tiene ordenada negativa.

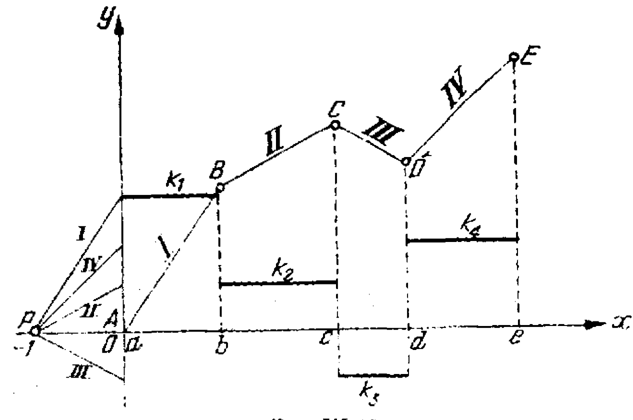


Fig. XI-10.

La línea $ABCDE$ que representa el área de la función "escalera" permite determinar cualquier área correspondiente a abscisas comprendidas entre a y e. Así el segmento cC da el área correspondiente a los 2 primeros "peldaños" y cualquiera sea x del intervalo (a, c) la ordenada correspondiente determina el área limitada por la función "escalera" y las abscisas a y x. Más general aún, el área determinada por la función, comprendida entre dos abscisas x_1 y x_2, está dada por la diferencia de las ordenadas correspondientes de la curva $ABCDE$.

(Todos estos valores corresponden a una unidad igual a OP. De tomar módulos distintos en los ejes de las abscisas y ordenadas m_x, m_y y en la distancia polar m_p, habrá que considerar como módulo de la curva $ABCDE$ el valor $m_x m_y : m_p$, tal como se muestra en *Cálculo numérico y gráfico*, M. Sadosky, pág. 264).

Finalmente si se trata de una función continua definida en un intervalo (a, g), se determina una función "escalera" de modo tal que el área encerrada por ambas funciones sea aproximadamente equivalente. Para ello se utilizan las ordenadas correspondientes a los máximos, mínimos, extremos, etc.

Se construye entonces la poligonal cuyas ordenadas dan *aproximadamente* el área.

Los puntos b, d, f se eligen de modo que se compensen las áreas comprendidas entre la función dada y la función "escalera".

En los puntos de abscisas a, c, e, g (que hemos señalado con un circulito), coinciden los valores de las áreas de la función continua y la función "escalera" y por consiguiente la curva buscada debe pasar exactamente por esos puntos. Trazando entonces una curva que resulte tangente, en los puntos señalados con un circulito, a la poligonal determinada para la función "escalera", se tendrá una curva continua cuyas ordenadas medirán con bastante aproximación las áreas encerradas por la curva y el eje de las abscisas.

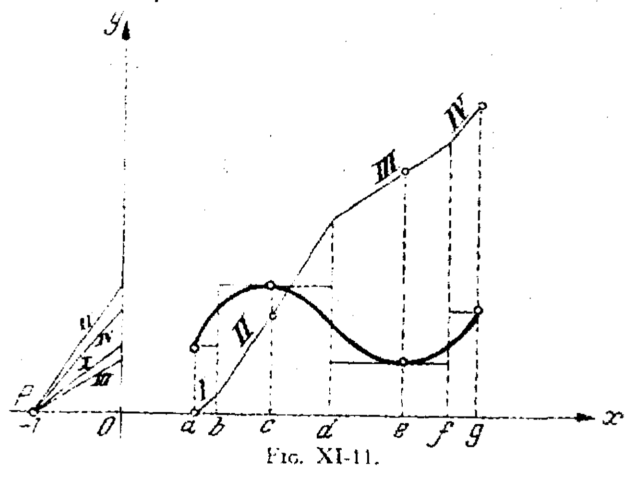


FIG. XI-11.

EJERCICIO:

Dibuje la curva correspondiente a la función $y = \text{sen}\, x + 2$ en el intervalo $(0, 2\pi)$. Calcule gráficamente el área determinada por esta curva y el eje de las x. Compare el resultado con el valor exacto 4π.

INTEGRAL DEFINIDA CON EXTREMO SUPERIOR VARIABLE. RELACIONES ENTRE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN Y LA DE SU INTEGRAL: Dada una función $f(x)$ podemos calcular en un intervalo (a, b), el valor de la integral definida correspondiente.

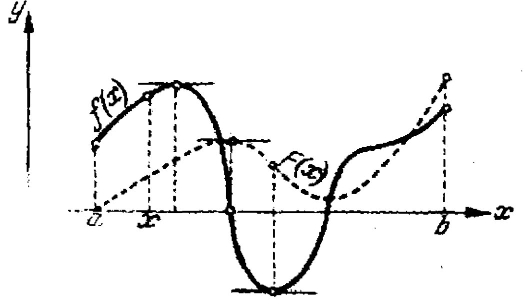


FIG. XI-12.

Si consideramos el extremo a fijo y el extremo superior variable, los valores correspondientes

$$\int_a^x f(x)\, dx$$

definirán una función $F(x)$. ¿Podrá establecerse una relación entre la función $f(x)$ y $F(x)$? La *respuesta afirmativa* es la que proporcionan los teoremas fundamentales del cálculo integral.

5. TEOREMAS FUNDAMENTALES

I. La derivada de la función $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ siendo $f(x)$ una función continua, es $f(x)$.

En lugar de determinar la derivada de $F(x)$ mediante la pendiente de la curva correspondiente, la aplicación directa de la definición de derivada, resolverá la cuestión:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(x)\,dx}{h} .$$

Fig. XI-13.

De acuerdo al teorema de la media resulta

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = (x + h - x) f(\xi)$$

con $x \leqslant \xi \leqslant x + h$. Por consiguiente es

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h\,f(\xi)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x).$$

II. La función $F(x)$ difiere de una primitiva [1] cualquiera $P(x)$ de $f(x)$ en una constante.

De acuerdo al teorema anterior es: $F'(x) = f(x)$.

De acuerdo a la definición de primitiva es: $P'(x) = f(x)$.

$\therefore\ F'(x) = P'(x)$.

Dos funciones que tienen igual derivada (pág. 273) difieren en una constante:

$$F(x) = P(x) + C. \qquad [1]$$

[1] Recordemos que hemos definido (pág. 273) como *función primitiva* de $f(x)$ a una función $P(x)$ que verifica la relación $P'(x) = f(x)$.

Conocida una primitiva *cualquiera* de $f(x)$, se conoce la integral $\int_a^x f(x)\,dx$ a menos de una constante.

III. Determinación de la constante. ***Regla de Barrow.*** **Haciendo $x = a$ en [1] resulta:**

$$F(a) = P(a) + C$$

y como $F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$ se obtiene

$$C = -P(a),$$

llegando finalmente a la fórmula fundamental

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx = P(x) - P(a).$$

Determinada una primitiva *cualquiera* de $f(x)$, la integral de $f(x)$ entre a y x es igual a la diferencia de valores que toma esa primitiva entre x y a.

En particular si el extremo superior es b resulta la regla de Barrow:

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(b) - P(a) = \Big[\,P(x)\,\Big]_a^b \qquad [2]$$

indicando simbólicamente con la última expresión la diferencia $P(b) - P(a)$.

6. CALCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

Con la fórmula [2] queda totalmente resuelto el cálculo de las integrales definidas y como caso particular, el cálculo de áreas.

EJEMPLOS:

1°) Sea calcular

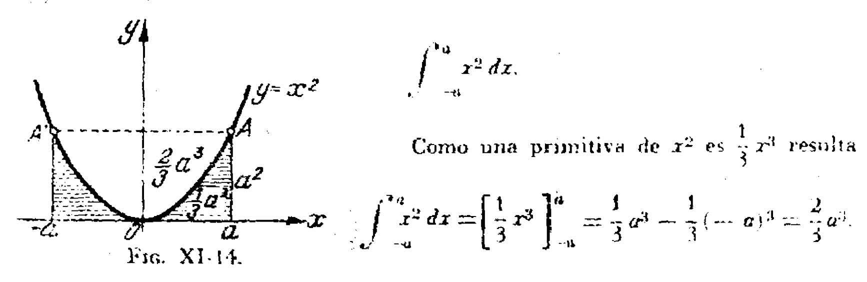


FIG. XI-14.

$$\int_{-a}^{a} x^2\,dx.$$

Como una primitiva de x^2 es $\frac{1}{3}x^3$ resulta

$$\int_{-a}^{a} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}(-a)^3 = \frac{2}{3}a^3.$$

Interpretada geométricamente, esta integral definida representa el área rayada en la figura. Como el rectángulo de vértices $-a$, A', A, a tiene como área $2a\cdot a^2 = 2a^3$, resulta que el área del sector parabólico $A'OA$ es igual a $2a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$, resultado ya conocido por ARQUÍMEDES quien expresó que "todo segmento de parábola equivale a los $\frac{4}{3}$ del triángulo de igual base y

altura". En nuestro caso el triángulo $A'OA$ tiene base $2a$ y altura a^2 y por ello área a^3.

2°) Calcular $A = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx.$

Puesto que una primitiva de $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$ resulta

$$A = \Big[-\cos x \Big]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0.$$

Interpretado como área este resultado nos dice que el recinto limitado por la sinusoide y el eje de las abscisas en el intervalo $(0, 2\pi)$ tiene área nula. Esto ocurre porque el área es igual a 2 en el intervalo $(0, \pi)$ e igual a -2 en $(\pi, 2\pi)$. (Verifique el lector estos resultados). Si se trata de conocer el área con prescindencia del signo resulta que el área limitada por la sinusoide en una oscilación completa es 4.

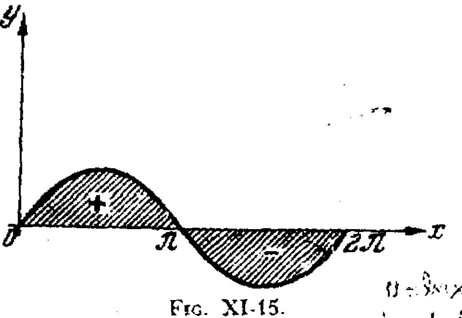


Fig. XI-15.

Fig. XI-16.

3°) Calcular $\int_1^e \ln x \, dx.$

Puesto que una primitiva de $\ln x$ es $x(\ln x - 1)$, como ya hemos visto al estudiar integración por partes, resulta

$$\int_1^e \ln x \, dx = \Big[x(\ln x - 1) \Big]_1^e =$$

$$= e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1) = 1.$$

Geométricamente este resultado significa que el área limitada por la curva logarítmica, el eje de las x y la ordenada correspondiente a $x = e$ es igual al área de un cuadrado de lado 1.

4°) Sea calcular $A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx.$

Hemos visto (pág. 300) que la integral indefinida correspondiente se podía calcular haciendo la sustitución $x = r \operatorname{sen} t$ con lo que se llegaba a una primitiva:

$$P(t) = \frac{1}{2} r^2 (t + \operatorname{sen} t \cdot \cos t) \qquad [1]$$

o pasando a la variable x:

$$P(x) = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} + x \sqrt{r^2 - x^2}.$$

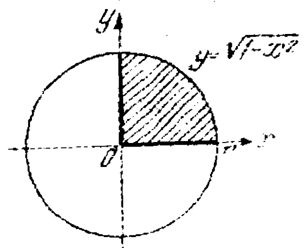


Fig. XI-17.

Acotando esta expresión entre 0 y r se tiene

$$A = \frac{1}{2}[r^2 \operatorname{arc\,sen} 1 + r \cdot 0 - r^2 \cdot 0 - 0 \cdot r] = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{4}\pi r^2.$$

Resulta más cómodo evitar el paso de la variable t a la variable x puesto que si es $x = r \operatorname{sen} t$, para $x = 0$ debe ser $t = 0$ y para $x = r$ debe ser $t = \frac{1}{2}\pi$.

Reemplazando en [1] se tiene:

$$A = \frac{1}{2} r^2 \Big[t + \operatorname{sen} t \cdot \cos t \Big]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{2} r^2 \left[\frac{1}{2}\pi + \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi \cos \frac{1}{2}\pi - 0 - \operatorname{sen} 0 \cdot \cos 0 \right] =$$
$$= \frac{1}{4}\pi r^2.$$

Esta integral definida representa geométricamente la cuarta parte del círculo de centro en el origen y radio r.

5º) Calcula el área limitada por las parábolas de eje horizontal

$$y^2 = 8(x + 2), \qquad y^2 = 32(8 - x). \qquad [1]$$

Por razones de simetría es suficiente calcular el área correspondiente al semiplano superior $y > 0$ y multiplicar el resultado por 2.

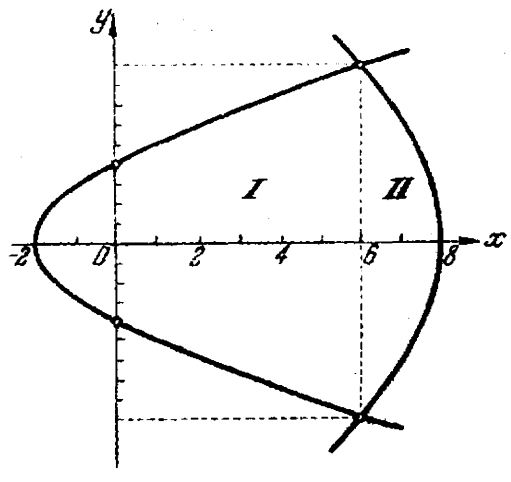


FIG. XI-18.

Igualando los segundos miembros de las expresiones [1] se ve que las parábolas se encuentran en $x = 6$. Habrá que calcular entonces el área A' limitada por la primera de las parábolas para x variando entre -2 y 6 y el área A'' limitada por la segunda de las parábolas para x comprendido entre 6 y 8:

$$A' + A'' = \int_{-2}^{6} \sqrt{8(x+2)}\, dx + \int_{6}^{8} \sqrt{32(8-x)}\, dx.$$

Puesto que las integrales indefinidas son

$$\int \sqrt{8(x+2)}\, dx = \sqrt{8}\,\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C; \int \sqrt{32(8-x)}\, dx = -\sqrt{32}\,\frac{2}{3}(8-x)^{\frac{3}{2}} + C$$

resulta

$$A' + A'' = \frac{2\sqrt{8}}{3}\Big[(x+2)^{\frac{3}{2}}\Big]_{-2}^{6} - \frac{8\sqrt{2}}{3}\Big[(8-x)^{\frac{3}{2}}\Big]_{6}^{8} = \frac{160}{3}$$

y el área es el doble: $\frac{320}{3}$.

6°) Determinar el área limitada por la parábola

$$x = -y^2 + y$$

y el eje de las ordenadas.

En este caso es x función de y y puesto que la parábola corta al eje de las ordenadas en los puntos 0 y 1, resultará:

$$A = \int_0^1 x\,dy = \int_0^1 (-y^2 + y)\,dy =$$

$$= \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Fig. XI-19.

7°) Determinar el área encerrada por la parábola

$$y = 1 + 2x - x^2$$

y la cuerda que une los puntos $(-1, -2)$, $(2, 1)$.

Según los datos del problema la ecuación de la cuerda es $y = x - 1$. En lugar de calcular el área como diferencia de las integrales definidas:

$$\int_{-1}^{2} (1 + 2x - x^2)\,dx - \int_{-1}^{2} (x - 1)\,dx.$$

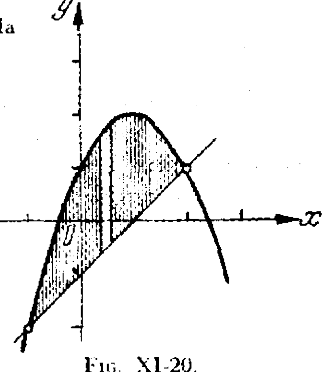


Fig. XI-20.

es mejor restar las ordenadas de las 2 curvas (en este caso la parábola y la recta) e integrar:

$$A = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\,dx = \left[2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2}.$$

8°) Calcular el área comprendida entre las parábolas

$$y^2 = 2x, \qquad x^2 = 2y.$$

Las parábolas se cortan en $x = 0$, $x = 2$ y el área será, considerando como en el ejemplo anterior las diferencias de ordenadas

$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{2}x^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{2}\,x\,\sqrt{x} - \frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

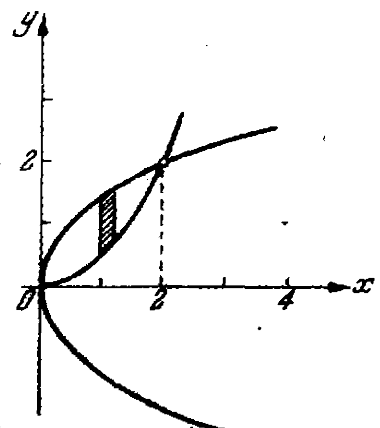


Fig. XI-21.

Ejercicios:

1. **Determinar el área limitada por la recta**

$$y = x + 1,$$

el eje de las x y las ordenadas $x = 1$, $x = 3$.

R: 6.

2. Determinar el área del triángulo limitado por la recta $y = x + 2$, el eje de las x y la vertical $x = 3$.

R: 12,5.

3. Determinar el área del trapecio limitado por la recta $y = x + 2$, y las ordenadas de abscisa $x = 0$, $x = 4$.

R: 16.

4. Determinar el área encerrada por la curva

$$y = 2 - x^2$$

y la recta

$$y = 1.$$

R: $\frac{4}{3}$.

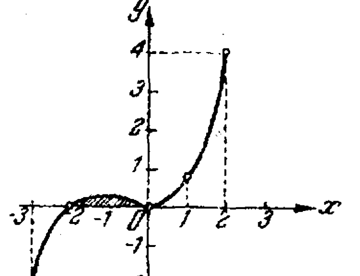


Fig. XI-22.

5. Verificar que la curva

$$4y = x^2 (x + 2)$$

limita con el eje x, el área $\frac{1}{3}$.

6. Verificar que la parábola

$$2y = (x - 1)(x - 3)$$

limita con el eje x, el área $\frac{2}{3}$.

7. Determinar el segmento parabólico de la curva

$$y = x^2 - 7x + 9$$

intersectada por la recta

$$y = 3 - 2x.$$

R: $\frac{1}{6}$.

8. Calcular el área encerrada por la parábola

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

y los ejes coordenados.

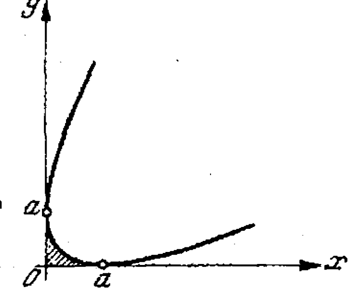


Fig. XI-23.

(Téngase en cuenta que esta parábola es tangente a los ejes en los puntos $(a, 0)$; $(0, a)$ y que es $y = [\sqrt{a} - \sqrt{x}]^2$).

R: $\frac{1}{6} a^2$.

9. **Determinar el área limitada por la curva, el eje de las abscisas y las ordenadas en los puntos indicados en los siguientes casos:**

a) $y = x^3$; $x = 2,\ x = 5.$ R: 152,25.

b) $y = x^2 - x + 1$; $x = 0,\ x = 1.$ R: $\frac{5}{6}$.

c) $y = x + \frac{1}{x}$; $x = 1,\ x = 2.$ R: $\frac{3}{2} + \ln 2.$

d) $y^2 = 2x + 4$; $x = -2,\ x = 0.$ R: $\frac{8}{3}$.

e) $xy = 1$; $x = 1,\ x = 3.$ R: $\ln 3.$

f) $y = \frac{1}{1 + x^2}$; $x = 0,\ x = 1.$ R: $\frac{1}{4}\pi.$

g) $y = \frac{1}{1 - x^2}$; $x = 0,\ x = \frac{1}{2}$. R: $\frac{1}{2}\ln 3.$

10. Calcular el área encerrada por las curvas

$$2y^2 - 3y = x - 1;\ y^2 - 2y = x - 3.$$

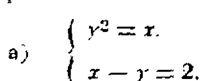
R: $\frac{9}{2}$.

11. Calcular el área encerrada por las curvas

$$y = 3x^2 - x - 3; \qquad y = -2x^2 + 4x + 7.$$

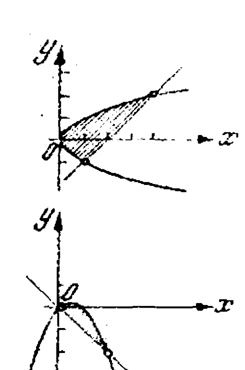
R: $\frac{45}{2}$.

12. Determinar el área encerrada por los siguientes pares de curvas



a) $\begin{cases} y^2 = x. \\ x - y = 2. \end{cases}$

R: 4,5.



b) $\begin{cases} y = x - x^2. \\ y = -x. \end{cases}$

R: $\frac{4}{3}$.

c) $\begin{cases} y = x^3 - x. \\ y = x. \end{cases}$

R: 2.

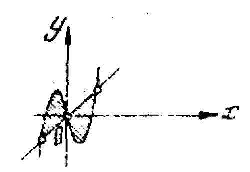


Fig. XI-24.

13. Determinar el área encerrada por el eje x y la curva (una onda simple)

$$y = \operatorname{sen} 2x.$$

R: 1.

14. Determinar el área limitada por una onda de la curva

$$y = \cos\frac{1}{2}x$$

y el eje de las abscisas.

R: 4.

15. Determinar el área limitada por el eje x, cada una de las siguientes curvas trigonométricas y las 2 ordenadas que corresponden a una distancia igual a un periodo de la curva

a) $y = \operatorname{sen}^2 x$ R: $\frac{1}{2}\pi$.

b) $y = \cos^3 3x$. R: $\frac{8}{9}$.

c) $y = \cos\frac{1}{2}x$. R: 8.

d) $y = \cos 2x + \cos x$. R: $3\sqrt{3}$.

e) $y = \operatorname{sen}\frac{2}{3}x$. R: 6.

(En todos los casos tómese la suma de los valores absolutos de las áreas parciales que resultan de las intersecciones de la curva y el eje x. Trácese en cada caso la gráfica correspondiente.)

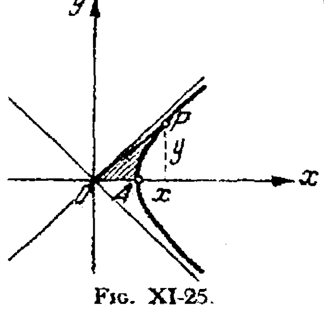


FIG. XI-25.

16. Verificar que el área de la elipse de semiejes a y b es igual al producto πab. (Procédase como en el ejemplo 4º de la pág. 367).

17. Calcular el área limitada por la hipérbola

$$x^2 - y^2 = 4 \quad \text{y la recta } x = 4.$$

R: $8\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})^4$.

18. Hallar la expresión general del área limitada por la hipérbola equilátera

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

el eje x y una recta que une el origen con un punto cualquiera de la curva (sector hiperbólico).

R: $\frac{1}{2}a^2 \ln\frac{x+y}{a} = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{Arg\,Ch}\frac{x}{a}$.

19. Sean A y B dos puntos de la hipérbola equilátera

$$xy = K.$$

Demostrar que el área limitada por el arco AB, las ordenadas de A y de B y el eje x es igual al área limitada por AB, las abscisas de A y de B y el eje y.

20. Determinar el área limitada por la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

el eje x y la ordenada en un punto cualquiera. Aplíquese al caso de la hipérbola equilátera $(a = b)$ y obsérvese su relación con el área del sector hiperbólico (ej. 18).

R. $\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}ab \operatorname{Arg Ch} \frac{x}{a}$.

21. Determinar el área comprendida entre el eje x la curva

$$y = e^x - e^{-x}$$

y las ordenadas de $x = 0$, $x = 2$.

Verifique el resultado observando que es $y = 2 \operatorname{Sh} x$.

R: $e^2 - e^{-2} - 2$.

22. Dada la catenaria

$$y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

determinar el área limitada por la curva, el eje x y las verticales $x = a$, $x = -a$.

Verifique el resultado partiendo de la ecuación de la catenaria $y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a}$.

R: $a^2(e - e^{-1})$.

23. Determinar el área encerrada por la curva

$$y = x\,e^x,$$

el eje x y la recta $x = 2$.

R: $1 + e^2$.

24. Determinar el área limitada por la curva

$$y = x(\ln x)^2$$

el eje x y las ordenadas de $x = 1$, $x = e$.

R: $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$.

25. Calcular en qué relación, las siguientes curvas, dividen al cuadrado con vértice en el origen y en los puntos $(0, 1)$; $(1, 0)$; $(1, 1)$:

a) $y = x^3$. R: 3.

b) $y^2 = x^3$. R: $\frac{3}{2}$.

c) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$. R: $-1 + \frac{32}{3\pi}$

d) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{4} \pi x$. R: $\frac{\pi - \ln 4}{\ln 4}$.

26. Determinar el área limitada por la curva

$$x^2 y = x^2 + 1$$

y las rectas $x = 1$, $y = 1$, $x = 4$.

R: $\frac{3}{4}$.

27. Calcular el área encerrada por un folio de la curva

$$4y^2 = x^2(4 - x).$$

R: $\frac{128}{15}$.

28. Determinar el área encerrada por la curva

$$y^2 = x^2(x^2 - 1)$$

y la recta $x = 2$.

R: $2\sqrt{3}$.

29. Determinar el área encerrada por la curva

$$y^2 = x^2(x - 1)$$

y la recta $x = 3$.

R: $\frac{88}{15}\sqrt{3}$.

30. Determinar el área encerrada por un folio de la curva

$$y^2 = x(x - 1)^2.$$

R: $\frac{8}{15}$.

31. Determinar el área encerrada en el primer cuadrante por cada una de las siguientes curvas, el eje y y la primera intersección con el eje x.

a) $x + 2y + y^2 = 4$. R: $\frac{1}{3}(10\sqrt{5} - 14)$.

b) $y = e^x \operatorname{sen} x$. R: $\frac{1}{2}(1 + e^{\pi})$.

c) $y^2 = (1 - x)^3$. R: $\frac{2}{5}$.

d) $y = \cos(x - 1)$. R: $1 + \operatorname{sen} 1$.

7. VALOR MEDIO Y VALOR EFICAZ DE UNA FUNCION

VALOR MEDIO: Cuando se tiene una sucesión de valores

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

se llama *valor medio* o promedio al número

$$\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

En el caso de una variable *continua* $y(x)$ en un intervalo (a, b), se llama valor medio, como ya hemos visto, al número μ definido por la relación

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx.$$

Ejemplos:

1°) El valor medio de la función

$$y = \operatorname{sen} x$$

en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ es $\mu = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \sim 0.636.$

2°) El valor medio de la función

$$y = \ln x$$

en el intervalo $(1, e)$ es

$$\mu = \frac{1}{e-1}\int_1^e \ln x\, dx = \frac{1}{e-1}\Big[x \ln x - x\Big]_1^e = \frac{1}{e-1} \sim 0.58.$$

3°) Los valores medios de todas las funciones

$$y = A \operatorname{sen} x$$

en el intervalo $(0, 2\pi)$ son nulos cualesquiera sean las amplitudes A.

En efecto, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A \operatorname{sen} x\, dx = \frac{A}{2\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi} = 0.$

La anulación de los valores medios se debe a la compensación de las áreas positivas y negativas de estas sinusoides en un período completo.

Valor eficaz: Para caracterizar mejor funciones diferentes que tienen valores medios iguales introducimos el concepto de *valor eficaz* de uso muy frecuente en la técnica.

Dada la función $y = f(x)$, calcularemos el valor medio del *cuadrado* de $f(x)$ en el intervalo (a, b):

$$\sigma^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Este valor es esencialmente positivo y no puede suceder, como en el caso del valor medio, que se anule por compensación de áreas.

A la raíz cuadrada de este número se le llama *valor eficaz* de la función $y = f(x)$ en el intervalo (a, b).

EJEMPLOS:

1º) Valor eficaz de la función

$$y = \operatorname{sen} x$$

en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Puesto que es $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\Big[x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x \Big|_0^{2\pi} = \pi$

resulta

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\pi}{\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

2º) Valor eficaz de la función

$$y = A \operatorname{sen} x$$

en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Resulta $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, A \sim 0{,}707\, A$.

3º) Valor eficaz de la función

$$I = I_0 \cos 2\pi \frac{t}{T} \qquad [1]$$

en el intervalo $(0, T)$.

Resulta $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, I_0$.

4º) *Aplicación física:* Consideremos una corriente alternada cuya intensidad está dada por la expresión [1], siendo I_0 la amplitud y T el período.
Si esta corriente alternada pasa por un instrumento de hilo caliente, la cantidad de calor que desarrolla en un período T, es, de acuerdo a la ley de Joule:

$$\int_0^T I^2 R\, dt = I_0^2 R \int_0^T \cos^2 2\pi \frac{t}{T}\, dt = I_0^2 R\, \frac{T}{4\pi}\left[\frac{2\pi t}{T} + \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}\right]_0^T = \frac{1}{2} I_0^2 R T,$$

llamando R a la resistencia óhmica del instrumento.
Ahora bien, una corriente *continua* de intensidad I^* desarrolla en el mismo aparato, en el intervalo T, la cantidad de calor

$$\int_0^T I^{*2} R\, dt = I^{*2} R T.$$

Igualando los valores hallados; se tiene

$$I^{*2} R T = \frac{1}{2} I_0^2 R T$$

y resulta

$$I^* = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, I_0 \sim 0{,}707\, I_0,$$

que es precisamente el valor hallado en el ejemplo 3º) para el valor eficaz

de I. Por eso se designa habitualmente a I^* como valor eficaz I_{ef} de la intensidad de la corriente alternada I.

También se considera la tensión eficaz E_{ef} de una corriente alternada cuya tensión E es $E_0 \cos 2\pi \frac{t}{T}$ y resulta igual a $0{,}707\, E_0$.

8. INTEGRACION NUMERICA APROXIMADA

Cuando no se conoce la primitiva de una función subintegral no se puede aplicar la fórmula de Barrow y se recurre entonces a procedimientos aproximados. Ya hemos visto como se procede gráficamente.

Ahora consideraremos otros procedimientos numéricos que permitirán calcular las integrales definidas

$$\int_a^b f(x)\, dx, \qquad [1]$$

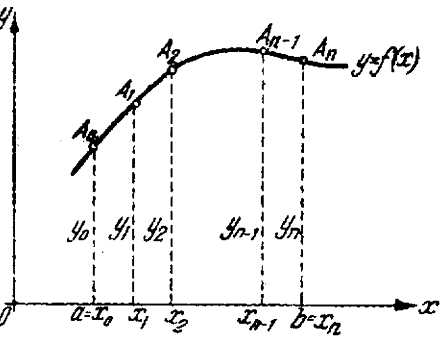


FIG. XI-26.

donde $f(x)$ es una función dada o bien por su expresión analítica o por una *tabla de valores equidistantes* corespondientes a los valores x que resultan de dividir el intervalo de integración (a, b) en n partes iguales.

1°) FÓRMULA DE LOS TRAPECIOS: Interpretada la integral definida [1] como el área de la superficie limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las ordenadas corespondientes a $x = a$, $x = b$, podemos considerar esa superficie como la suma de las superficies $aA_0A_1x_1$; $x_1A_1A_2x_2$; $\ldots$; de la figura.

A su vez el área de cada una de esas superficies parciales puede considerarse *aproximadamente* igual al área del trapecio que tiene los mismos vértices. Como el área de un trapecio es igual a la semisuma de las medidas de las bases por la medida de la altura, resulta, llamando h al valor común de esa altura $\frac{b-a}{n}$:

$$\text{Area } (aA_0A_1x_1) \sim \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h$$

$$\text{Area } (x_1A_1A_2x_2) \sim \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h$$

. . . .

$$\text{Area } (x_{n-1}A_{n-1}A_nb) \sim \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h.$$

Sumando resulta la *fórmula de los trapecios:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{1}{2}h(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n) =$$

$$= h\left[\frac{1}{2}E + \sum_1^{n-1} y_i\right],$$

donde $E = y_0 + y_n$, designa la suma de las ordenadas extremas y la sumatoria que aparece corresponde a todas las ordenadas desde la segunda a la penúltima.

EJEMPLO: Sea calcular $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^3}}$.

La función subintegral carece de primitiva expresable mediante funciones elementales. Aplicaremos la fórmula de los trapecios dividiendo el intervalo (0, 1) en 10 partes iguales, con lo cual resultará $h = 0{,}1$.

x	$f(x)$
0	0,707
0,1	0,706
0,2	0,705
0,3	0,702
0,4	0,696
0,5	0,686
0,6	0,672
0,7	0,653
0,8	0,631
0,9	0,605
1	0,577

La suma de las ordenadas extremas es $E = 0{,}707 + 0{,}577 = 1{,}284$ y la suma de las 9 ordenadas interiores es igual a 6,056.

La fórmula de los trapecios da entonces:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^3}} \sim 0{,}1\left[\frac{1{,}284}{2} + 6{,}056\right] = 0{,}670.$$

Más adelante (Cap. XV), calcularemos este mismo ejemplo utilizando un desarrollo en serie de potencias.

En la fórmula de los trapecios se ha sustituído la curva por una poligonal inscripta. Mejor aproximación (fórmula de Simpson) se obtiene reemplazando cada arco de la curva dada correspondiente a 3 valores x_{i-1}, x_i, x_{i+1} por un arco de parábola.

2º) FÓRMULA DE SIMPSON: Antes de hallar la expresión general de la fórmula, determinemos el área comprendida entre Ox, la parábola de eje vertical que pasa por tres puntos dados: A_0, A_1, A_2 (fig. 27) y las ordenadas extremas. Supondremos que los puntos A_0, A_1, A_2 tienen abscisas equidistantes:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$$

y consideremos que el eje de las ordenadas pasa por el punto intermedio A_1.

La parábola de eje vertical tiene por ecuación

$$y = ax^2 + bx + c$$

y debiendo pasar por A_0, A_1, A_2 deberán ser satisfechas las relaciones:

$$\begin{cases} y_0 = a(-h)^3 + b(-h) + c. \\ y_1 = c. \\ y_2 = a(+h)^2 + b(+h) + c. \end{cases} \qquad [2]$$

El área buscada es:

$$\int_{-h}^{+h} (ax^2 + bx + c)\, dx = \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right]_{-h}^{+h} = \frac{2}{3}ah^3 + 2\,ch. \qquad [3]$$

Si formamos la expresión $\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2)$, obtenemos de acuerdo a las relaciones [2]:

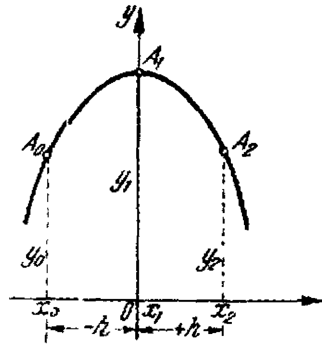


Fig. XI-27.

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2) =$$

$$= \frac{1}{3}h(ah^2 - bh + c + 4c + ah^2 + bh + c) =$$

$$= \frac{1}{3}h(2ah^2 + 6c) = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch,$$

que es el valor antes obtenido en [3]. Luego queda demostrada la relación exacta, en el caso que y sea una parábola vertical:

$$\int_{-h}^{+h} y\, dx = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2). \qquad [4]$$

Así como el conocimiento de las 2 ordenadas extremas era suficiente para hallar el área que limita el segmento de recta (caso del trapecio), el conocimiento de 3 ordenadas equidistantes es suficiente para determinar el área limitada por un arco de parábola cuadrática.

Para deducir la fórmula de Simpson consideremos ahora nuevamente la figura 26, suponiendo que n es par. Cada 3 puntos consecutivos queda determinada una parábola vertical que se aproxima a la curva $y = f(x)$ en el intervalo correspondiente. El área de la curva es *aproximadamente* igual al de la parábola y el de ésta está dado por la fórmula [4].

$$\text{Area del primer sector} = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

$$\text{Area del segundo sector} = \frac{1}{3}h(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

$$\text{Area del } \frac{1}{2}\, n\text{-simo sector} \approx \frac{1}{3} h (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Sumando todas estas igualdades resulta:

$$\text{Area} \sim \frac{1}{3} h (E + 4I + 2P).$$

donde E significa como antes la suma de las ordenadas extremas y_0 e y_n; I la suma de las ordenadas de índice impar $(y_1, y_3, \dots)$ y P la suma de las ordenadas de índice par $(y_2, y_4, \dots)$.

Para aplicar la fórmula de Simpson al caso de la integral

$$\int_2^{10} \ln x \, dx$$

podemos disponer el cálculo en la siguiente forma, utilizando una tabla de logaritmos naturales de 5 decimales:

x	E	I	P
2	0,69315		
3		1,09861	
4			1,38629
5		1,60944	
6			1,79176
7		1,94591	
8			2,07944
9		2,19722	
10	2,30259		
Sumas	2,99574	6,85118	5,25749
Coeficientes	× 1	× 4	× 2
	2,99574	27,40472	10,51498

Total 40,91544

$\times \frac{1}{3} h$ 13,6385

Por consiguiente es $\int_2^{10} \ln x \, dx \sim 13{,}6385.$

Error en la fórmula de Simpson: Se demuestra [1] que el error cometido en la determinación aproximada de una integral definida mediante la fórmula de Simpson es inferior a

---

[1] Ver por ejemplo, M. Sadosky, *Cálculo numérico y gráfico*, pág. 242.

$$\frac{h^4}{180}(b-a)\,M,$$

siendo $(b-a)$ la longitud del intervalo de integración y M una cota superior de la derivada cuarta $f^{\text{IV}}(x)$ en $(a,\ b)$.

En el ejemplo que hemos considerado, por ser $f(x) = \ln x$, resulta $f^{\text{IV}}(x) = \dfrac{6}{x^4}$, cuyo valor absoluto, es siempre inferior a $6 : 2^4 = 0{,}375$. Entonces designando con ε el error de la fórmula de Simpson, resulta:

$$\varepsilon < \frac{1}{180}(10-2)0{,}375 < 0{,}017.$$

En este caso es fácil verificar que la aproximación obtenida es mucho mayor porque la primitiva de $y = \ln x$ es $x(\ln x - 1)$ y se puede ver que el valor obtenido 13,6385 difiere del exacto 13,6395 en 0,001.

De acuerdo a la expresión del error resulta que todo polinomio de 2º o 3er. grado es integrable *exactamente* mediante la fórmula de Simpson.

EJERCICIOS:

Calcular con las fórmulas de los trapecios y de Simpson las integrales definidas

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

2. $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx.$

3. $\displaystyle\int_0^2 x^2\, dx.$

4. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{8+x}}$

5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$

6. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\, dx.$

7. $\displaystyle\int_1^8 \sqrt{60+x}\, dx.$

8. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$

y comparar con los resultados exactos obtenidos con la regla de Barrow.

Calcular el valor aproximado de las siguientes integrales definidas, aplicando la regla de Simpson:

9. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\, dx.$ R: 3,239.

10. $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx.$ R: 2,28.

11. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx.$ R: 1,85.

12. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx.$ R: 0,74682.

13. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx.$ R: 0,3103.

14. $\int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$ R: 0,2483.

(Los resultados obtenidos corresponden a 4 subdivisiones del intervalo de integración.)

9. AREA EN COORDENADAS PARAMETRICAS

Si una curva está dada en coordenadas paramétricas:

$$x = f(t), \qquad y = g(t),$$

puesto que es $dx = f'(t)\,dt$ resulta el área:

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_{t_0}^{t_1} g(t)\cdot f'(t)\,dt,$$

siendo t_0 y t_1 los valores del parámetro t que corresponden, respectivamente, a los valores a y b de la variable x.

EJEMPLOS:

1°) Calcular el área del círculo de radio r y centro en el origen.

Siendo las ecuaciones paramétricas de la circunferencia:

$$x = r \operatorname{sen} t, \qquad y = r \cos t;$$

para t variando de 0 a $\frac{1}{2}\pi$ se tendrá el cuarto de círculo OAB.

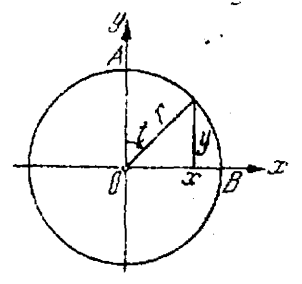


FIG. XI-28.

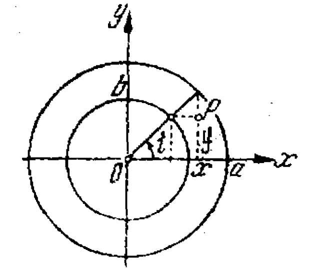


FIG. XI-29.

Llamando A al área buscada, será

$$\frac{1}{4}A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos t \cdot r\cos t\,dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}r^2\Big[\,t + \operatorname{sen} t\cdot\cos t\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\pi r^2.$$

con lo que resulta $A = \pi r^2$.

2°) Siendo las ecuaciones paramétricas de la elipse de semiejes a y b:

$$x = a \cos t, \qquad y = b \operatorname{sen} t,$$

resulta procediendo como en el ejemplo 1°:

$$\frac{1}{4}A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \operatorname{sen} t \cdot (-a \operatorname{sen} t)\, dt = -ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\, dt = -\frac{1}{4}\pi ab,$$

con lo que se obtiene: $A = -\pi ab$.
(El porqué del signo menos lo explicamos en la pág. 385).

EJERCICIOS:

1. Verificar que el área encerrada por un arco de la cicloide

$$\begin{cases} x = a\,(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{cases}$$

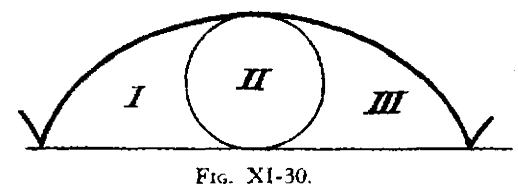


FIG. XI-30.

y el eje x es igual a $3\pi a^2$, es decir es el triple del área del círculo generador. Resulta entonces que las superficies I, II, III de la figura son iguales.

2. Verificar que el área encerrada por la cardioide

$$\begin{cases} x = a\,(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = a\,(2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t) \end{cases}$$

es $6\pi a^2$.

3. Determinar el área limitada por el eje x, la hipérbola

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a\,(e^t + e^{-t}) \\ y = \frac{1}{2}a\,(e^t - e^{-t}) \end{cases}$$

y la recta que pasa por el origen y corta a la curva en el punto (x_0, y_0).

R: $\frac{1}{2}a^2 \ln \left(\frac{x_0 + y_0}{a}\right)$.

4. Determinar el área limitada por la hipérbola

$$\begin{cases} x = 2 \sec t \\ y = 2 \operatorname{tg} t \end{cases}$$

y la recta $x = 4$.

R: $8\sqrt{3} - 4 \ln (2 + \sqrt{3})$.

5. Verificar que el área encerrada por la hipocicloide

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$$

es $\frac{5}{8}$ del área del círculo correspondiente.

6. Verificar que el área encerrada por la hipocicloide

$$\begin{cases} x = 2r\cos t + r\cos 2t \\ y = 2r\operatorname{sen} t - r\operatorname{sen} 2t \end{cases}$$

es igual a $2\pi r^2$.

7. Verificar que el área determinada por la parábola

$$\begin{cases} x = a\cos^4 t \\ y = a\operatorname{sen}^4 t \end{cases}$$

y los ejes coordenados es igual a $\frac{1}{6}a^2$.

(Compárese con el resultado obtenido en el ej. 8 del § 6, pág. 370).

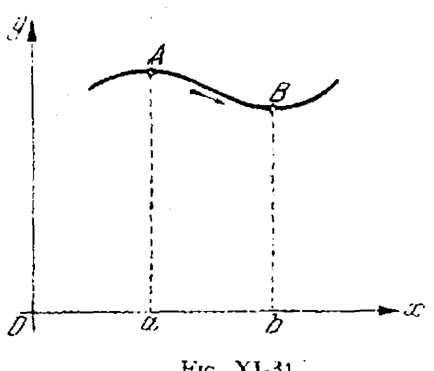


FIG. XI-31.

10. AREAS ORIENTADAS

I) Hemos visto cómo se pueden determinar las áreas limitadas por una curva correspondiente a una función $y = f(x)$ mediante la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx.$$

Cuando x varía de a hacia b el punto sobre la curva varía de A hacia B.

Podemos ampliar esta interpretación y considerar que el punto (x, y) varía sobre todo el contorno $aABb$. Sobre los segmentos aA y Bb los productos $y \cdot dx$ son nulos por ser en ellos $x =$ constante y sobre el segmento ba también el producto es nulo por ser $y = 0$. De modo que podemos decir que cuando el punto (x, y) describe un contorno $aABb$ la expresión $\int_a^b y\,dx$ proporciona el área encerrada por ese contorno cuando se lo recorre de acuerdo al *sentido* indicado por la flecha. Pero este sentido es, en el caso de la figura, *negativo*, pues en matemática se elige como *sentido positivo*, aquel que al recorrer su contorno deje el área a la izquierda.

En esta forma resulta que el área, con su signo está dado por

$$A = -\int_C y\,dx,$$

donde C indica el contorno de la figura recorrido en sentido positivo [1].

II) Consideremos ahora el caso de un recinto limitado por una curva cerrada que supondremos es cortada por cualquier paralela al eje de las x, o de las y, a lo sumo en 2 puntos.

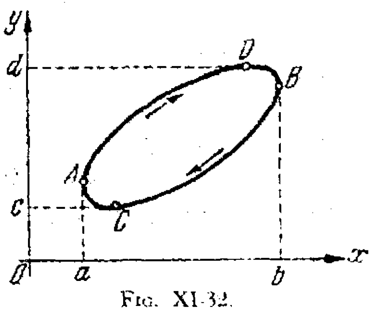


Fig. XI-32.

Habitualmente, si llamamos $y_2(x)$ a la función, definida en (a, b), que describe el arco ADB, e $y_1(x)$ a la función del mismo intervalo que describe el arco ACB, se calcula el área encerrada por la curva mediante una diferencia de integrales definidas:

$$A = \int_a^b y_2(x)\,dx - \int_a^b y_1(x)\,dx = \int_a^b y_2(x)\,dx + \int_b^a y_1(x)\,dx,$$

donde se ha cambiado el signo de la segunda integral por haber invertido el orden de los extremos a y b del intervalo de integración.

Aquí también se puede escribir

$$A = -\int_C y\,dx,$$

donde los valores x e y corresponden a las coordenadas de los puntos de la curva C. El signo menos se debe a que el sentido que aparece en la figura es el negativo. (En efecto, un observador que recorriera el contorno C vería el recinto a la derecha.)

III) En el caso de una curva de ecuación $x = x(y)$, el área limitada por el eje de las y, las rectas $y = c$, $y = d$ y la curva, es, como ya vimos,

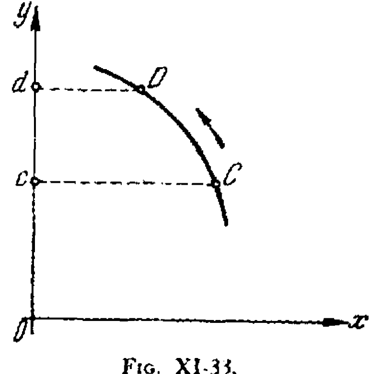


Fig. XI-33.

$$A = \int_c^d x(y)\,dy,$$

que también se puede escribir

$$A = \int_C x\,dy,$$

siendo (x, y) un punto cualquiera del contorno $cCDd$ que limita el recinto.

(1) Escrita en esta forma, el área resulta expresada por una "integral curvilínea", tema que desarrollaremos ampliamente en el volumen II. En este párrafo sólo hemos querido tratar un caso particular que permite estudiar las áreas de las superficies con su signo.

En este caso el signo es positivo pues la figura muestra que cuando la variable y va de c a d, el punto sobre la curva va de C a D de modo tal que un observador que recorriera el contorno de acuerdo a este sentido vería el área a su *izquierda*.

Para un caso como el de la figura también resultaría, razonando como antes:

$$A = \int_c x\,dy.$$

De las 2 expresiones para el área

$$A = -\int_c y\,dx = +\int_c x\,dy,$$

resulta la relación general

$$A = \frac{1}{2}\int_c x\,dy - y\,dx.$$

EJEMPLO:

Calcular el área de una elipse de semiejes a y b dada en coordenadas paramétricas por las relaciones:

$$x = a\cos t, \qquad y = b\,\mathrm{sen}\, t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Como es $dx = -a\,\mathrm{sen}\, t\; dt$, $dy = b\cos t\; dt$, resulta

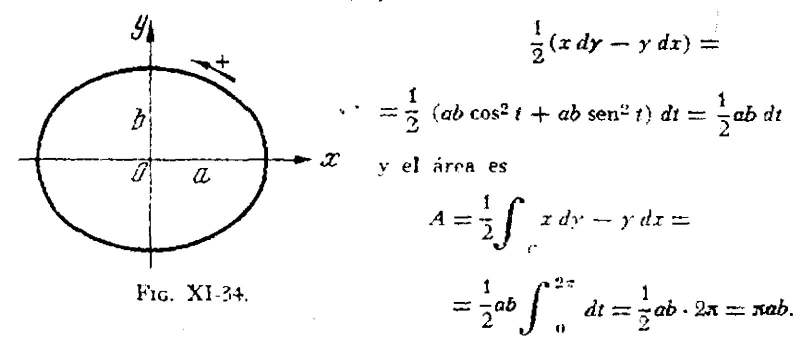


FIG. XI-34.

$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(ab\cos^2 t + ab\,\mathrm{sen}^2 t)\,dt = \frac{1}{2}ab\,dt$$

y el área es

$$A = \frac{1}{2}\int_c x\,dy - y\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}ab\cdot 2\pi = \pi ab.$$

Obsérvese que cuando t varía de 0 a 2π, el punto recorre el contorno en sentido positivo. En cambio, de haber partido de las relaciones

$$x = a\,\mathrm{sen}\, t, \qquad y = b\cos t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

que también describen la misma elipse pero en sentido negativo, hubiera resultado

$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}(-ab\,\mathrm{sen}^2 t - ab\cos^2 t)\,dt = -\frac{1}{2}ab\,dt$$

y el área, con su signo, habría sido $A = -\pi ab$.

11. AREA EN COORDENADAS POLARES

Consideremos una curva dada en coordenadas polares mediante la función $\varrho = \varrho(\vartheta)$. Definiremos el área de la superficie comprendida entre esta curva y los rayos OA y OB correspondientes a los argumentos $\vartheta = \alpha$ y $\vartheta = \beta$.

Para ello dividimos el ángulo BOA en n partes $\Delta\vartheta_1$, $\Delta\vartheta_2$, ..., $\Delta\vartheta_i$, ... $\Delta\vartheta_n$, iguales o desiguales. Al ángulo $\Delta\vartheta_i$ le corresponde el arco MN y llamaremos $\varrho_i = OP_i$ al radio vector correspondiente a un argumento cualquiera interior a $\Delta\vartheta_i$. Con centro O y radio $OP_i = \varrho_i$, trazamos el arco de circunferencia RS. El área del *sector circular* ORS es, como se sabe por geometría elemental: $\frac{1}{2}\varrho_i^2\,\Delta\vartheta_i$.

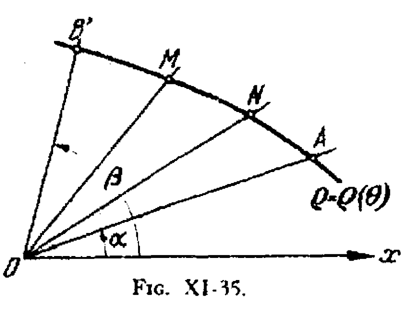


Fig. XI-35.

Efectuamos la misma operación en cada uno de los n sectores análogos al OMN y formamos la suma finita de las áreas de los sectores circulares correspondientes:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\varrho_i^2\,\Delta\vartheta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varrho_i^2\,\Delta\vartheta_i.$$

Fig. XI-36.

Calculamos el límite de esta expresión cuando $n \to \infty$ (y cada uno de los $\Delta\vartheta_i$ tiende a cero). Si este límite existe y es finito es por definición el área A del sector OAB:

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varrho_i^2\,\Delta\vartheta_i.$$

Ahora bien, de acuerdo a la definición de integral definida, el límite de esta sumatoria es la integral definida

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\varrho^2\,d\vartheta.$$

Ejemplos:

1°) Hallar el área de la superficie correspondiente a $\varrho = \operatorname{sen}\vartheta$ cuando ϑ varía entre 0 y π.

Resulta

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\varrho^2\,d\vartheta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{4}\Big[\vartheta-\operatorname{sen}\vartheta\cdot\cos\vartheta\Big]_0^{\pi}=\frac{1}{4}\pi.$$

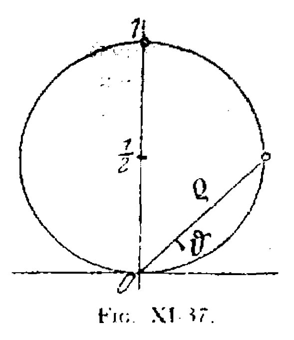
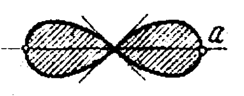


Fig. XI-37.

(Es fácil verificar este resultado por cuanto la curva es una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$, como se ve escribiendo la ecuación $\varrho=\operatorname{sen}\vartheta=\frac{y}{\varrho}$, en la forma $\varrho^2-y=0$ o sea $x^2+y^2-y=0$).



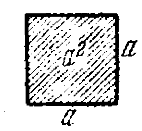


Fig. XI-38.

2º) Calcular el área encerrada por la lemniscata de Bernoulli: $\varrho^2=a^2\cos 2\vartheta$. Por razones de simetría se ve que el área buscada es 4 veces el área comprendida entre 0 y $\frac{1}{4}\pi$.

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\varrho^2\,d\vartheta=2a^2\int_0^{\frac{1}{4}\pi}\cos 2\vartheta\,d\vartheta=a^2\Big[\operatorname{sen}2\vartheta\Big]_0^{\frac{1}{4}\pi}=a^2.$$

3º) Calcular el área encerrado por $\varrho=a\operatorname{sen}n\vartheta$.

La aplicación directa de la fórmula daría

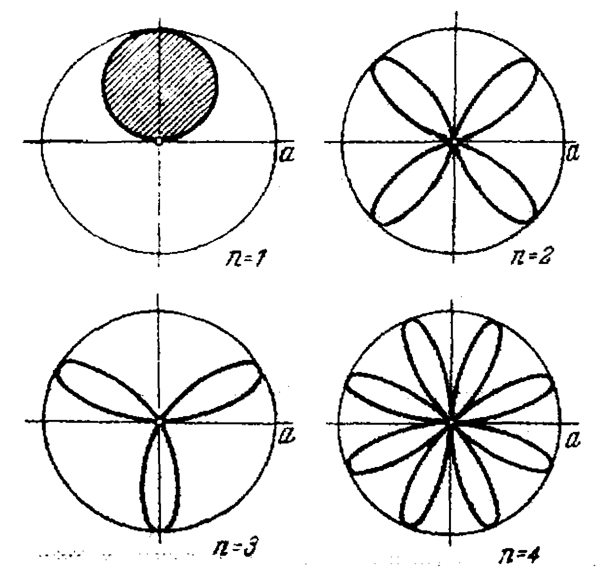


Fig. XI-39: $\varrho=a\operatorname{sen}n\vartheta$.

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varrho^2\,d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 n\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{a^2}{n}\Big[n\vartheta-\frac{\operatorname{sen}2n\vartheta}{2}\Big]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2.$$

pero habrá que observar que para n *impar* al variar ϑ de 0 a 2π se recorre 2 veces la misma curva. En consecuencia resulta

$A = \frac{1}{2}\pi a^2$ si n es *par*; $\qquad A = \frac{1}{4}\pi a^2$ si n es *impar*.

NOTA: Estas curvas llamadas folios de n hojas aparecen en la teoria de las antenas y será conveniente que el lector las bosqueje para los valores $n = 1, 2, 3, 4$, tal como aparecen en la figura 39 señalando el sentido del recorrido del arco al crecer ϑ.

RELACIONES ENTRE LAS EXPRESIONES DE LAS ÁREAS EN COORDENADAS POLARES Y PARAMÉTRICAS: La ecuación de una curva en coordenadas polares es $\varrho = \varrho(\vartheta)$, donde ϑ es el argumento y ϱ el radio vector.

Como es

$$x = \varrho \cos \vartheta, \qquad y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta. \qquad [1]$$

resultan x e y funciones de un parámetro ϑ, pues para cada valor de este parámetro se obtiene un valor de x y un valor de y correspondiente a la curva.

Diferenciando las relaciones [1] se obtiene

$$dx = d\varrho \cdot \cos \vartheta - \varrho \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta.$$

$$dy = d\varrho \cdot \operatorname{sen} \vartheta + \varrho \cos \vartheta \, d\vartheta,$$

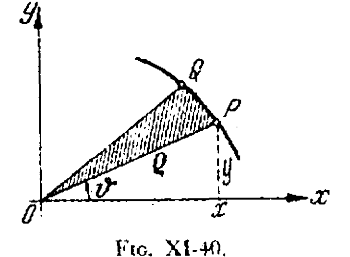


FIG. XI-40.

con lo cual resulta

$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}(\varrho\,d\varrho \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta + \varrho^2 \cos^2\vartheta \, d\vartheta -$$

$$- \varrho\,d\varrho \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta + \varrho^2 \operatorname{sen}^2\vartheta \, d\vartheta) = \frac{1}{2}\varrho^2 \, d\vartheta,$$

que es precisamente el elemento de área en coordenadas polares.

EJERCICIOS:

1. Calcular el área encerrada por los radios $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ y cada una de las siguientes curvas:

a) $\varrho = \vartheta$. R: $\frac{1}{48}\pi^3$.

b) $\varrho = \vartheta^2$. R: $\frac{1}{320}\pi^5$.

c) $\varrho = \sqrt{\vartheta}$. R: $\frac{1}{16}\pi^2$.

2. **Demostrar que el área A limitada por dos radios cualesquiera de la espiral hiperbólica**

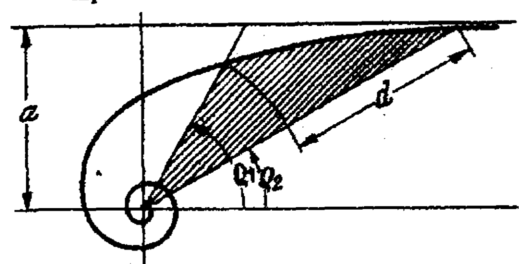


FIG. XI-41.

$$\varrho\vartheta = a.$$

es proporcional a la diferencia d entre las longitudes de dichos radios

R: $A = \frac{1}{2}ad.$

3. Calcular el área encerrada por cada una de las siguientes curvas:

a) $\varrho = \text{sen}^2\, 2\vartheta.$

(Obsérvese que es 4 veces el área comprendida entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$). R: $\frac{3}{8}\pi.$

b) $\varrho = 1 + \text{sen}\, 2\vartheta.$

(Obsérvese que es el doble del área comprendida entre $-\frac{1}{4}\pi$ y $+\frac{3}{4}\pi$).

R: $\frac{3}{2}\pi.$

c) $\varrho = 2\cos\vartheta + 3\,\text{sen}\,\vartheta.$

(Nótese que la integral debe hacerse entre 0 y π pues para los valores entre π y 2π vuelve a reproducirse la curva. Adviértase, para la verificación que se trata de una circunferencia de centro en $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ y radio $\sqrt{13} : 2$, haciendo el pasaje a coordenadas cartesianas).

R: $\frac{13}{4}\pi.$

d) $\varrho = \text{sen}\, 3\vartheta - \text{sen}\,\vartheta.$

(Intégrese entre 0 y π).

R: $\frac{1}{2}\pi.$

4. Hallar el área limitada por el eje polar y la segunda y la tercera vuelta de la espiral

$$\varrho = 2\vartheta.$$

R: $\frac{1}{3}304\,\pi^3.$

5. Verificar que el área A limitada por la espiral

$$\varrho = a\,e^{k\vartheta}$$

y dos radios cualesquiera es proporcional a la diferencia de los cuadrados de estos radios.

6. Determinar el área limitada por la curva

$$\varrho = \operatorname{tg} \vartheta$$

y los radios correspondientes a los argumentos $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$.

R: $\frac{1}{8}(4 - \pi)$.

7. Determinar el área limitada por la curva

$$\varrho = a \operatorname{sen} \vartheta + b \cos \vartheta$$

y los radios correspondientes a los argumentos $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

R: $\frac{1}{8}\pi(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}ab$.

8. Determinar el área encerrada por un folio de la curva

$$\varrho^2 = 4 \operatorname{sen} 4\vartheta.$$

R: 1.

9. Determinar el area del folio interior de la trisectriz

$$\varrho = 2(1 - 2 \cos \vartheta).$$

R: $2(2\pi - 3\sqrt{3})$.

10. Trazar la curva

$$\varrho = 3 + 2 \cos \vartheta$$

y hallar su área.

R: 11π.

11. Considérense las funciones

$$\varrho = \cos \vartheta; \qquad \varrho = \cos 2\vartheta$$

para ϑ variando entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$. Calcúlese el área del primer cuadrante comprendido entre estas curvas y las semirrectas $\vartheta = 0$, $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$.

R: $\frac{1}{8}$.

12. Verificar que el área encerrada por la cardioide

$$\varrho = 2a(1 + \cos \vartheta)$$

es igual a $6\pi a^2$.

13. Calcular el área de la curva

$$\varrho = 2a(1 + \cos \vartheta)$$

que está fuera de la parábola

$$\varrho = \frac{2a}{1 + \cos \vartheta}.$$

R: $3\pi a^2 + \frac{16}{3}a^2$.

14. Calcular el área común a los siguientes pares de curvas:

a) $\varrho = 3\cos\vartheta$; $\quad\varrho = 1 + \cos\vartheta$. $\quad$ R: $\frac{5}{4}\pi$.

b) $\varrho = 1 - \operatorname{sen}\vartheta$; $\quad\varrho = \cos\vartheta$. $\quad$ R: $\frac{1}{2}\pi - 1$.

c) $\varrho^2 = \cos 2\vartheta$; $\quad\varrho^2 = \operatorname{sen} 2\vartheta$. $\quad$ R: $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

15. Hallar el área encerrada por la curva

$$\varrho = 4\cos 2\vartheta.$$

Trácese la gráfica.

R: 8π.

16. Determinar el área encerrada por la curva

$$\varrho^2 = 9\cos 2\vartheta.$$

R: 9.

17. Determinar el área encerrada por la curva

$$\varrho = 2(1 - \operatorname{sen}\vartheta).$$

R: 6π.

18. Determinar el área limitada por el círculo

$$\varrho = 2\operatorname{sen}\vartheta$$

y las rectas $\vartheta = 30^\circ$ y $\vartheta = 60^\circ$.

R: $\frac{1}{6}\pi$.

19. Calcular el área encerrada por la curva

$$\varrho = a(\operatorname{sen} 2\vartheta + \cos 2\vartheta).$$

R: πa^2.

20. Hallar el área limitada por la parábola

$$\varrho(1 + \cos\vartheta) = 2$$

y las rectas $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{3}\pi$.

R: $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

21. Calcular el área limitada por la curva del ejercicio anterior y las rectas $\vartheta = 0$, $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

R: $\frac{4}{3}$.

22. Determinar el área limitada por la hipérbola

$$\varrho^2 \cos 2\vartheta = 4$$

y las rectas $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{6}\pi$.

R: $\ln(2 + \sqrt{3})$.

23. Determinar el área encerrada por las curvas

$$\varrho = \frac{4}{1 - \cos\vartheta}; \qquad \varrho = \frac{4}{1 + \cos\vartheta}.$$

R: $21\frac{1}{3}$.

24. Determinar el área común a los dos círculos

$$\varrho = a \operatorname{sen} \vartheta,$$
$$\varrho = a \cos \vartheta.$$

R: $\frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right)$

25. Verificar que el área limitada por la parábola

$$\varrho = \frac{a}{\cos^2 \frac{1}{2}\vartheta}$$

y los radios $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ es igual a $\frac{2}{3}$ del área del rectángulo de base a y altura $2a$. Efectúese la representación gráfica.

12. INTEGRALES GENERALIZADAS

En la definición de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ hemos supuesto que los límites a y b eran finitos y que la función $f(x)$ era *acotada* (y prácticamente en la totalidad de los casos tratados era además continua).

Generalizaremos en dos formas este concepto de integral definida para el caso de un intervalo infinito y de una función no acotada introduciendo las siguientes definiciones:

I) Definiremos como $\int_a^\infty f(x)\,dx$ a la expresión

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

cuando este límite existe y es finito. En este caso se dice también que la integral es *convergente*. Si el límite es infinito se dice que la integral es *divergente* y si el límite es oscilante, la integral es *oscilante*.

Ejemplos:

1º) $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^t = \lim_{t\to\infty}(e^0 - e^{-t}) =$

$= \lim_{t\to\infty}(1 - e^{-t}) = 1 - \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 1 - 0 = 1.$

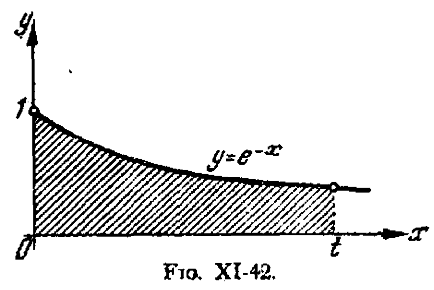


Fig. XI-42.

Gráficamente la integral calculada puede interpretarse como el área limitada por la función e^{-x} y el semieje positivo de las abscisas.

2º) $\int_0^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x\,dx$. Siendo una primitiva de $e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x$, la función $-\frac{1}{2}e^{-x}(\mathrm{sen}\,x + \cos x)$ es

$$\int_0^t e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \frac{1}{2}\Big[\,1 - e^{-t}(\mathrm{sen}\,t + \cos t)\,\Big]$$

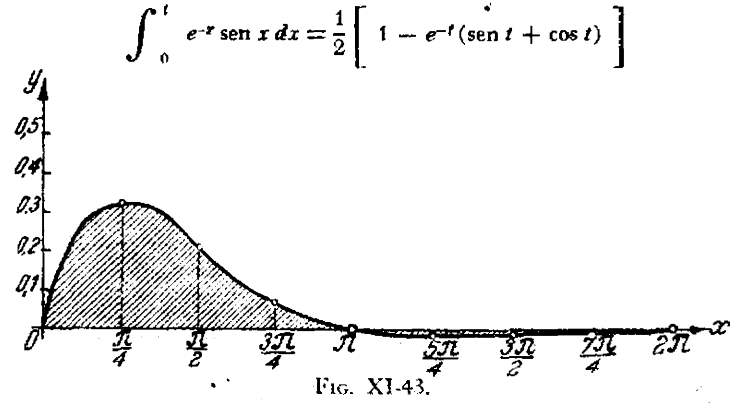


Fig. XI-43.

y el límite de esta expresión cuando $t \to \infty$ es $\frac{1}{2}$. La integral es *convergente.*

3º) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty}\Big[\ln x\Big]_1^t = \lim\,(\ln t) = \infty.$

La integral es *divergente.*

4º) $\int_0^{\infty} \mathrm{sen}\,x\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[-\cos x\Big]_0^t = \lim_{t\to\infty}(1 - \cos t)$

y este límite oscila entre 0 y 2. La integral es *oscilante.*

5º) Determinar para qué valores positivos de α está definida la expresión

$$I(\alpha) = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

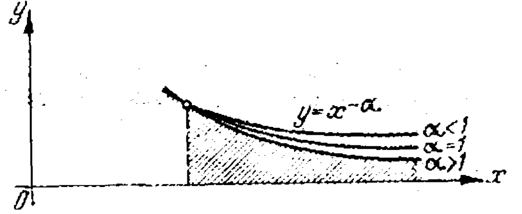


Fig. XI-44.

Puesto que es

$$\int_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - 1\right),$$

la integral estará definida siempre que el límite de esta expresión para $t \to \infty$ exista y sea finito, advirtiendo desde ya que la fórmula es válida si es $\alpha \neq 1$.

Para $\alpha > 1$, $\frac{1}{t^{\alpha-1}}$ cuando $t \to \infty$, tiende a 0 y resulta entonces $I(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Para $\alpha < 1$, $\frac{1}{t^{\alpha-1}} = t^{1-\alpha}$ tiende a ∞ cuando $t \to \infty$. Para $\alpha = 1$, resulta una integral divergente de acuerdo a lo visto en el ejemplo 3°.

En definitiva $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ solo converge si es $\alpha > 1$.

NOTA: Obsérvese que cualquiera sea el valor de $\alpha > 1$, el área rayada en la figura resulta finita. Así resulta

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1,001}}$$

convergente, mientras que es divergente

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}.$$

6°) Calcular

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Si bien hemos definido hasta ahora $\int_a^\infty f(x)\,dx$, se entiende que también se podrá definir $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ calculando el límite de $\int_{-t}^a f(x)\,dx$ cuando $t \to \infty$.

En este caso procederemos así:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\operatorname{arc\,tg}(-t)\right] + \lim_{t\to\infty}\left[\operatorname{arc\,tg} t\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi = \pi.$$

FIG. XI-45.

II) Si $f(x)$ es una función que tiene discontinuidad infinita en uno de los extremos del intervalo de integración, se adoptan las siguientes definiciones:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

cuando la discontinuidad se presenta en $x = b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

cuando la discontinuidad se presenta en $x = a$.

Si la discontinuidad se presenta en un punto c interior del intervalo de integración adoptaremos la siguiente definición:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx.$$

En particular si se elige $\varepsilon = \varepsilon'$, el límite que así resulta se llama *valor principal.*

EJERCICIOS:

Verificar las siguientes integrales definidas:

1. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{8}.$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(1-x)^2} = 1.$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = 1.$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1-x}$ (divergente).

5. Idem que $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,dx$ es oscilante.

Verificar las siguientes integrales definidas:

6. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2} = \frac{1}{2}.$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi.$

8. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{(1+x^2)^4} = \frac{1}{48}.$

9. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx = \frac{a}{a^2+b^2}.$

10. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx = \frac{a}{a^2+b^2}.$

11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\pi.$

12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\,\frac{1}{2}\pi.$

13. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x)} = \ln 2.$

14. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \pi.$

15. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sec t - \operatorname{tg} t)\,dt = \ln 2.$

16. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \cos\left(\frac{1}{4}\pi + x\right)dx = 0.$

17. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{a^2e^x + b^2e^{-x}} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}.$

Dadas las siguientes integrales definidas, indicar su valor cuando convergen o, en caso contrario su divergencia:

18. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. R: Diverge.

19. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. R: 2.

20. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{6-x}}$. R: 4.

21. $\int_2^6 \frac{dx}{(6-x)^{\frac{3}{2}}}$. R: Diverge.

22. $\int_5^6 \frac{dx}{x-5}$. R: Diverge.

23. $\int_5^6 \frac{dx}{(x-5)^{\frac{2}{3}}}$. R: 3.

Verificar las siguientes integrales definidas:

24. $\int_{-1}^8 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{9}{2}$.

25. $\int_0^{33} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{4}{5}}} = 15$.

26. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$.

27. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^2} = \pi$.

28. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx = \frac{1}{2}$.

29. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi$.

(Hágase $x = t^2$).

30. $\int_0^2 \frac{2\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \pi$.

31. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x}} = \frac{10}{3}$.

(Téngase en cuenta la discontinuidad de la función en $x = 2$)

32. $\int_2^4 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4}} = 4\sqrt{3} + 2\ln(2+\sqrt{3}) \sim 9{,}56$.

33. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ si $a > b$.

34. $\int_0^1 \ln x\,dx = -1$.

35. Verificar que es

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi.$$

(Aplíquese la definición II en los 2 extremos. Utilícese la sustitución $x = \operatorname{sen}^2 t$).

36. Calcular el valor principal de $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$.

R: 0.

37. Verificar que es $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

(Aplíquese la definición II).

38. Verificar que es convergente $I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Solución: La función $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ es, en el intervalo $(1, t)$, menor que $\frac{1}{x^2}$ y de acuerdo al concepto de integrales definidas la desigualdad se conserva al hacer las integraciones. Por consiguiente, pasando al límite resulta

$$I < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

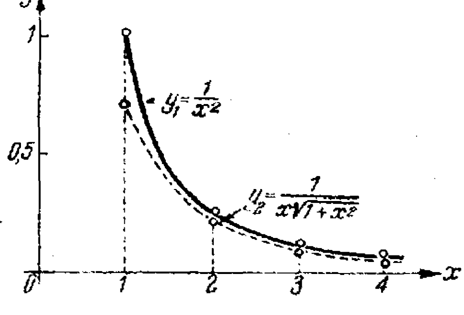


Fig. XI-46.

39. Verificar que es convergente

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\, dx.$$

40. Determinar el área limitada por la curva

$$y^4(1-x) = 1,$$

los ejes coordenados y la asíntota vertical $x = 1$.

R: $\frac{4}{3}$.

41. Calcular el área del bucle del folio de Descartes dado en forma paramétrica por las expresiones

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

(Nótese que los extremos del intervalo de integración correspondientes al bucle son $t = 0$ y $t = \infty$).

R: $\frac{3}{2}a^2$.

42. Calcular $I = \int_0^{\pi} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx.$

Solución: La observación de la figura muestra que por razones de simetría es

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx. \qquad [1]$$

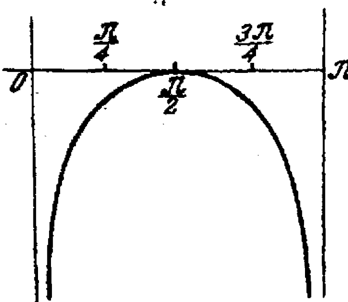


FIG. XI-47.

Como es $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}x \cdot \cos\frac{1}{2}x$, resulta

$$\ln(\operatorname{sen} x) = \ln 2 + \ln\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\right) + \ln\left(\cos\frac{1}{2}x\right)$$

y también se tiene integrando esta relación entre 0 y π:

$$I = \int_0^{\pi} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx = \pi \ln 2 + \int_0^{\pi} \ln\left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\right) dx + \int_0^{\pi} \ln\left(\cos\frac{1}{2}x\right) dx.$$

Cambiando en estas últimas integrales $\frac{1}{2}x$ por x resulta

$$I = \pi \ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx.$$

Siendo iguales las 2 integrales, se tiene:

$$I = \pi \ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx. \qquad [2]$$

Comparando [1] con [2] resulta

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx = \pi \ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$$

o sea

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx = -\frac{1}{2}\pi \ln 2; \qquad I = \int_0^{\pi} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx = -\pi \ln 2.$$

13. CALCULO DE ALGUNAS INTEGRALES DEFINIDAS

Con vistas a deducir en el parágrafo siguiente una notable fórmula de Wallis que permite expresar π como límite de un producto, calcularemos las integrales definidas

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x\, dx. \qquad [1]$$

Para hallar la integral indefinida correspondiente escribimos la cantidad subintegral en la forma:

$$\operatorname{sen}^m x\, dx = \operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \operatorname{sen} x\, dx = -\operatorname{sen}^{m-1} x\, d(\cos x)$$

e integrando por partes resulta:

$$I_m = -\Big[\operatorname{sen}^{m-1} x \cdot \cos x\Big]_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{m-2} x \cdot \cos^2 x\, dx.$$

Reemplazando $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$ y teniendo en cuenta que la expresión entre corchetes se anula, resulta:

$$I_m = (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m$$

o sea

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

De acuerdo a esta ley de recurrencia todas estas integrales se llevarán a una de las 2 siguientes

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = 1, \qquad \int_0^{\pi/2} dx = \frac{1}{2}\pi.$$

según que sea *m impar* o *m par*.

En el primer caso, si el exponente es impar, escribiendo $m = 2p + 1$, resulta:

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 =$$
$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)} \; \frac{1}{2p+1}.$$

En el segundo caso con $m = 2p$ resulta:

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdot \frac{2p-5}{2p-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi =$$
$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p} \cdot \frac{1}{2}\pi.$$

Si en [1] reemplazamos x por $\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ obtenemos la fórmula correspondiente para $\cos x$.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x\, dx = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p} \; \dfrac{1}{2}\pi \text{ si es } m = 2p. \\[2ex] \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)} \cdot \dfrac{1}{2p+1} \text{ si es } m = 2p + 1. \end{cases}$$

Esta fórmula permite calcular las integrales

$$I_1 = \int_0^1 (1 - x^2)^m dx \qquad \text{e} \qquad I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^m}$$

que luego utilizaremos.

Haciendo en la primera $x = \text{sen}\, t$ resulta

$$I_1 = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m - 1)} \frac{1}{2m + 1}. \qquad [2]$$

Haciendo $x = \text{tg}\, t$ en la segunda es

$$I_2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2p - 2)} \frac{1}{2} \pi. \qquad [3]$$

Fórmula de Wallis: Consideremos la función $y = \text{sen}\, x$ en el intervalo abierto $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ en donde toma todos los valores comprendidos entre 0 y 1. Como se trata de una función positiva y creciente en este intervalo, se verificará que

$$\text{sen}^{2p-1} x > \text{sen}^{2p} x > \text{sen}^{2p+1}$$

e integrando entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$, de acuerdo a la notación anterior será

$$I_{2p-1} > I_{2p} > I_{2p+1}.$$

Reemplazando los valores de estas integrales halladas anteriormente se tiene:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2p - 2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 3)} \cdot \frac{1}{2p - 1} >$$

$$> \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p} \frac{1}{2}\pi >$$

$$> \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 1)} \frac{1}{2p + 1}.$$

Dejando en el término central solo $\frac{1}{2}\pi$ resulta:

$$\frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2p - 2)2p]^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 1)]^2 2p} > \frac{1}{2}\pi >$$

$$\frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p]^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p - 1)]^2} \cdot \frac{1}{2p + 1}$$

y en consecuencia debe ser

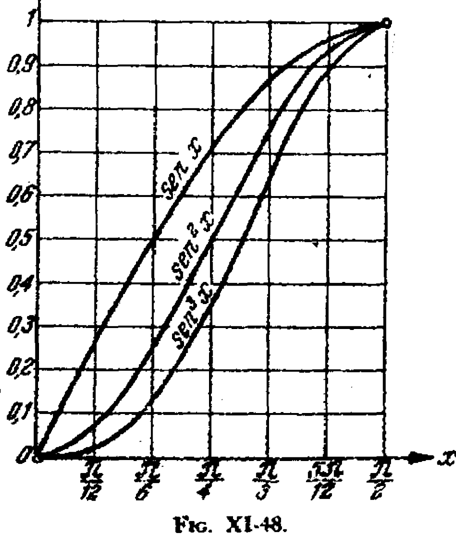


Fig. XI-48.

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx.$$

La fórmula de integración por partes aplicada a esta función permite escribir

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx = \left[\frac{(1-x)^{n-1}x^m}{m}\right]_0^1$$
$$+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx = \frac{n-1}{m}B(m+1, n-1).$$

Reiterando la aplicación de esta fórmula $(n-1)$ veces se tendrá:

$$B(m, n) = \frac{n-1}{m}B(m+1, n-1) = \frac{n-1}{m}\cdot\frac{n-2}{m+1}B(m+2, n-2) =$$
$$= \frac{n-1}{m}\cdot\frac{n-2}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+2}B(m+3, n-3) = \ldots =$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1}{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}B(m+n-1, 1).$$

Pero es

$$B(m+n-1, 1) = \int_0^1 x^{m+n-2}dx = \left[\frac{x^{m+n-1}}{m+n-1}\right]_0^1 = \frac{1}{m+n-1}$$

Luego resulta

$$B(m, n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1}{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)}\cdot\frac{1}{m+n-1} =$$
$$= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

y con la notación de la función gamma se tiene

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Si bien esta fórmula la hemos demostrado para el caso de valores enteros de m y n, se puede demostrar que conserva su validez para cualquier par de valores p y q *positivos:*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Admitida esta fórmula resulta para $p = q = \frac{1}{2}$

$$B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \pi = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = [\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2$$

con lo que volvemos a encontrar la célebre fórmula $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

CAPÍTULO XII

APLICACIONES GEOMETRICAS

1. RECTIFICACION DE CURVAS

Consideremos una función continua $y = f(x)$ definida en un intervalo (a, b) y sea la curva AB su representación gráfica en un diagrama cartesiano.

¿Qué debe entenderse por la longitud del arco AB?

En los estudios elementales se consideran las longitudes de las líneas poligonales como suma de longitudes de segmentos de rectas y el caso especial de la circunferencia que se define como límite común de los perímetros de los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos.

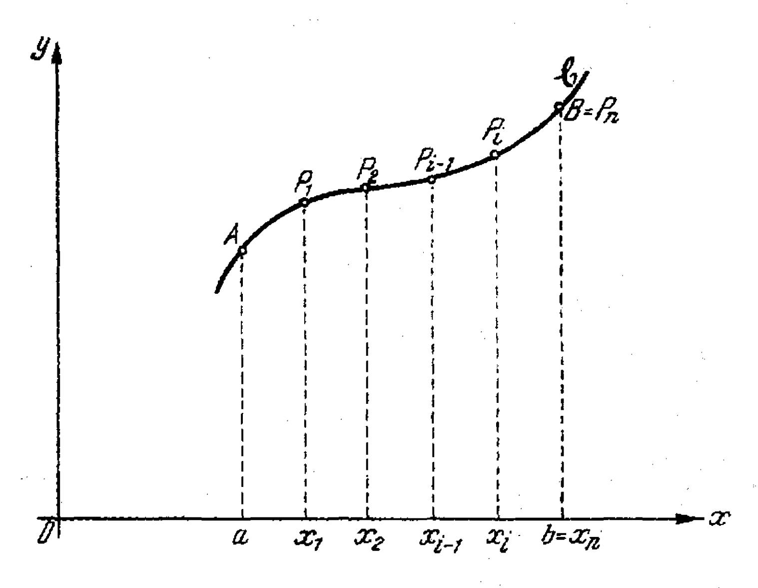


FIG. XII-1.

Procediendo en forma análoga a la que nos condujo a la definición de *área*, efectuaremos los siguientes pasos:

1º) Dividimos el intervalo (a, b) en n partes iguales o desiguales y señalamos sobre la curva los puntos $P_0 = A$, P_1, P_2, ..., P_i, ..., $P_n = B$, correspondientes a las abscisas $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., x_i, ..., $x_n = b$, respectivamente.

Los puntos P_i determinan una *poligonal* $P_0P_1P_2 \dots P_n$, cuya longitud se puede calcular por tratarse de una suma finita de segmentos rectilíneos $\overline{P_{i-1}P_i}$:

$$\text{long. poligonal} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}.$$

2º) Calculamos el límite de esta suma cuando el número de sumandos tiende a infinito (y cada uno de ellos tiende a cero) y si este límite *existe* y es finito, es por *definición*, la *longitud s del arco AB*:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i}.$$

Demostraremos ahora que existirá este límite si la función $f(x)$ además de ser continua tiene derivada continua en (a, b). En tal caso se dice que la curva es *rectificable*.

En efecto: de la figura resulta, en base al teorema de Pitágoras:

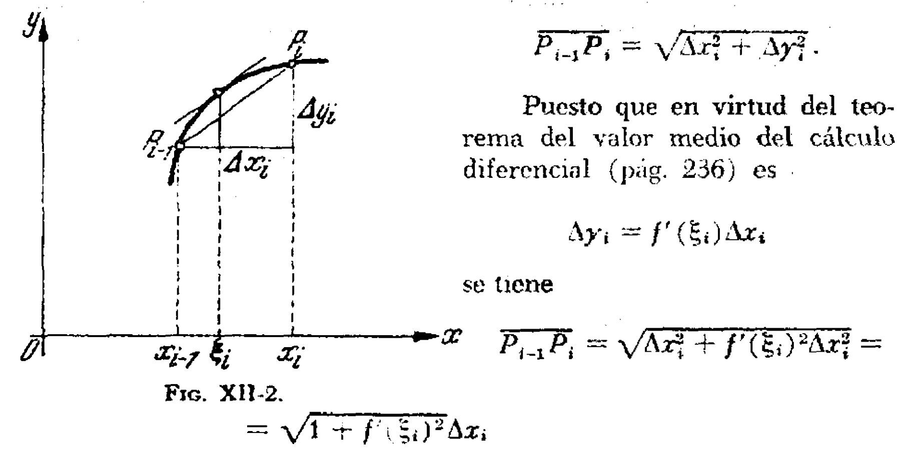


FIG. XII-2.

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}.$$

Puesto que en virtud del teorema del valor medio del cálculo diferencial (pág. 236) es

$$\Delta y_i = f'(\xi_i)\Delta x_i$$

se tiene

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{\Delta x_i^2 + f'(\xi_i)^2\Delta x_i^2} =$$

$$= \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i$$

y de acuerdo a la definición, la longitud de un arco de curva se expresa mediante un límite que es una integral definida:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Si la función $f'(x)$ es continua, esta integral existe y con ello está asegurada la existencia de la longitud del arco.

EJEMPLOS:

1º) Calcular la longitud del segmento de recta $y = x$ en el intervalo $x = 0$; $x = 1$.

Por ser $f'(x) = 1$ se tiene el resultado evidente

$$s = \int_0^1 \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}.$$

2°) Calcular la longitud de la parábola semicúbica $y = x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo (0, 1).

Por ser $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ resulta

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \sim 1{,}437.$$

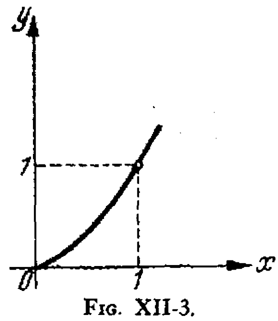


FIG. XII-3.

3°) Calcular la longitud de la catenaria

$$y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \text{ en el intervalo } (0, a).$$

Teniendo en cuenta que la función dada puede escribirse $y = a\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}$ resulta, por ser $f'(x) = \mathrm{Sh}\,\frac{x}{a}$:

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2\frac{x}{a}}\, dx = \int_0^a \mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}\, dx = a\left[\mathrm{Sh}\,\frac{x}{a}\right]_0^a = a(\mathrm{Sh}\ 1 - \mathrm{Sh}\ 0) = 1{,}175\, a.$$

NOTA: En la gran mayoría de los casos no se puede encontrar una expresión "cerrada", esto es, una combinación de un número finito de funciones elementales que expresen la longitud $s(x)$ de un arco. Pero sea creando nuevas funciones como veremos al estudiar las integrales elípticas, sea aplicando métodos aproximados, se puede evaluar el arco entre límites determinados.

EJERCICIOS:

1. Calcular la longitud del arco de parábola

$$y = 2x^2 + 5x$$

que está por debajo del eje x.

R: 6,95.

2. Calcular la longitud del arco de la parábola

$$ay = x^2$$

desde el origen hasta el punto $x = a$.

R: 2,957.

3. Calcular la longitud del arco de la curva

$$y = \ln(1 - x^2)$$

desde $x = 0$ hasta $x = a$, con $|a| < 1$.

Efectuar la representación gráfica en el intervalo $(-1, +1)$.

R: $\ln(1 + a) - \ln(1 - a) - a$.

4. Calcular la longitud total de la hipocicloide de 4 puntas (astroide):

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

(Obsérvese que $y' = -y^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{1}{3}}$ como resulta derivando la función implícita. Entonces es

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p]^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)]^2} \, \frac{1}{2p+\vartheta}$$

siendo ϑ un número comprendido entre 0 y 1.

Si se hace tender p a infinito y se sustituye $2p+\vartheta$ por $2p$ (dado que su cociente tiende a 1: infinitésimos equivalentes cuando $p \to \infty$) se llega a la fórmula de Wallis (I):

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{p\to\infty} \frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p]^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)]^2} \cdot \frac{1}{2p}.$$

Observando que es $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2p = 2^p(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p) = 2^p \cdot p!$ y que es

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (2p-1)2p}{2 \cdot 4 \ldots 2p} = \frac{(2p)!}{2^p \cdot p!},$$

también la fórmula de Wallis se puede escribir en la forma (II):

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{p\to\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{[(2p)!]^2 2p}.$$

INTEGRAL DE POISSON: Es de fundamental importancia la integral de Poisson

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx. \qquad [1]$$

Si bien no existe ninguna función elemental cuya derivada sea e^{-x^2}, podremos evaluar esta integral mediante algunas acotaciones apropiadas y la utilización de ciertas integrales definidas ya calculadas.

Estudiando las variaciones de las funciones

$$y_1 = (1+x^2)e^{-x^2} \qquad \text{e} \qquad y_2 = (1-x^2)e^{x^2}$$

se ve fácilmente (ej. 10 y 11, pág. 270) que ambas son < 1, excepto en el punto $x = 0$ donde alcanzan el valor 1. Por consiguiente se verifican las desigualdades:

$$(1+x^2)e^{-x^2} < 1; \qquad (1-x^2)e^{x^2} < 1$$

que se pueden escribir

$$e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}; \qquad 1-x^2 < \frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2}$$

y reuniéndolas en una sola desigualdad:

$$1-x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}.$$

Elevando a la m-sima potencia resulta

$$(1 - x^2)^m < e^{-mx^2} < \frac{1}{(1 + x^2)^m}. \qquad [2]$$

Haciendo en [1] el cambio $x = z\sqrt{m}$ y teniendo en cuenta [2] es

$$I = \sqrt{m}\int_0^{\infty} e^{-mz^2}\,dz < \sqrt{m}\int_0^{\infty} \frac{dz}{(1 + z^2)^m}.$$

$$I > \sqrt{m}\int_0^{\infty} (1 - z^2)^m\,dz.$$

Reemplazando por los valores correspondientes se tiene:

$$\sqrt{m}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}\,\frac{1}{2m+1} < I <$$

$$< \sqrt{m}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m-2)}\,\frac{1}{2}\pi$$

que podemos escribir

$$\frac{m}{2m+1}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}\,\frac{1}{\sqrt{m}}\right] < \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx <$$

$$< \frac{1}{2}\pi\,\frac{2m}{2m-1}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}\sqrt{m}\right].$$

En virtud de la fórmula de Wallis, los 2 corchetes tienden respectivamente a $\sqrt{\pi}$ y $1 : \sqrt{\pi}$ y por ello los 2 extremos tienden a $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Entonces debe ser

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Fórmula de Stirling [1]: Esta fórmula que permite calcular valores aproximados de $n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n$ es de fundamental importancia en el cálculo de probabilidades.

Puesto que es

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n. \qquad [1]$$

tomando logaritmos neperianos resulta

$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n. \qquad [2]$$

Gráficamente esta expresión representa la suma de los rectángulos de base unidad y altura

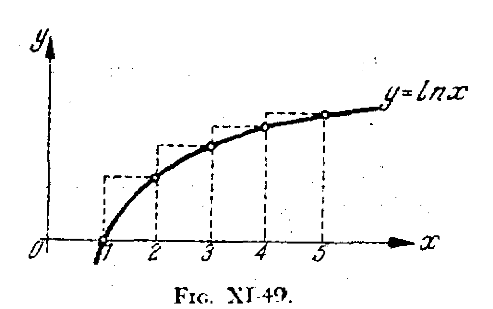


Fig. XI-49.

[1] Para la lectura de este parágrafo es necesario recordar algunos resultados obtenidos en las páginas 253 y 258.

ln 2, ln 3, ..., ln n. Estas alturas corresponden a las ordenadas de la curva logarítmica $y = \ln x$ para $x = 2, 3, \ldots, n$.

Un primer valor aproximado de la suma [2] se tendrá calculando el área encerrada por la curva logarítmica entre 1 y n:

$$\int_1^n \ln x\, dx = \Big[x(\ln x - 1)\Big]_1^n = n(\ln n - 1) + 1. \quad [3]$$

Así para $n = 10$, mientras el valor exacto de [2] es 15,104 y el valor aproximado de [3] es 14,026; para $n = 20$, los valores correspondientes son 42,335 y 40,915.

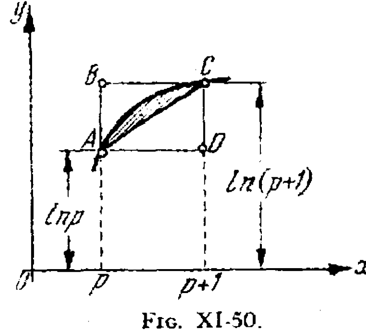


FIG. XI-50.

Al área dada por [3] debemos agregar la suma de las áreas de los triángulos curvilíneos ABC de la figura 50. El área de cada uno de estos triángulos curvilíneos es igual a la diferencia entre el área del triángulo rectilíneo ABC y la zona (rayada en la figura) comprendida entre el arco y la cuerda AC.

El área del triángulo rectilíneo ABC es igual a

$$\frac{1}{2}\Big[\ln(p+1) - \ln p\Big]$$

y la suma de todos los triángulos análogos es

$$\frac{1}{2}\Big[(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \ldots + \ln n - \ln(n-1)\Big] = \frac{1}{2}\ln n. \quad [4]$$

El área de la zona rayada es

$$\int_p^{p+1} \ln x\, dx - \text{Area trapecio } [p, A, C, (p+1] =$$

$$= \Big[x(\ln x - 1)\Big]_p^{p+1} - \frac{1}{2}[\ln(p+1) + \ln p] = \Big[p + \frac{1}{2}\Big]\ln\frac{p+1}{p} - 1. \quad [5]$$

Desarrollaremos en serie esta expresión del logaritmo, teniendo en cuenta que es

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad \text{para } |x| < 1$$

y análogamente

$$\ln(1 - x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right).$$

La diferencia de estas 2 expresiones es

$$\ln(1 + x) - \ln(1 - x) = \ln\frac{1 + x}{1 - x} = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots\right).$$

Haciendo en esta expresión

$$x = \frac{1}{2p + 1} \quad \text{es} \quad \frac{1 + x}{1 - x} = \frac{p + 1}{p}$$

y por consiguiente será

$$\ln\frac{p + 1}{p} = \frac{2}{2p + 1}\left[1 + \frac{1}{3(2p + 1)^2} + \frac{1}{5(2p + 1)^4} + \dots\right],$$

relación que escribiremos, para comparar con el área de la zona rayada [5],

$$\left(p + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{p + 1}{p} - 1 = \frac{1}{3(2p + 1)^2} + \frac{1}{5(2p + 1)^4} + \dots \qquad [6]$$

Acotaremos la serie S_p que aparece en el segundo miembro:

$$S_p = \frac{1}{3(2p + 1)^2} + \frac{1}{5(2p + 1)^4} + \dots <$$

$$< \frac{1}{3(2p + 1)^2}\left[1 + \frac{1}{(2p + 1)^2} + \frac{1}{(2p + 1)^4} + \dots\right].$$

El corchete es una serie geométrica de razón $\frac{1}{(2p + 1)^2}$ y por consiguiente su suma será $(2p + 1)^2 : [(2p + 1)^2 - 1]$.

Resulta entonces

$$S_p < \frac{1}{3(4p^2 + 4p)} = \frac{1}{12p(p + 1)}.$$

La suma S de todas las zonas rayadas: $S = S_1 + S_2 + \dots + S_p + \dots + S_{n-1}$ será

$$S = \sum_{p=1}^{n-1} S_p < \frac{1}{12}\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p(p + 1)} = \frac{1}{12}\sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1}\right) = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{1}{n}\right). \qquad [7]$$

Podemos asegurar entonces que el número S es finito.

Teniendo en cuenta los resultados [3], [4], [6] y [7] resulta:

$$\ln n! = [n(\ln n - 1) + 1] + \frac{1}{2}\ln n - S. \qquad [8]$$

Esta igualdad se puede escribir considerando ya en lugar de los logaritmos los números correspondientes:

$$n! = e \cdot e^{-S} n^n n^{1/2} e^{-n} = K n^n e^{-n} n^{1/2} \qquad [9]$$

siendo $K = e^{1-S}$.

DETERMINACIÓN DE K: Utilizando la fórmula de Wallis determinaremos el valor de K, reemplazando en (pág. 402)

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2 2n}$$

$n!$ por la fórmula [9] (advirtiendo que las dos expresiones de K correspondientes a $n!$ y $(2n)!$ tienden al mismo límite K cuando $n \to \infty$):

$$\frac{1}{2}\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}K^4 n^{4n} e^{-4n} n^2}{K^2(2n)^{4n} e^{-4n} 2n \cdot 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{K^2}{4} = \frac{1}{4}K^2.$$

Por consiguiente resulta $K = \sqrt{2\pi}$.

Reemplazando en [9] se obtiene la fórmula de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Para $n = 10$ se obtiene 3 598 696 con un error porcentual del 8 % y para $n = 20$: $20! \sim 2\,422\,786\,385\,510\,400\,000$ con un error porcentual del 4 %.

LA FUNCIÓN GAMMA:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx. \quad (n\text{: número entero y positivo o nulo}).$$

De acuerdo a la definición de integral en un intervalo infinito será el límite de la integral calculada en el intervalo $(0, t)$, cuando $t \to \infty$.

Aplicando la fórmula de integración por partes resulta

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = -\int_0^\infty x^n d(e^{-x}) =$$

$$= \Big[-x^n e^{-x}\Big]_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx.$$

El término $\Big[-x^n e^{-x}\Big]_0^\infty$ es nulo pues para $x \to \infty$, $x^n e^{-x} \to 0$ (como se

puede verificar aplicando reiteradamente la regla de L'Hospital) y para $x = 0$ también se anula el producto. La integral que aparece es del mismo tipo que la que define la función Γ, pero el exponente de x está disminuido en una unidad. Resulta así la fórmula

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

A la expresión $\Gamma(n)$ podemos aplicarle la fórmula correspondiente disminuyendo el índice en una unidad y reiterando el procedimiento hasta $n = 1$, se obtiene

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = \\ = n(n-1)(n-2)\ldots 1\Gamma(1).$$

El cálculo de $\Gamma(1)$ es inmediato pues por definición es

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

Por consiguiente resulta $\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots 1$ es decir, $\Gamma(n+1) = n!$

NOTA: Si en lugar de un valor n entero, positivo o nulo, consideramos un valor α real podemos generalizar la definición de la función gamma:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx. \qquad [1]$$

¿Para qué valores de α está definida esta integral impropia?

Si es $\alpha > 0$ la integral es impropia porque el límite superior de integración es infinito, pero si es $\alpha < 0$, también el origen es un punto de discontinuidad de la función.

Demostraremos que si es $\alpha > -1$, la integral [1] es convergente.

Para ello dividamos el intervalo de integración en 3 partes: $(0,1)$, $(1, r)$ y (r, ∞).

En $(0, 1)$ puesto que es $\alpha > -1$, podremos escribir $\alpha = -1 + \varepsilon$, siendo ε un valor positivo. Como en ese intervalo es $|e^{-x}| < 1$, resulta $|x^\alpha e^{-x}| < |x|^\alpha$ y siendo

$$\left|\int_0^1 x^\alpha e^{-x} dx\right| \leqslant \int_0^1 |x^\alpha e^{-x}| dx < \int_0^1 |x|^\alpha dx = \int_0^1 x^{-1+\varepsilon} dx = \left[\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon}\right]_0^1 = \frac{1}{\varepsilon}$$

resulta un valor finito. En el otro extremo es posible determinar un valor r tal que si es $x > r$, resulta $x^\alpha e^{-x} < x^{-2}$ o, lo que es lo mismo, $e^x > x^{\alpha+2}$. Se tiene entonces $\int_r^\infty x^\alpha e^{-x} dx \leqslant 1$, pues $\int_1^\infty x^{-2} dx = 1$.

En el intervalo restante $(1, r)$ la función es continua y su integral acotada. Luego, la función gamma resulta definida para $\alpha > -1$ por la fórmula [1].

Repitiendo el razonamiento utilizado en el cálculo de recurrencia para la determinación de $\Gamma(n+1)$ resulta para cualquier $\alpha > -1$:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad \text{ó} \quad \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}.$$

Esta fórmula, *adoptada como definición*, permite dar valores a la función gamma para cualquier α, positivo o negativo.

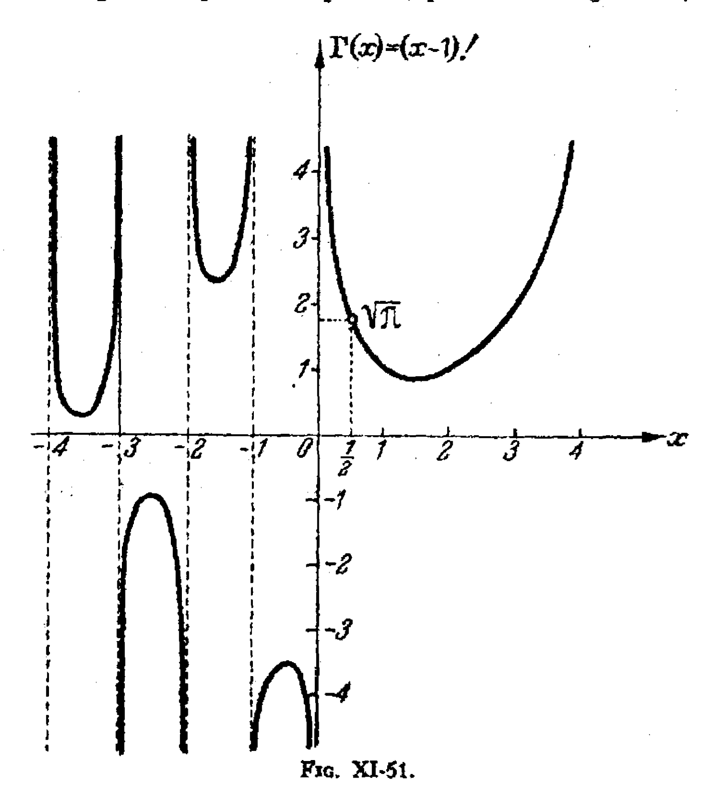


FIG. XI-51.

Queda así generalizado para cualquier valor α real, positivo o negativo el factorial de α de acuerdo a la relación (demostrada sólo para $\alpha = n$, entero $\geqslant 0$).

$$\alpha! = \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \qquad [1]$$

En particular si es $\alpha = 0$, resulta $0! = \Gamma(1) = 0\Gamma(0)$ y como es $0! = 1$, debe adoptarse como valor de $\Gamma(0)$ el valor ∞. Lo mismo sucede con todos los valores enteros y negativos de α. Así si $\alpha = -1$ es $(-1)! = \Gamma(0) = (-1)\Gamma(-1)$ y puesto que hemos tomado $\Gamma(0) = \infty$, debemos adoptar también $\Gamma(-1) = \infty$.

En virtud de la relación [1] es suficiente conocer los valores de $\Gamma(x)$ para x comprendido entre 1 y 2 y todos los demás valores se obtienen por recurrencia (tabla XV del apéndice).

CÁLCULO DE $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$: Haciendo en la definición $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx$ la sustitución $x = z^2$ resulta $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz$ y como esta integral de Poisson ya ha sido calculada y su valor es $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, se tiene

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)= \sqrt{\pi} \sim 1{,}77.$$

Siendo $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ resulta $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi},$$

LA FUNCIÓN BETA: $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. ($p$, q positivos).

Si los valores de p y de q están comprendidos entre 0 y 1, la integral es impropia. Así para $p = q = \frac{1}{2}$ la función subintegral tiene la forma representada en la figura y la función beta $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ tiene como valor el área rayada

De acuerdo a las definiciones será

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon'\to 0}}\left[\int_\varepsilon^{1-\varepsilon'}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}\right]=$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon'\to 0}}\Big[-\operatorname{arc\,sen}(1-2x)\Big]_\varepsilon^{1-\varepsilon'}=$$

Fig. XI-52.

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon'\to 0}}\Big[\operatorname{arc\,sen}(1-2\varepsilon) - \operatorname{arc\,sen}(-1+2\varepsilon')\Big] = 2\operatorname{arc\,sen} 1 = \pi.$$

Limitémonos a considerar el caso de la función beta cuyos parámetros son números enteros y positivos: $p = m$; $q = n$:

$$1+y'^2=1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}},$$

teniendo en cuenta la ecuación de la curva. Extrayendo la raíz cuadrada de esta expresión, integrando entre 0 y a y multiplicando por 4 resulta la longitud total de la astroide: $6a$).

5. Calcular la longitud del arco comprendido en un cuadrante de la curva

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

R: $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

6. Calcular la longitud del arco de la curva

$$y=\ln\sec x$$

desde el origen hasta el punto de abscisa $x=\dfrac{\pi}{3}$.

R: $\ln 3{,}732=1{,}317$.

7. Calcular la longitud del arco de curva

$$4y=x^2-2\ln x$$

desde $x=1$ hasta $x=2$.

R: 1,09.

8. Calcular la longitud de la curva

$$9y^2=(x^2+2)^3$$

desde el origen hasta el punto de abscisa $x=2$.

R: $\dfrac{14}{3}$.

9. Calcular la longitud de la parábola semicúbica

$$4y^2=x^3$$

en el intervalo (0, 1).

R: $\dfrac{61}{54}$.

CURVA NO RECTIFICABLE: Hemos definido la longitud de un arco de curva mediante el límite de la longitud de una poligonal inscripta. Veamos un ejemplo de curva en el cual este límite no existe. Sea $y=x\ \text{sen}\,\dfrac{\pi}{x}$ una función definida en el intervalo $(-1, +1)$ que alcanza sus máximos y mínimos en $x_k=\pm\dfrac{2}{2k+1}$ con $k=0, 1, 2, 3, \ldots$, pues allí $\text{sen}\,x$ vale $+1$ ó -1 alternadamente y la función es $y_k=\pm x_k$.

Evidentemente la longitud de la poligonal inscripta es mayor que el doble de la suma de los segmentos verticales trazados desde los puntos x_k hasta la intersección con la curva. Pero la suma de los valores absolutos de los segmentos: $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{2}{2k+1}$ tiende a infinito cuando $n\to\infty$, como se verá en la teoría de las series numéricas (pág. 523, ej. 3).

Más aun, esta curva no es rectificable en ningún intervalo $(-\delta, +\delta)$ que contenga el origen, por pequeño que sea δ.

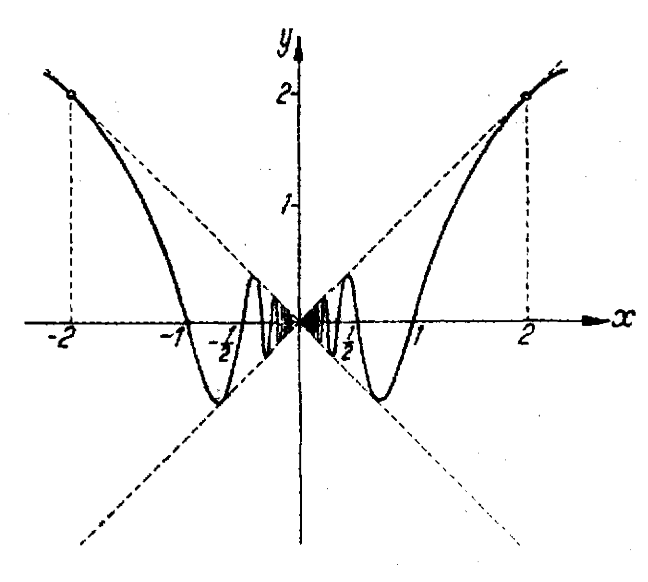


Fig. XII-4.

Este ejemplo muestra que el concepto de *curva* es mucho más complejo que el que se le da corrientemente como imagen gráfica de una función continua.

En el libro de J. Pierpont: *Theory of functions of Real Variables*, vol. II, Ed. Ginn, el lector que lo desee encontrará un análisis crítico de esta importante noción.

2. DIFERENCIAL DE ARCO. VECTOR $\vec{ds}$.

Si consideramos variable con x el extremo B del arco AB, su longitud se expresará mediante la integral

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Diferenciando esta expresión se tendrá

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Si introducimos el dx dentro del signo radical y puesto que es $f'(x)\, dx = dy$, resulta

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Al vector $\vec{ds}$ que tiene su origen en $P(x, y)$, situado sobre la

tangente a la curva. orientado en el sentido de los arcos crecientes y cuyo módulo es ds. se le llama "vector diferencial de arco".

Llamando α al ángulo que forma la tangente con el eje de las abscisas resultan los *cosenos directores* de la tangente:

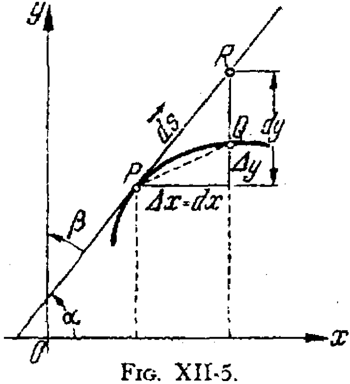


FIG. XII-5.

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}\ ; \quad \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{dy}{ds}.$$

NOTA: Obsérvese la diferencia entre los siguientes tres infinitésimos, que con las notaciones de la figura escribimos:

cuerda $\overline{PQ} = \Delta c$; arco $\widehat{PQ} = \Delta s$;

segmento de tangente $\overline{PR} = ds$.

Estos tres infinitésimos diferentes, son sin embargo *equivalentes*, pues puede demostrarse que el límite del cociente de 2 cualesquiera de ellos es igual a 1.

3. LONGITUD DE UN ARCO EN COORDENADAS PARAMETRICAS

Cuando la curva está dada en coordenadas paramétricas:

$$x = g(t), \qquad y = h(t),$$

resulta $dx = g'(t)\,dt$; $dy = h'(t)\,dt$ y por consiguiente el diferencial de arco ds es:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}\,dt.$$

La longitud de un arco de curva AB dada en forma paramétrica cuando los extremos A y B están dados por los valores t_0 y t_1 del parámetro será:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}\,dt.$$

EJEMPLO:

Calcular la longitud de una onda de cicloide

$$\begin{cases} x = r(t - \operatorname{sen} t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

cuando t varía de 0 a 2π.

Siendo $dx = r(1 - \cos t)\,dt$; $dy = r \operatorname{sen} t\,dt$, resulta

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 t}\; dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\; dt$$

$$s = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\; dt.$$

Pero como es $1 - \cos t = 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t$ resulta:

$$s = 2r\int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t}\; dt = 4r\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{1}{2}t\; d\left(\frac{1}{2}t\right) = 4r\left[-\cos\frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} = 8r.$$

EJERCICIOS:

1. Dada la curva

$$\begin{cases} x = 4 + 3t^2 \\ y = 6 - 4t^2 \end{cases}$$

calcular la longitud del arco comprendido entre $t = 0$ y $t = 4$.
¿De qué curva se trata en coordenadas cartesianas? Verifíquese el resultado gráficamente.

R: 80.

2. Dada la curva

$$\begin{cases} x = 2 + 4\operatorname{sen} 2t \\ y = 4 - 4\cos 2t \end{cases}$$

calcular la longitud del arco comprendido entre $t = 0$ y $t = \frac{1}{2}\pi$.

R: 4π.

3. Hallar la longitud total de la astroide

$$\begin{cases} y = a\operatorname{sen}^3 t. \\ x = a\cos^3 t, \end{cases}$$

R: $6a$.

(Compárese con el resultado obtenido en el ej. 4 del § 1).

4. Calcular la longitud del arco de la curva

$$\begin{cases} x = e^t \operatorname{sen} t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$$

desde $t = 0$ hasta $t = \frac{1}{2}\pi$.

R: $\sqrt{2}\,(e^{\frac{1}{2}\pi} - 1)$.

5. Dada la evolvente del círculo de radio a:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\operatorname{sen} t) \\ y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t) \end{cases}$$

calcular la longitud del arco desde $t = 0$ hasta $t = t_1$.

R: $\frac{1}{2} a t_1$.

6. Dada la curva

$$\begin{cases} x = n \cos t + \cos nt \\ y = n \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} nt \end{cases}$$

calcular la longitud del arco comprendido entre $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{n+1}$.

R: $\frac{4n}{n+1}$.

4. INTEGRALES ELIPTICAS

Si aplicamos la fórmula que permite calcular la longitud de un arco de curva, obtendremos la integral de una cierta función sólo excepcionalmente integrable en forma "cerrada", esto es, mediante la combinación de un número finito de funciones elementales. La mayoría de las veces habrá que recurrir a procedimientos aproximados: numéricos, gráficos o mecánicos.

Algunas veces se crean nuevas funciones definidas precisamente por esas integrales, y cuando su importancia lo justifica se estudian sus características analíticas y se calculan sus valores numéricos.

Es así como aparecen las *integrales elípticas* al intentar *rectificar* la elipse.

Sea una elipse de semiejes a y b, que en coordenadas cartesianas se escribe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

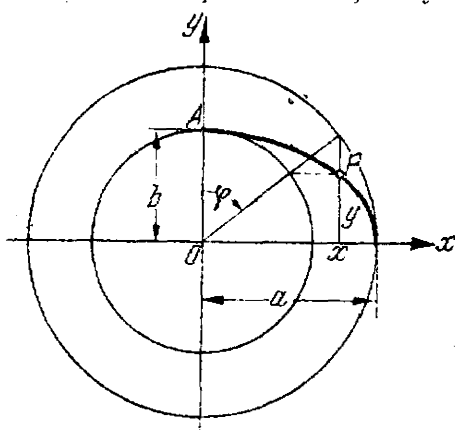


Fig. XII-6.

y que en forma paramétrica queda definida mediante el par de ecuaciones

$$x = a \operatorname{sen} \varphi;$$

$$y = b \cos \varphi$$

con el parámetro φ variando de 0 a 2π.

Como es

$$dx = a \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$dy = -b \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi$$

resulta

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)\, d\varphi^2 =$$

$$= [a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \varphi) + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi]\, d\varphi^2 = [a^2 - (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 \varphi]\, d\varphi^2 =$$

$$= a^2(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)\, d\varphi^2$$

designando con k^2 al cociente $\frac{a^2-b^2}{a^2}$ (k es la *excentricidad* de la elipse).

Siendo

$$ds = a\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}\;d\varphi,$$

el arco AP es

$$s = a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}\;d\varphi.$$

No hay ninguna combinación de funciones elementales cuya derivada sea $\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}$ con $k^2 \neq 1$. Por eso se han introducido y tabulado las integrales elípticas de Legendre de primera y segunda especie (con $k^2 \neq 1$):

$$F(k,\,\varphi) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}}, \qquad \text{Integral de 1ª especie}$$

$$E(k,\,\varphi) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}\;d\varphi. \qquad \text{Integral de 2ª especie}$$

Resulta entonces para el arco de elipse, de semiejes a y b, contado a partir del punto A del semieje menor y con $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$:

$$\Big[\,s\,\Big]_0^{\varphi} = aE(k,\,\varphi).$$

En particular si $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, se tienen las integrales elípticas completas de primera y segunda especie

$$F\left(k,\,\frac{1}{2}\pi\right) = F_1(k), \qquad E\left(k,\,\frac{1}{2}\pi\right) = E_1(k).$$

Existen tablas de las integrales elípticas E y F y de sus inversas, las importantes *funciones elípticas* (1).

Las tablas XIX, XX y XXI del apéndice dan los valores de $F(k,\varphi)$, $E(k,\varphi)$, $F_1(k)$, $E_1(k)$ con 3 y 4 decimales. Como el parámetro k es menor que la unidad se considera $k = \mathrm{sen}\,\alpha$ y se entra en la tabla una vez determinado α.

Al estudiar el desarrollo en serie de potencias (Cap. XV) veremos como se pueden obtener valores aproximados de las integrales elípticas.

(1) En las célebres *Tables of Functions* de E. Jahnke y F. Emde (1938; reimpresas por Dover en 1943) hay una lista de integrales que se pueden calcular mediante las integrales elípticas E y F.

EJERCICIOS:

1. Hallar la longitud total de una elipse de semiejes $a = 5$, $b = 3$.
Solución: La longitud buscada será 4 veces la del arco comprendido entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$:

$$L = 4\left[\ s\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a\,E_1(k), \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{16}{25} \quad \text{o sea} \quad k = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Luego, como la tabla XXI del apéndice tiene entrada por $\alpha = \operatorname{arc\,sen} k = \operatorname{arc\,sen} 0{,}8 = 53°\,08'$ resulta $E_1(0{,}8) = 1{,}276$ y la longitud L es:

$$L = 4 \times 5 \times 1{,}276 = 25{,}53.$$

Si no se dispone de tablas se puede efectuar el cálculo por desarrollo en serie, como veremos en el capítulo XV (1).

2. Determinar la longitud de un arco de hipérbola dada en la forma:

$$x = \frac{a}{\operatorname{sen}\varphi}, \qquad y = b\operatorname{cotg}\varphi,$$

comprendido entre el vértice $\left(\varphi = \frac{1}{2}\pi\right)$ y un punto cualquiera correspondiente al valor φ_1 del parámetro. Calcular el caso particular $a = b = 1$, $\varphi_1 = \frac{1}{4}\pi$.

$$L = \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}\ \frac{d\varphi}{\operatorname{sen}^2\varphi} =$$

$$= \operatorname{cotg}\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} - \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}} =$$

$$= \operatorname{cotg}\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} - \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}\,d\varphi +$$

$$+ b^2\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2}}.$$

Designando con $k^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$ resulta $\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} = \frac{a}{k}\ \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}$.

Luego se tiene:

$$L = \operatorname{cotg}\varphi\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2} - \frac{a}{k}\Big[E_1(k) - E(k,\ \varphi_1)\Big] + \frac{kb^2}{a}\Big[F_1(k) - F(k,\ \varphi_1)\Big].$$

(1) Resulta: $L = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\ \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\ \frac{k^6}{5} - \ldots\right].$

Para el caso $a = b = 1$, $\varphi_1 = \frac{1}{4}\pi$ resulta:

$$L = \sqrt{1{,}5} - \sqrt{2}\left[E_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - E\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{2}\left[F_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi\right)\right]$$

y con los valores dados por las tablas XIX, XX y XXI del apéndice se tiene $L \sim 1{,}099$.

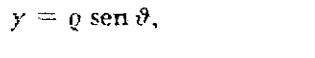
5. LONGITUD DE UN ARCO EN COORDENADAS POLARES

Sea AB un arco de curva dado en coordenadas polares mediante la relación

$$\varrho = \varrho(\vartheta).$$

Teniendo en cuenta que es

$$x = \varrho \cos \vartheta,$$



$$y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta,$$

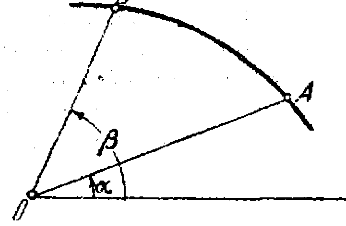


FIG. XII-7.

resultan x e y funciones del parámetro ϑ.

Diferenciando es:

$$dx = \cos \vartheta \; d\varrho - \varrho \operatorname{sen} \vartheta \; d\vartheta,$$

$$dy = \operatorname{sen} \vartheta \; d\varrho + \varrho \cos \vartheta \; d\vartheta.$$

Elevando al cuadrado, sumando y simplificando se tiene:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\varrho^2(\cos^2 \vartheta + \operatorname{sen}^2 \vartheta) + \varrho^2 \, d\vartheta^2(\operatorname{sen}^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) -$$

$$- 2d\varrho \cos \vartheta \; \varrho \operatorname{sen} \vartheta d \vartheta + 2d\varrho \operatorname{sen} \vartheta \varrho \; \cos \vartheta d \vartheta \; = d\varrho^2 + \varrho^2 \, d\vartheta^2,$$

con lo que resulta

$$ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 \, d\vartheta^2} = \sqrt{\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 \; + \; \varrho^2} \; d\vartheta = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} \, d\vartheta,$$

designando con ϱ' la derivada de ϱ respecto de ϑ.

La longitud del arco AB será la integral correspondiente a este diferencial:

$$s = \int_\alpha^\beta \, ds = \int_\alpha^\beta \, \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2} \, d\vartheta.$$

EJEMPLOS:

1°) **Calcular la longitud de la curva $\varrho = \operatorname{sen}\vartheta$ para $0 \leq \vartheta \leq \pi$.**

Por ser $\varrho' = \cos\vartheta$ es $ds = \sqrt{\operatorname{sen}^2\vartheta + \cos^2\vartheta}\, d\vartheta = d\vartheta$ y la longitud buscada será

$$s = \int_0^\pi d\vartheta = \pi,$$

resultado evidente pues se trata de una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$.

2°) **Calcular la longitud total del arco de espiral**

$$\varrho = a\, e^{m\vartheta} \quad (m > 0),$$

comprendido entre el origen y un punto cualquiera (ϑ, ϱ).
Esta espiral tiene al origen como punto asintótico: el límite de ϱ cuando $\vartheta \to -\infty$ es 0. Habrá que integrar entre $-\infty$ y ϑ. Como $\varrho^2 + \varrho'^2 = a^2 e^{2m\vartheta}(1 + m^2)$, resulta:

$$s = a\sqrt{1+m^2}\int_{-\infty}^{\vartheta} e^{m\vartheta}\, d\vartheta = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\varrho.$$

Este valor coincide con la tangente polar (pág. 193).

EJERCICIOS:

1. Calcular la longitud total de la cardioide $\varrho = a(1 - \cos\vartheta)$.
 R: $8a$.

2. Calcular la longitud del arco de la parábola $\varrho = \dfrac{2}{1 + \cos\vartheta}$ comprendido entre $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.
 R: $\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$.

3. Verificar que la longitud de la curva $\varrho = 2\sec^2\frac{1}{2}\vartheta$ es igual a $2\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)\right]$, en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$.

4. Calcular la longitud total de la cardioide

$$\varrho = \cos^2\frac{1}{2}\vartheta.$$

 R: 4.

5. Verificar que la longitud de cada una de las siguientes circunferencias de radio 2 es 4π:
 a) $\varrho = 4\operatorname{sen}\vartheta$; b) $\varrho = 2\sqrt{2}(\cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta)$; c) $\varrho = 4\cos\vartheta$; d) $\varrho = 2$.

6. Calcular la longitud total de la lemniscata $\varrho^2 = a^2\cos 2\vartheta$.
 Por ser $2\varrho\, d\varrho = -2a^2\operatorname{sen} 2\vartheta\, d\vartheta$

 resulta $$d\varrho^2 = \frac{a^2\operatorname{sen}^2 2\vartheta}{\cos 2\vartheta}\, d\vartheta$$

Luego es

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2\, d\vartheta^2 = \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 2\vartheta}{\cos 2\vartheta}\, d\vartheta^2 + a^2 \cos 2\vartheta\, d\vartheta^2 = \frac{a^2\, d\vartheta^2}{\cos 2\vartheta}.$$

La longitud total s de la lemniscata será igual a 4 veces la integral correspondiente al arco comprendido entre 0 y $\frac{1}{4}\pi$, es decir al arco situado en el primer cuadrante:

$$s = 4a \int_0^{\pi/4} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} = 4a \int_0^{\pi/4} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - 2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}}.$$

Esta integral no puede calcularse con las funciones elementales, pero sí utilizando integrales elípticas.

En efecto, puesto que ϑ varía entre 0 y $\frac{1}{4}\pi$, $\operatorname{sen}\vartheta$ varía entre 0 y $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, de modo que $\sqrt{2}\operatorname{sen}\vartheta$ variará entre 0 y 1. Podemos entonces hacer la sustitución $\sqrt{2}\operatorname{sen}\vartheta = \operatorname{sen}\varphi$ con φ variando entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$.

Resulta

$$d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

y por consiguiente:

$$s = 4a \int_0^{\pi/4} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - 2\operatorname{sen}^2\vartheta}} = \frac{4a}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Esta última es una integral elíptica completa de primera especie de módulo $k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen}\alpha$, es decir $\alpha = 45°$.

De acuerdo a la tabla XXI del apéndice podemos escribir finalmente

$$s = 2\sqrt{2} \cdot a \cdot F_1(k) = 2\sqrt{2}a F_1(45°) = 2\sqrt{2}a \times 1.8541a \sim 5{,}24a.$$

6. CURVATURA DE CURVAS PLANAS

Sea $y = f(x)$ una curva dada en coordenadas cartesianas y consideremos sobre ella dos puntos A y B. Sean AT y BT_1 las tangentes correspondientes que se cortan en R y forman con el eje de las abscisas los ángulos φ y φ_1, respectivamente.

El ángulo de las tangentes BRT llamado *ángulo de contingencia*, es igual a $\varphi_1 - \varphi$ como lo muestra la figura.

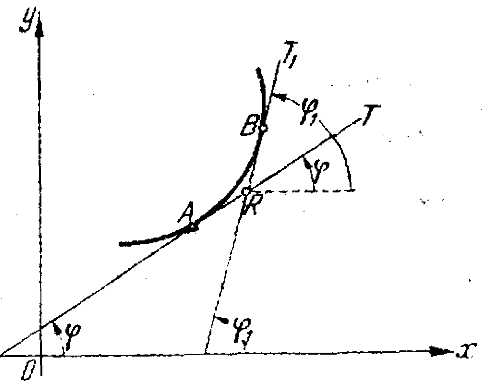


Fig. XII-8.

Si designamos con Δs la longitud del arco AB y el án-

gulo de contingencia con $\Delta\varphi = BRT = \varphi_1 - \varphi$, *definiremos* como *curvatura media* C_m del arco AB a la relación

$$C_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Si el punto B tiende hacia el punto A, o sea si $\Delta s \to 0$ (y por consiguiente $\Delta x \to 0$) definimos como *curvatura* C en el punto A al límite:

$$C = \lim_{\Delta s \to 0} C_m = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Calculemos estas diferenciales en base a la ecuación $y = f(x)$. Por ser $\operatorname{tg}\varphi = y'$ resulta $\varphi = \operatorname{arc\,tg} y'$ y por ello $d\varphi = \frac{y''\,dx}{1 + y'^2}$.

Por ser $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$, se tiene:

$$C = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{y''\,dx}{1 + y'^2} : (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad [1]$$

En la expresión de la curvatura sólo se considera el valor absoluto.

El valor recíproco de C es el *radio de curvatura* R.

EJEMPLOS:

1°) Calcular la curvatura de una recta.
En este caso la tangente coincide con la "curva"; luego φ es constante y $\Delta\varphi = 0$; por consiguiente $C_m = 0$ y también $C = 0$, es decir: la curvatura de una recta es nula.

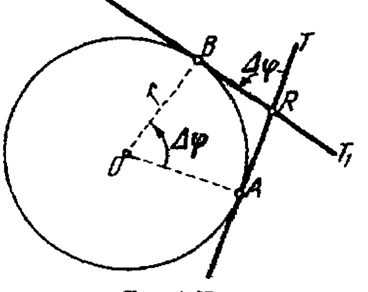


FIG. XII-9.

2°) Calcular la curvatura de una circunferencia.
En este caso el ángulo $BRT = \Delta\varphi$ es igual al ángulo central BOA por tratarse de ángulos de lados perpendiculares. Como el arco AB es igual al producto del ángulo BOA (medido en radianes) por el radio r, resulta $\Delta s = r\Delta\varphi$ y se tiene

$$C_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{\Delta\varphi}{r\Delta\varphi} = \frac{1}{r} = C.$$

Es decir: *la curvatura de una circunferencia es constantemente igual al valor recíproco del radio.*

3°) Calcular la curvatura de la elipse de semiejes a y b en un punto $P(x, y)$. Caso particular $x = a$.
La ecuación de la elipse de semiejes a y b escrita en forma explícita es:

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Las dos primeras derivadas resultan:

$$y' = -\frac{bx}{a(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad y'' = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Reemplazando en la fórmula [1] y recordando que la excentricidad k de la elipse está dada por $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, se tiene

$$C = \frac{-ab}{(a^2 - k^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En el caso particular del punto $(a, 0)$ es $|C| = \frac{a}{b^2}$.

Ejercicios:

1. Hallar la curvatura de la elipse de semiejes a, b en el punto $(0, b)$.

R: $\frac{b}{a^2}$.

2. Hallar la curvatura de la hipérbola de semiejes a, b en el punto $(a, 0)$.

R: $-\frac{a}{b^2}$.

3. Hallar la curvatura de la parábola

$$y^2 = 4px$$

en el origen.

R: $\frac{1}{2}\,\frac{1}{p}$.

4. Hallar la curvatura de la función

$$y = \operatorname{sen} x$$

en el punto $x = \frac{1}{2}\pi$.

R: -1.

5. Hallar la curvatura de la parábola

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

en un punto cualquiera.

R: $\frac{1}{2}\,\frac{a^{\frac{1}{2}}}{(x + y)^{\frac{3}{2}}}$.

6. Hallar la curvatura de la catenaria

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

en un punto cualquiera.

R: y^{-2}.

7. **Hallar la curvatura, en un punto cualquiera, de la hipocicloide de 4 puntas (o astroide)**

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

R: $\frac{1}{3}(axy)^{-\frac{1}{3}}$.

Hallar el radio de curvatura de las siguientes curvas en los puntos indicados:

8. $y = x^3$ en $(1, 1)$. R: $\frac{10^{\frac{3}{2}}}{6}$.

9. $y^2 = x^3$ en $(9, 27)$. R: $\frac{1}{2}85^{\frac{3}{2}}$.

10. $a^2y = bx^2 + cx^2y$ en el origen. R: $\frac{1}{2}\frac{a^2}{b}$.

11. $y = \ln \sec x$ en $x = x_1$. R: $\sec x_1$.

12. Comprobar que el radio de curvatura de la hipérbola equilátera

$$xy = k^2$$

está dado por

$$R = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{2k^2}.$$

13. Hallar el radio de curvatura de la cisoide

$$x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0$$

en un punto cualquiera.

R: $\frac{1}{3}a \frac{(8a - 3x)^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}(2a - x)^2}$.

14. Verificar que el radio de curvatura de la curva

$$y = mx + n(x - a)^2(x - b)^2$$

tiene el mismo valor en los puntos de abscisas a y b.

R: $\frac{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{2n(a - b)^2}$.

15. Verificar que el radio de curvatura de la curva

$$ay^2 = (x - \alpha)(x - \beta)^2$$

en el punto $(\alpha, 0)$ es igual a $\frac{(\alpha - \beta)^2}{2a}$.

16. Verificar que el radio de curvatura de la curva

$$y^2 = \frac{a^2(a + x)}{x}$$

en el punto $(-a, 0)$ es igual a $\frac{1}{2}a$.

17. Verificar que el radio de curvatura de la curva

$$y^2 = \frac{a^2(a-x)}{x}$$

en el vértice es igual a $\frac{1}{2}a$.

18. Verificar que el radio de curvatura de la curva

$$a^2y^2 = x^3(a-x)$$

en el punto $(a, 0)$ es igual a $2a^2$.

19. Verificar que el radio de curvatura de la parábola

$$(x-y)^2 - 2a(x+y) + a^2 = 0$$

es igual a $2a$ en los puntos en que la curva toca a los ejes coordenados.

20. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$y = 4 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$$

en el punto $x = \frac{1}{2}\pi$.

R: $1{,}25\sqrt{5}$.

21. ¿En qué puntos es mínimo el radio de curvatura de la curva $50y = x^3$?

R: $x = \pm\frac{2}{3}$.

22. Determinar el radio de curvatura de la función

$$y = e^{-x^2}$$

en el punto $(1, e^{-1})$.

R: $\dfrac{(e^2+4)^{\frac{3}{2}}}{2e^2}$.

23. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$y = x \cdot \ln x$$

en el punto (e, e).

R: $2\sqrt{2}e$.

24. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$y = \operatorname{cotg} x$$

en el punto $\left(\frac{1}{4}\pi,\ 1\right)$.

R: $\frac{1}{4}5\sqrt{5}$.

25. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$y = x + \frac{2}{x}$$

en el punto (2, 3).

R: 27.

26. Determinar el radio de curvatura de la curva

$$y = x^4 - x^2$$

en sus puntos extremales (máximos, mínimos y puntos de inflexión).

R: En el máximo $x = 0$, $R = \frac{1}{2}$; en los mínimos $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $R = \frac{1}{4}$.

En el punto de inflexión es $R = \infty$.

27. Determinar en qué punto de la curva

$$y = e^x,$$

la curvatura es máxima o mínima.

R: $-\frac{1}{2}\ln 2 \cong -0{,}346$ (Máx).

28. Determinar el radio de curvatura de la curva

$$x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$$

en el punto de ordenada $y = 1$.

R: $\frac{25}{48}$.

7. CURVATURA EN COORDENADAS PARAMETRICAS

Demostraremos que la curvatura de una curva dada en forma paramétrica

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

está expresada por la fórmula

$$C = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

donde los acentos indican derivadas respecto del parámetro t.

En efecto: siendo $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'}$ resulta $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y'}{x'}$

y se tendrá

$$d\varphi = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2} \cdot d\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2} \cdot \frac{y''x' - y'x''}{x'^2}\,dt =$$

$$= \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Además, como es $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =$ $= \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$, resulta

$$C = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\dfrac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}\, dt}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\, dt} = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

o bien

$$C = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad [2]$$

empleando para la última expresión la notación de los determinantes.

EJEMPLO:

Calcular la curvatura C de la cicloide

$$\begin{cases} x = r(t + \operatorname{sen} t), \\ y = r(1 + \cos t). \end{cases}$$

Siendo

$$x' = r(1 + \cos t), \qquad x'' = -r \operatorname{sen} t,$$
$$y' = -r \operatorname{sen} t, \qquad y'' = -r \cos t,$$

reemplazando en [2] resulta:

$$x'y'' - x''y' = -r^2(\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = -r^2(1 + \cos t) =$$
$$= -2r^2 \cos^2 \frac{1}{2}t,$$

$$x'^2 + y'^2 = r^2(1 + 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = 2r^2(1 + \cos t) =$$
$$= 4r^2 \cos^2 \frac{1}{2}t,$$

$$C = \frac{\left| -2r^2 \cos^2 \frac{1}{2}t \right|}{8r^3 \cos^3 \frac{1}{2}t} = -\frac{1}{4r \cos \frac{1}{2}t} = +\frac{1}{4r} \sec \frac{1}{2}t.$$

EJERCICIOS:

1. **Mostrar que el radio de curvatura de la curva**

$$\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2at \end{cases}$$

es igual a $2a$ en el origen.
(Verificar que se trata de una parábola de eje horizontal).

2. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = t, \qquad y = 2t^2 + 1$$

en el punto $t = 0$.

R: $\frac{1}{4}$.

3. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = 3t^2, \qquad y = t - 1$$

en el punto $t = 0$.

R: $\frac{1}{6}$.

4. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = t^3, \qquad y = t^2$$

en el punto $t = 1$.

R: $\frac{1}{6} 13 \sqrt{13}$.

5. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = t, \qquad y = \frac{1}{t}$$

en el punto $t = 1$.

R: $\sqrt{2}$.

6. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = e^t, \qquad y = e^{-t}$$

en el punto $t = 0$.

R: $\sqrt{2}$.

7. Verificar que el radio de curvatura de la circunferencia dada en coordenadas paramétricas

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases}$$

es constante e igual a a.

8. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = 4 \cos t, \qquad y = 2 \operatorname{sen} t$$

en el punto $t = \frac{1}{6}\pi$.

R: $7\sqrt{7} : 8 \sim 2{,}32$.

9. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$x = \operatorname{tg} t, \qquad y = \operatorname{cotg} t$$

en el punto $t = \frac{1}{4}\pi$.

R: $\frac{1}{8}\sqrt{2}$.

10. Hallar el radio de curvatura de la curva

$$\begin{cases} x = 2(t - \operatorname{sen} t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$$

en el punto $t = \pi$.

R: 8.

11. Hallar el radio de curvatura de la astroide dada en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$$

en un punto cualquiera. Compárese con el resultado hallado en el ejercicio 7 del § 6, cuando la curva estaba dada en forma cartesiana.

R: $\frac{3}{2} a \operatorname{sen} 2t$.

12. Hallar el radio de curvatura de la siguiente curva dada en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) \\ y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t) \end{cases}$$

en el punto $t = \pi$.

R: $a\pi$.

13. Hallar el radio de curvatura de la parábola

$$\begin{cases} x = a \cos^4 t \\ y = a \operatorname{sen}^4 t \end{cases}$$

en el punto $t = \frac{1}{2}\pi$.

R: $2a$.

14. Hallar el radio de curvatura en el punto $t = 0$ de la curva de Lissajous

$$\begin{cases} x = a \cos nt \\ y = b \operatorname{sen} 2nt \end{cases}$$

R: $\frac{4b^2}{a}$.

15. Verificar que el radio de curvatura de la epicicloide

$$\begin{cases} x = a_1 \cos n_1 t + a_2 \cos n_2 t \\ y = a_1 \operatorname{sen} n_1 t + a_2 \operatorname{sen} n_2 t \end{cases}$$

en los puntos más próximos y más alejados del centro, es igual a $\frac{(n_1a_1 \pm n_2a_2)^2}{n_1^2a_1 \pm n_2^2a_2}$.

(Obsérvese que en los puntos más próximos y más alejados del centro el parámetro vale $t = 0$ y $t = \frac{1}{2}\pi$, respectivamente).

8. CURVATURA EN COORDENADAS POLARES

Demostraremos que la curvatura de una curva dada en coordenadas polares

$$\varrho = \varrho(\vartheta)$$

está expresada por la fórmula

$$C = \frac{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad [3]$$

donde los acentos indican derivadas respecto de ϑ.

En efecto: recordando que las coordenadas cartesianas y polares están vinculadas por las relaciones

$$x = \varrho \cos \vartheta, \qquad y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta. \qquad [4]$$

pueden considerarse a éstas como funciones paramétricas del ángulo ϑ.

Para aplicar la fórmula [2] derivemos las [4] respecto del parámetro ϑ, teniendo siempre en cuenta que ϱ es función de ϑ:

$$x' = \varrho' \cos \vartheta - \varrho \operatorname{sen} \vartheta, \quad x'' = \varrho'' \cos \vartheta - 2\varrho' \operatorname{sen} \vartheta - \varrho \cos \vartheta.$$

$$y' = \varrho' \operatorname{sen} \vartheta + \varrho \cos \vartheta, \quad y'' = \varrho'' \operatorname{sen} \vartheta + 2\varrho' \cos \vartheta - \varrho \operatorname{sen} \vartheta.$$

Efectuando operaciones resulta:

$$x'y'' - x''y' = \varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho'',$$

$$(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = (\varrho^2 + \varrho'^2)^{\frac{3}{2}},$$

y el cociente da la fórmula buscada.

EJEMPLO:

Mostrar que el radio de curvatura de la espiral logarítmica

$$\varrho = e^{a\vartheta}$$

es proporcional a ϱ.

Siendo $\varrho' = ae^{a\vartheta}$; $\varrho'' = a^2e^{a\vartheta}$ reemplazando en [3] se tiene:

$$C = \frac{e^{2a\vartheta} + 2a^2e^{2a\vartheta} - a^2e^{2a\vartheta}}{(e^{2a\vartheta} + a^2e^{2a\vartheta})^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^{2a\vartheta}(1 + a^2)}{e^{3a\vartheta}(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{e^{a\vartheta}(1 + a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

y el radio de curvatura resulta

$$R = \frac{1}{C} = e^{a\vartheta}(1 + a^2)^{\frac{1}{2}} = \varrho(1 + a^2)^{\frac{1}{2}},$$

con lo que se ve la proporcionalidad entre R y ϱ, siendo la constante de proporcionalidad $\sqrt{1 + a^2}$.

Ejercicios:

1. Hallar el radio de curvatura de la espiral de Arquímedes

$$\varrho = a\vartheta$$

en el origen.

R: $\frac{1}{2}a$.

2. Hallar el radio de curvatura de la cardioide

$$\varrho = a(1 - \cos\vartheta)$$

en el punto $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

R: $\frac{2}{3}\sqrt{2}a$.

3. Idem de la lemniscata

$$\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta$$

en el punto $\vartheta = 0$.

R: $\frac{1}{3}a$.

4. Idem de la trisectriz

$$\varrho = a(2\cos\vartheta - 1)$$

en el punto $\vartheta = 0$.

R: $\frac{1}{3}a$.

5. Idem de la espiral hiperbólica

$$\varrho = \frac{a}{\vartheta}$$

en el punto $\vartheta = 1$ radian.

R: $2\sqrt{2}a$.

6. Verificar que en la hipérbola

$$\varrho^2 \cos 2\vartheta = a^2$$

el radio de curvatura está dado por $\frac{\varrho^3}{a^2}$.

Comparar con el resultado hallado en el ejercicio 12 del § 6.

7. Hallar el radio de curvatura de la curva $\varrho^m = a^m \cos m\theta$ en un punto cualquiera.

R: $\dfrac{a^m}{(m+1)\,\varrho^{m-1}}$.

8. Hallar el radio de curvatura de la curva $\varrho = a^{n\theta}$ $(a > 0)$ en un punto cualquiera.

(Téngase en cuenta la identidad $A^B = e^{B \ln A}$ y el caso de la espiral logarítmica).

R: $\varrho\sqrt{1 + (n \ln a)^2}$.

9. EXPRESION VECTORIAL DE LA CURVATURA

Consideremos una curva $\mathscr{C}$ referida a un sistema cartesiano y en cada uno de sus puntos P, P_1, ..., el vector $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_1$, ... tangente, de módulo 1 y con el sentido de los arcos crecientes.

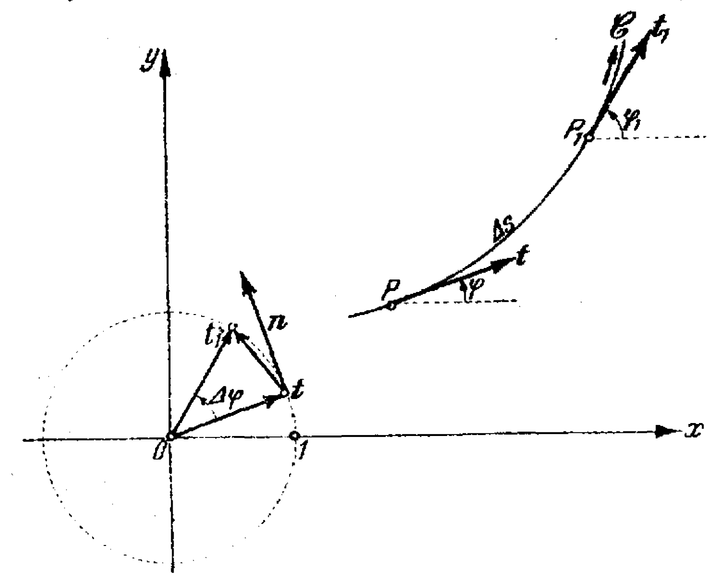


FIG. XII-10.

Calcularemos la derivada del vector $\mathbf{t}$ respecto del arco s.

Por el origen O de coordenadas trazamos sendos *vectores equipolentes* a $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_1$, ..., es decir, vectores de igual dirección, sentido e intensidad. Por consiguiente el lugar geométrico de estos vectores será una circunferencia de centro O y radio 1.

Si los ángulos que los vectores $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}_1$, ..., forman con el eje de las x son φ, φ_1, ..., el ángulo central determinado por los vectores equipolentes será $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$.

Evidentemente es $\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$. Pero el límite del cociente $\frac{\Delta \varphi}{\Delta s}$ es por definición la curvatura $C = \frac{1}{R}$ de la curva en P y el límite de $\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta \varphi}$ es un vector $\mathbf{n}$ unitario, tangente a la circunferencia y por consiguiente normal a $\mathbf{t}$ como lo muestra la figura 10. Resulta

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{n}.$$

Movimiento de un punto sobre una curva: Consideremos un punto móvil sobre una curva $\mathscr{C}$. A cada valor de t corresponde una posición del punto sobre la curva. Se define como *velocidad escalar* v el límite de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ cuando $\Delta t \to 0$, siendo Δs el arco correspondiente al intervalo de tiempo Δt. En la misma forma se define la *aceleración escalar* a como $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Por consiguiente es

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

La interpretación vectorial de estos conceptos nos permitirá obtener otros resultados.

Consideremos la curva $\mathscr{C}$ descripta por un punto $P(t)$. Si al cabo del tiempo Δt el punto ha pasado de P a P_1, el vector $(P - O)$ ha experimentado un incremento ΔP.

Definimos como *velocidad vectorial* $\mathbf{v}$ a la relación:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt}.$$

Fig. XII-11.

Como podemos escribir la definición de velocidad escalar,

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{|\Delta P|} \frac{|\Delta P|}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta P}{\Delta t} \right| = \left| \frac{dP}{dt} \right|$$

pues $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{|\Delta P|} = 1$, dado que el cociente entre el arco Δs y la cuerda $|\Delta P|$ tiende a 1, resulta que la velocidad escalar es el *módulo* de la *velocidad vectorial*.

Ya hemos visto que la derivada de un vector respecto de un escalar es un vector tangente a la trayectoria. Por consiguiente si $\mathbf{t}$

designa el vector unitario tangente a la trayectoria en el sentido de los arcos crecientes es

$$\mathbf{v} = v\mathbf{t}.$$

La aceleración vectorial **a** es, por definición, la derivada de la velocidad vectorial respecto del tiempo. Teniendo en cuenta la expresión de la curvatura $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{n}$, resulta

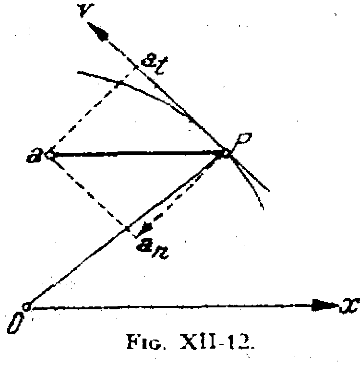


Fig. XII-12.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{t}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{dt} =$$

$$= a\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = a\mathbf{t} + v^2\frac{1}{R}\mathbf{n}.$$

lo cual muestra que mientras la velocidad escalar está dirigida en la dirección de la tangente, la aceleración vectorial tiene —en general— dos componentes:

Componente tangencial de la aceleración: $a_t = a$;

Componente normal de la aceleración: $a_n = \frac{v^2}{R}$,

donde v y a son la velocidad y aceleración escalares.

En particular si un punto se mueve sobre una circunferencia con movimiento circular *uniforme* es $a_t = 0$ y $a_n = \frac{v^2}{R}$ donde R es el radio de la circunferencia.

Componentes polares de la aceleración: Determinaremos las componentes de la aceleración según otras dos direcciones perpendiculares: una en la dirección del radio vector $(P - O)$ y otra en la dirección normal a este radio vector. La primera se designa con el nombre de *aceleración radial* a_r y la segunda con el nombre de *aceleración transversal* a_φ.

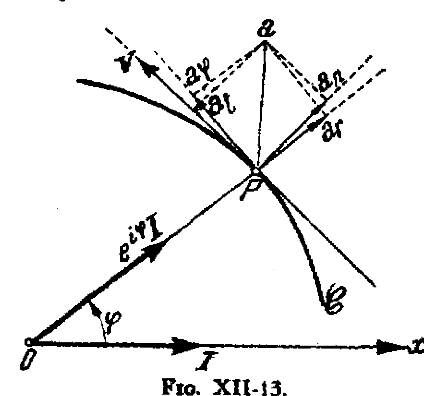


Fig. XII-13.

La ecuación vectorial de la trayectoria es [1]

$$P - O = re^{i\varphi}\mathbf{I}$$

donde **I** es el vector unitario en la dirección del eje polar y r y φ dos funciones variables con el tiempo.

---

(1) Téngase en cuenta la notación adoptada en la página 198.

Derivando 2 veces respecto del tiempo t resulta (si los acentos designan las derivadas respecto de esa variable):

$$\frac{dP}{dt} = r'e^{i\varphi}\,\mathbf{I} + rie^{i\varphi}\,\varphi'\,\mathbf{I},$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = r''e^{i\varphi}\,\mathbf{I} + 2r'ie^{i\varphi}\,\varphi'\,\mathbf{I} + rie^{i\varphi}\,\varphi''\,\mathbf{I} + ri^2e^{i\varphi}\,\varphi'^2\,\mathbf{I},$$

que se puede escribir

$$\mathbf{a} = \frac{d^2P}{dt^2} = (r'' - r\varphi'^2)e^{i\varphi}\,\mathbf{I} + (2r'\varphi' + r\varphi'')ie^{i\varphi}\,\mathbf{I}.$$

El vector $e^{i\varphi}\,\mathbf{I}$ es un vector unitario en la dirección $(P - O)$ y el vector $ie^{i\varphi}\,\mathbf{I}$ es el vector perpendicular al anterior. Resulta entonces que las componentes polares de la aceleración son:

$$a_r = r'' - r\varphi'^2, \quad a_\varphi = 2r'\varphi' + r\varphi''.$$

Movimiento central: Se denomina así al movimiento cuya aceleración está constantemente dirigida hacia un punto fijo O. Adoptando este punto como origen, la ecuación del movimiento central será:

$$a_\varphi = 0. \qquad [1]$$

Como además se puede escribir idénticamente

$$a_\varphi = 2r'\varphi' + r\varphi'' = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\varphi'),$$

resulta que la condición [1] equivale a la siguiente:

$$r^2\varphi' = \text{constante} = C.$$

Multiplicando por dt resulta

$$r^2d\varphi = C\,dt$$

y como el primer miembro representa el doble del elemento de área dS en coordenadas polares, se tiene

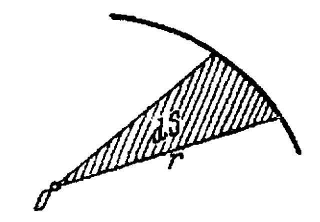


Fig. XII-14.

$$dS = \tfrac{1}{2}C\,dt = C'\,dt.$$

Las áreas barridas por el radio vector en un movimiento central son proporcionales a los tiempos (2ª ley de Kepler).

Como la expresión $\frac{dS}{dt}$ se llama *velocidad areolar*, se dice también que *en el movimiento central la velocidad areolar es constante*.

10. CIRCULO OSCULADOR

Dada una curva cuya ecuación en coordenadas cartesianas es $y = f(x)$, se trata de calcular la ecuación de una circunferencia de centro $C(\alpha, \beta)$ y radio R que además de pasar por un punto $P(x, y)$ de la curva, tenga en ese punto la misma derivada primera y' y la misma derivada segunda y'' que la curva dada. Esta circunferencia se llama *circunferencia osculatriz* o *círculo osculador*(1). Su ecuación será

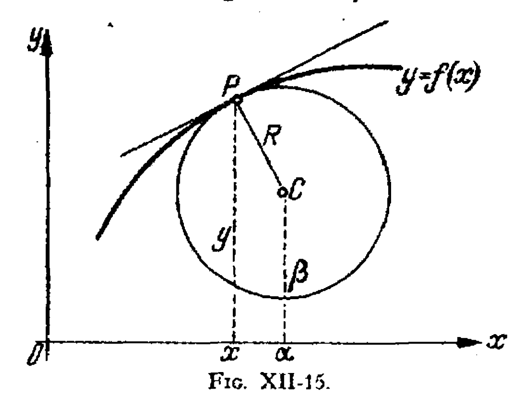


FIG. XII-15.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \quad [1]$$

y determinaremos los tres parámetros: α, β, R, en base a las tres condiciones que debe cumplir la circunferencia: para el valor x correspondiente a P, los valores de y, y', y'' deben coincidir con los de la curva dada.

Derivando respecto de x la expresión [1] resulta (después de simplificar por 2)

$$(x - \alpha) + (y - \beta)y' = 0. \qquad [2]$$

Derivando una segunda vez se tiene:

$$1 + y'^2 + (y - \beta)y'' = 0. \qquad [3]$$

Las relaciones [1], [2], [3], resuelven el problema. En efecto. de [3] se obtiene:

$$y - \beta = -\frac{1 + y'^2}{y''}.$$

De [2] y [3]:

$$x - \alpha = \frac{(1 + y'^2)y'}{y''}.$$

De [1], [2] y [3]:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \frac{(1 + y'^2)^2 y'^2}{y''^2} + \frac{(1 + y'^2)^2}{y''^2} =$$

$$= \frac{(1 + y'^2)^2(1 + y'^2)}{y''^2} = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2} = R^2 \ldots$$

(1) *Osculación* proviene del latín *osculari*, besar, de *osculum*, beso, propiamente boquita, boca pequeña, como diminutivo de *os*, boca.

y por consiguiente el radio del *círculo osculador* es:

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Esta expresión coincide precisamente con el radio de curvatura definido en el § 6 (pág. 424).

El signo R está dado por el signo de y'' pues la raíz del numerador se considera siempre positiva.

El punto C recibe el nombre de *centro de curvatura.*

EJEMPLO:

Hallar la ecuación del círculo osculador correspondiente a la parábola

$$y = x^2,$$

en el vértice.

Siendo $y' = 2x$; $y'' = 2$ resulta en el origen (0, 0): $y' = 0$; $y'' = 2$ y por consiguiente $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$, $R = \frac{1}{2}$.

En este caso también coincide en el origen la derivada tercera de la curva y del círculo pero no la derivada cuarta. Esto permite asegurar que el círculo osculador estará íntegramente dentro de la parábola.
(El lector verificará fácilmente estos resultados haciendo la representación gráfica).

EJERCICIOS:

1. Determinar el centro de curvatura de la curva

$$y = 2x^2$$

en el origen.

R: $\alpha = 0$; $\beta = \frac{1}{4}$.

2. Hallar los círculos osculadores correspondientes a la curva

$$y = \operatorname{sen} x$$

para $x = \frac{1}{4}\pi$; $x = \frac{1}{2}\pi$. ¿Qué sucede en $x = 0$? ¿Atraviesa el círculo osculador a la sinusoide en el punto $x = \frac{1}{4}\pi$? ¿y en el punto $x = \frac{1}{2}\pi$?

R: $\alpha = \frac{1}{4}\pi + \frac{3}{2}$, $\beta = -\sqrt{2}$, $R = \frac{3}{2}\sqrt{3}$; $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, $\beta = 0$, $R = 1$.

El círculo atraviesa la curva en el primer punto porque allí las y''' difieren y no lo atraviesa en el segundo porque tienen igual y'''.

3. Determinar el centro de curvatura de

$$y = 2\cos\frac{1}{2}x$$

en el punto de abscisa $x = 2\pi$.

R: $\alpha = 2\pi$; $\beta = 0$.

4. Verificar que en la catenaria el radio del círculo osculador es igual en valor absoluto a la normal N y proporcional al cuadrado de la ordenada.

R: $\frac{y^2}{a}$.

5. Determinar el centro de curvatura de la curva

$$x - y^2 = 2$$

en el punto (3, 1).

Verifíquese que el segmento determinado por el punto dado y el centro coincide con el radio de curvatura y que dicho centro pertenece a la normal a la curva en el punto dado.

R: $\alpha = \frac{11}{2}$; $\beta = -4$.

6. Verificar que el centro C del círculo osculador de la curva $y = f(x)$ en el punto P está sobre la normal a la curva en el punto P.

Solución: De acuerdo a las expresiones obtenidas para $(x - \alpha)$ e $(y - \beta)$ resulta dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{y - \beta}{x - \alpha} = - \frac{\frac{1 + y'^2}{y''}}{\frac{(1 + y'^2)\, y'}{y''}} = - \frac{1}{y'}.$$

El primer cociente mide la pendiente de la recta PC (ver fig. 15) y puesto que $-\frac{1}{y'}$ es la pendiente de la recta normal a la curva dada, la proposición queda demostrada.

7. Determinar el centro de curvatura de la hipérbola

$$y = \frac{6}{x}$$

en el punto de abscisa $x = 1$.

R: $\alpha = +19{,}5$; $\beta = \frac{109}{12}$.

8. Determinar el centro de curvatura de la hipérbola

$$x^2 - y^2 = a^2$$

en un punto cualquiera.

R: $\alpha = 2\frac{x^3}{a^2}$; $\beta = -2\frac{y^3}{a^2}$.

9. Determinar el centro de curvatura de la elipse

$$9x^2 + y^2 = 25$$

en el punto (1, 4).

R: $\alpha = -\frac{72}{25}$; $\beta = \frac{512}{225}$.

10. Determinar el centro de curvatura de la curva

$$2xy - y^2 = 4$$

en el punto $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$.

R: $\alpha = \frac{29}{9}$; $\beta = \frac{25}{12}$.

11. Verificar que el centro de curvatura de la parábola

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

en el punto $(a, 0)$ tiene coordenadas $\alpha = a$, $\beta = 2a$.

Verifíquese además que para cualquier punto de la curva se tiene

$$\alpha + \beta = 3(x + y).$$

12. Determinar el centro de curvatura de la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

en un punto cualquiera.

R: $\alpha = x - 3y^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$; $\beta = y - 3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$.

13. Determinar el centro de curvatura de la curva

$$y = \ln x$$

en el punto $(1, 0)$.

R: $\alpha = 3$; $\beta = -2$.

14. Determinar el centro de curvatura de la curva

$$y = \operatorname{tg} x$$

en el punto de abscisa $x = \frac{1}{4}\pi$.

R: $\alpha = \frac{1}{4}\pi - \frac{5}{2}$; $\beta = \frac{9}{4}$.

15. Determinar el centro de curvatura de la curva

$$y = e^x$$

en el punto de abscisa $x = 0$.

R: $\alpha = -2$; $\beta = 3$.

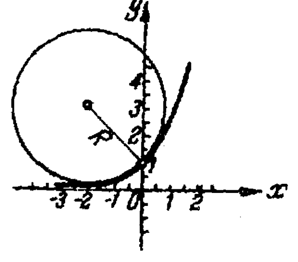


Fig. XII-16.

16. **Verificar que las coordenadas del centro y el radio del círculo osculador de una curva dada en forma paramétrica**

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

son

$$\alpha = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x' y'' - x'' y'};$$

$$\beta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x' y'' - x'' y'};$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x' y'' - x'' y'},$$

donde los acentos indican derivadas respecto del parámetro t.

CONSTRUCCIÓN GRÁFICA DEL CENTRO DE CURVATURA: Sea $y = f(x)$ una función continua con derivadas continuas cuya representación gráfica es una curva $\mathscr{C}$. Determinaremos el centro de curvatura en uno de sus puntos P.

Si trazamos la tangente PT y consideramos el segmento $PQ = 1$, resulta $TQ = y'$.

A partir de P tracemos $PM = y''$ en la dirección del eje de las ordenadas (y con el sentido dado por su signo). Desde M se traza una paralela a PT hasta cortar a la normal PC en L. Si ahora se une L con T y se traza $TC \perp LT$, se determina sobre la normal un punto C que es el centro de curvatura buscado.

En efecto, siendo

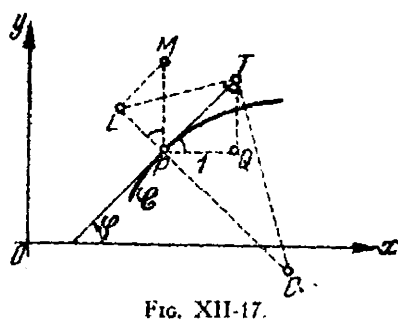


FIG. XII-17.

$$y' = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{es} \quad 1 + y'^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

y por consiguiente

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{1}{y'' \cos^3 \varphi}.$$

De acuerdo a la construcción efectuada en el triángulo PTQ es $PT = \frac{1}{\cos \varphi}$ y en el triángulo LMP, $LP = y'' \cos \varphi$.

Como el triángulo LTC es rectángulo en T, la altura PT es medio proporcional entre los segmentos que determina sobre la hipotenusa: $PT^2 = LP \cdot PC$, es decir $PC = \frac{PT^2}{LP} = \frac{1}{y'' \cos^3 \varphi} = R$ y por consiguiente C es el centro de curvatura.

11. EVOLUTA DE UNA CURVA. EVOLVENTE

Considerando el punto P variable sobre la curva se tendrán infinitos círculos osculadores. Los respectivos *centros* describirán una curva que se llama *evoluta*.

De acuerdo a los resultados anteriores las ecuaciones paramétricas de la evoluta son:

$$\alpha = x - \frac{(1 + y'^2)\, y'}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Para cada valor de x, el valor de y (y el valor de y' y el valor de y'') queda determinado por la ecuación de la curva.

Así se tendrá en el plano (α, β) una curva cuya pendiente será $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$.

La curva primitiva se llama también ***evolvente*** **de la curva** ***evoluta.***

EJEMPLOS:

1°) Verificar que la evoluta de la parábola de eje horizontal

$$y^2 = 2px$$

es una parábola semicúbica.

Siendo

$$y' = \frac{p}{y}; \qquad y'' = -\frac{p^2}{y^3}$$

es

$$\alpha = 3x + p$$

$$\beta = -\frac{y^3}{p^2}.$$

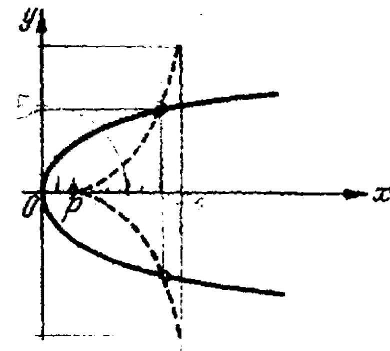


FIG. XII-18.

Despejando de estas expresiones x e y y reemplazándolas en la ecuación de la curva dada se obtiene la ecuación de la evoluta:

$$\beta^2 p = \frac{8}{27}(\alpha - p)^3$$

que en el plano (α, β) es una parábola semicúbica.

2°) Verificar que la evoluta a la curva:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) \\ y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t) \end{cases}$$

es una circunferencia de centro en el origen y radio a.

En efecto, designando con $\dot{x}$, $\dot{y}$ las derivadas de x e y respecto de t y conservando los acentos para las derivadas respecto de x, es

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a\, t \operatorname{sen} t}{a\, t \cos t} = \operatorname{tg} t,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (\operatorname{tg} t)^{\cdot} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{1}{a\, t \cos^3 t},$$

con lo que resulta la circunferencia en el plano (α, β):

$$\alpha = a(\cos t + t \operatorname{sen} t) - a\, t \operatorname{sen} t = a \cos t,$$

$$\beta = a(\operatorname{sen} t - t \cos t) + a\, t \cos t = a \operatorname{sen} t.$$

FIG. XII-19.

EJERCICIOS:

1. Verificar que las tangentes a la evoluta de una curva (llamada evolvente) son normales de la curva evolvente.
Solución: Por ser

$$\alpha = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''},$$

$$\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''},$$

resulta derivando respecto de x:

$$\frac{d\alpha}{dx} = 1 - y''\frac{(1+y'^2)}{y''} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right) =$$

$$= -y'\left[y' + \frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)\right],$$

$$\frac{d\beta}{dx} = y' + \frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right).$$

Dividiendo ordenadamente se tiene

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{y'}.$$

Pero $\frac{d\beta}{d\alpha}$ es la pendiente de la tangente a la evoluta y siendo $-\frac{1}{y'}$ la pendiente de la normal de la evolvente, la proposición queda demostrada.

2. Verificar que la evoluta de una cicloide engendrada por una circunferencia de radio r es otra cicloide igual que está desplazada de $r\pi$ en el sentido de las x positivas y de $2r$ en el sentido de las y negativas.

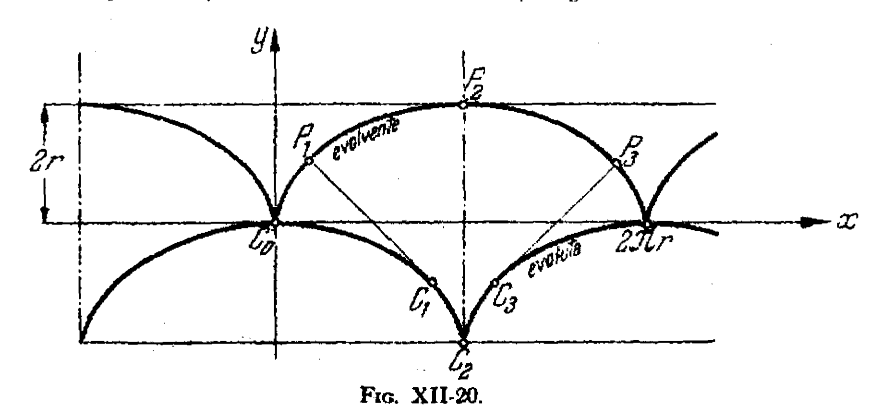


FIG. XII-20.

Solución: Siendo la expresión de la cicloide

$$\begin{cases} x = r(t - \operatorname{sen} t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

resulta, indicando con puntos las derivadas respecto de t y con acentos las derivadas respecto de x:

$$\dot{x} = r(1 - \cos t),$$

$$\dot{y} = r \operatorname{sen} t;$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}\right)\frac{1}{r(1 - \cos t)} = -\frac{1}{r(1 - \cos t)^2}$$

y se obtiene:

$$\alpha = r(t + \operatorname{sen} t),$$

$$\beta = -r(1 - \cos t).$$

Si en estas expresiones que dan las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la cicloide, hacemos $t = \pi + \tau$, se obtiene, con τ como nuevo parámetro

$$\alpha = r\pi + r(\tau - \operatorname{sen} \tau)$$

$$\beta = -r(1 + \cos \tau) = -2r + r(1 - \cos \tau)$$

que es una cicloide desplazada respecto de la primitiva de $r\pi$ según el eje de las x positivas y de $2r$ según el eje de las y negativas.

3. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la epicicloide

$$\begin{cases} x = (R + r) \cos \dfrac{r}{R} t - r \cos \dfrac{R + r}{R} t \\[2ex] y = (R + r) \operatorname{sen} \dfrac{r}{R} t - r \operatorname{sen} \dfrac{R + r}{R} t. \end{cases}$$

Verificar que es otra epicicloide reducida en la relación $\dfrac{R}{R + 2r}$ después de girar la magnitud $\pi \dfrac{R}{r}$.

4. Idem de la hipocicloide

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos \dfrac{r}{R} t - r \cos \dfrac{R - r}{R} t \\[2ex] y = (R - r) \operatorname{sen} \dfrac{r}{R} t - r \operatorname{sen} \dfrac{R - r}{R} t. \end{cases}$$

Verificar que es otra hipocicloide ampliada en la relación $\dfrac{R}{R - 2r}$ después de girar la magnitud $-\pi \dfrac{r}{R}$.

5. **Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva**

$$\begin{cases} x = a\cos t + (at - b)\,\text{sen}\, t \\ y = a\,\text{sen}\, t - (at - b)\cos t. \end{cases}$$

R: $\alpha = a\cos t,\ \beta = a\,\text{sen}\, t.$

6. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = 2t, \qquad y = 3t^2.$$

R: $\alpha = -12t^3;\ \beta = 9t^2 + \frac{3}{2}.$

7. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = 2t, \qquad y = 1 - t^2.$$

R: $\alpha = -2t^3;\ \beta = -3t^2 - 1.$

8. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = 1 - t^2, \qquad y = 2t.$$

R: $\alpha = -1 - 3t^2;\ \beta = -2t^3.$

9. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = \frac{1}{t}, \qquad y = \frac{1}{2}t.$$

R: $\alpha = \frac{1}{8}t^3 + \frac{3}{2}\,\frac{1}{t};\ \ \beta = \frac{3}{4}t + \frac{1}{t^3}.$

10. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = t^2, \qquad y = 2t^3.$$

R: $\alpha = -t^2(1 + 18t^2);\ \ \beta = 8t^3 + \frac{2}{3}t.$

11. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = t^2, \qquad y = 2 - t.$$

R: $\alpha = 3t^2 + \frac{1}{2};\ \ \beta = 4t^3 + 2.$

12. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = 2t^2, \qquad y = \frac{1}{3}t^3.$$

R: $\alpha = -t^2(2 + t^2);\ \ \beta = \frac{13}{3}t^3 + 16t.$

13. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva

$$x = \text{sen}\, t, \qquad y = t.$$

R: $\alpha = -2\cos t\ \text{cotg}\, t;\ \ \beta = t + \text{cotg}\, t\,(1 + \cos^2 t).$

14. **Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la hipérbola:**

$$x = \sec t, \qquad y = \operatorname{tg} t.$$

R: $\alpha = 2 \sec^3 t$; $\beta = -2 \operatorname{tg}^3 t$.

15. **Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la elipse:**

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

R: $\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t$;

$\beta = \dfrac{b^2 - a^2}{b} \operatorname{sen}^3 t$.

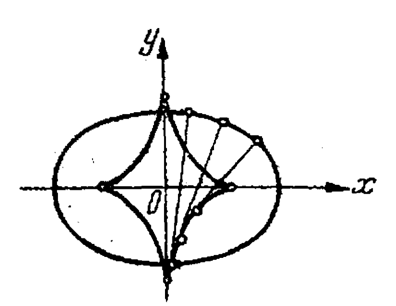


Fig. XII-21.

16. **Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la astroide**

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$$

R: $\alpha = a \cos t\,(3 - 2 \cos^2 t)$, $\beta = a \operatorname{sen} t\,(3 - 2 \operatorname{sen}^2 t)$.

17. Dada una curva en coordenadas polares $\varrho = \varrho(\vartheta)$ determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta.

Solución: Recordando que la pendiente de una curva es $\varphi = \operatorname{arc\,tg} y'$ resulta

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2} \qquad y \qquad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{y''}{(1 + y'^2)\, y'}.$$

Reemplazando en las ecuaciones paramétricas de la evoluta, se tiene:

$$\alpha = x - \frac{dy}{d\varphi}, \quad \beta = y + \frac{dx}{d\varphi}$$

y como las coordenadas polares y cartesianas están vinculadas por las relaciones:

$$x = \varrho \cos \vartheta, \qquad y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta,$$

resulta

$$\alpha = \varrho \cos \vartheta - \frac{(\varrho \operatorname{sen} \vartheta)'}{\varphi'}, \quad \beta = \varrho \operatorname{sen} \vartheta + \frac{(\varrho \cos \vartheta)'}{\varphi'}.$$

$\left[\text{Recuérdese que } \varphi = \vartheta + \psi = \vartheta + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\varrho'}{\varrho}\right]$

18. Determinar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la lemniscata

$$\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta.$$

R: $\alpha = \dfrac{2a^2}{3\varrho} \cos^3 \vartheta$, $\beta = -\dfrac{2a^3}{3\varrho} \operatorname{sen}^3 \vartheta$.

12. VOLUMEN DE UN SOLIDO

Consideremos un cuerpo tridimensional referido a una terna cartesiana (x, y, z). La determinación de su volumen se hace mediante integrales dobles o triples, que no se consideran en este tomo, pero en algunos casos particulares se podrá calcular mediante integrales simples.

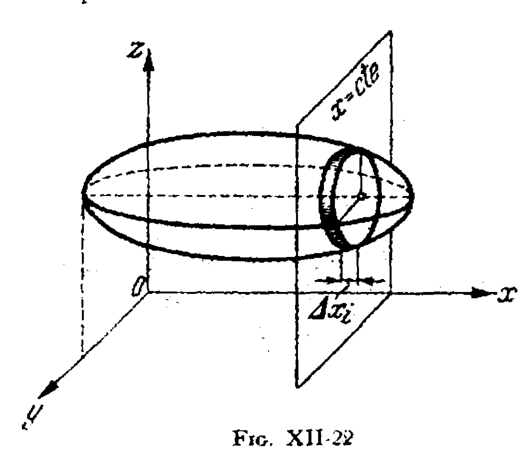


FIG. XII-22

Tal es lo que ocurre cuando la sección del cuerpo con el plano x_i = constante, es una figura cuya área $\varphi(x_i)$ se puede determinar como función de x. Dividimos entonces el intervalo (x_0, x_n) en partes iguales o desiguales de amplitud Δx_i. Si se multiplica el área $\varphi(x_i)$ por Δx_i, se obtiene el volumen de un cilindro elemental como el dibujado en la figura; sumando todos estos volúmenes elementales y pasando al límite se obtiene como expresión del volumen total una integral definida:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\,\Delta x_i = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(x)\,dx.$$

Fórmulas análogas se obtienen considerando las secciones con los planos $y = constante$, o $z = constante$.

EJEMPLO:

Calcular el volumen del elipsoide de semiejes a, b, c:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Cortando con el plano x = constante, resulta como sección la elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

que podemos escribir

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Los semiejes son: $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

Como ya se ha visto en la página 372 el área de esta elipse se obtiene multiplicando los semiejes por π. Luego es

$$\varphi(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

y el volumen resulta

$$V = \pi bc \int_{-a}^{+a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx,$$

debiendo ser los límites de integración los valores $-a$ y $+a$ pues sólo entre ellos existen valores reales de $\varphi(x)$. Se tiene entonces:

$$V = \pi bc\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{+a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

En particular, si $a = b = c = r$ se obtiene el volumen de la esfera $\frac{4}{3}\pi r^3$.

EJERCICIOS:

1. Calcular el volumen del paraboloide elíptico

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = x$$

para x variando de 0 a h.

R: $\frac{1}{2}\pi bch^2$.

Calcular el volumen determinado por las superficies siguientes y los planos indicados:

2. $z = x^2 + 4y^2$; $z = 1$. R: $\frac{1}{4}\pi$.

3. $4x^2 + 9z^2 + y = 0$; $y = -1$. R: $\frac{1}{12}\pi$.

4. $25y^2 + 9z^2 = 1 + x^2$; $x = 0$, $x = 2$. R: $\frac{14}{45}\pi$.

5. $z^2 = x^2 + 9y^2$; $z = -1$. R: $\frac{1}{9}\pi$.

6. Calcular el volumen del sólido limitado por el hiperboloide de una hoja

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1$$

y los planos $x = 0$, $x = a$.

R: $\frac{4}{3}\pi abc$.

7. Calcular el volumen del sólido determinado por el hiperboloide de dos hojas

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$

y el plano $x = 2a$.

R: $\frac{4}{3}\pi abc$.

13. VOLUMEN DE UN SOLIDO DE REVOLUCION

Si consideramos un arco AB correspondiente a una función $y = f(x)$, definida en un intervalo (a, b) y suponemos que esta curva gira alrededor del eje de las x, será fácil determinar el volumen del sólido de revolución así obtenido.

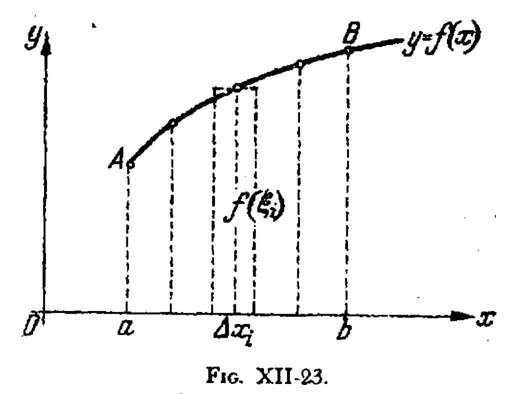


Fig. XII-23.

Dividiendo el intervalo (a, b) en n partes y considerando en cada uno de los intervalos así limitados un punto ξ_i, quedará determinado el volumen elemental del cilindro engendrado al girar el rectángulo de base Δx_i y altura $f(\xi_i)$:

$$\pi f(\xi_i)^2 \Delta x_i .$$

Un valor aproximado del volumen total será:

$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i$$

y el límite de esta suma, si existe, cuando $n \to \infty$ y cada intervalo parcial tiende a cero, es por definición el volumen del sólido de revolución, que se podrá escribir

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Ejemplos:

1°) Calcular el volumen engendrado por un arco de sinusoide

$$y = \operatorname{sen} x$$

para x comprendido entre 0 y π

Es $V = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}\pi \left[x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x \right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2.$

2°) Calcular el volumen engendrado por un arco completo de cicloide al girar alrededor del eje x.

Siendo

$$x = r(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = r(1 - \cos t) \qquad \text{es}$$

$$y^2 = r^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t); \qquad dx = r(1 - \cos t)dt$$

y se tiene

$$V = \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t - 2\cos t)(1 - \cos t)dt =$$

$$= \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt =$$

$$= \pi r^3 \left[t - 3\,\text{sen}\,t + \frac{3}{2}(t + \text{sen}\,t\,\cos t) - \text{sen}\,t + \frac{1}{3}\text{sen}^3\,t \right]_0^{2\pi} = 5\pi^2 r^3.$$

3°) **Calcular el volumen del toro**

El toro es un cuerpo que se obtiene mediante la rotación de un círculo alrededor de un eje que no lo atraviesa. Si el centro O_1 del círculo está sobre el eje de las ordenadas a una distancia $a > r$, la ecuación de la curva será

$$x^2 + (y - a)^2 = r^2.$$

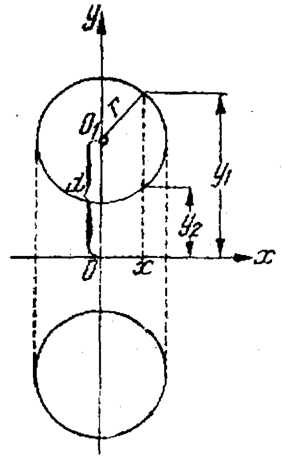
Resulta entonces

$$(y - a) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

A cada valor de x corresponden 2 valores de y:

$$y_1 = a + \sqrt{r^2 - x^2};$$

$$y_2 = a - \sqrt{r^2 - x^2}.$$



Restando los volúmenes de los cuerpos descriptos por estas 2 semicircunferencias, obtendremos el volumen del toro:

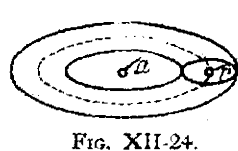


Fig. XII-24.

$$V = \pi \int_{-r}^{+r} y_1^2\,dx - \pi \int_{-r}^{+r} y_2^2\,dx =$$

$$= \pi \int_{-r}^{+r} 4a\sqrt{r^2 - x^2}\,dx =$$

$$= 2\pi a \left[x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \,\text{arc sen}\,\frac{x}{r} \right]_{-r}^{+r} = 2\pi^2 a r^2.$$

Podemos escribir

$$V = (\pi r^2) \cdot (2\pi a)$$

y resulta que el volumen de un toro es igual al producto del área del círculo generador por la longitud de la circunferencia descripta por su centro O_1 en su rotación alrededor del eje. Este es un caso particular de un teorema de Guldin (o de Papus) que luego veremos en la página 485.

Evidentemente si se considera que la curva gira alrededor del eje y, la fórmula para calcular el volumen engendrado en la rotación será:

$$V = \int_c^d g(y)^2\,dy,$$

donde $g(y)$ es la ecuación de la curva y c y d los valores extremos sobre el eje de las ordenadas.

Si la rotación se efectúa alrededor de una recta cualquiera habrá que calcular la distancia de un punto variable de la curva a la recta eje para hallar los volúmenes elementales y luego proceder a la integración.

EJEMPLO:

Calcular el volumen engendrado por la parábola

$$y = 2 + 4x - x^2$$

al girar alrededor de la recta $y = 2$.

Siendo $(y - 2)$ la distancia de un punto (x, y) de la parábola a la recta $y = 2$, resulta:

$$V = \pi\int_0^4 (y-2)^2\,dx = \pi\int_0^4 (4x - x^2)^2\,dx = \pi\int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4)\,dx = \frac{512}{15}\pi.$$

EJERCICIOS:

1. Verificar que el volumen del cono truncado generado por la recta

$$y = x + 1$$

al girar alrededor del eje x y limitado por las ordenadas de $x = 1$, $x = 4$ es 39π.

2. Calcular el volumen de la esfera generada por la revolución del círculo

$$x^2 + y^2 = r^2$$

alrededor de un diámetro.

R: $\frac{4}{3}\pi r^3$.

3. Verificar que el volumen generado por la hipérbola

$$x^2 - y^2 = a^2$$

al girar alrededor del eje x desde $x = 0$ a $x = a$, es igual al volumen de una esfera de radio a.

4. Calcular el volumen engendrado por una onda de la curva

$$y = \operatorname{sen} 2x$$

al girar alrededor del eje x.

R: $\frac{1}{4}\pi^2$.

5. Verificar que el volumen generado por la revolución de una semionda de la curva

$$y = b \operatorname{sen} \frac{x}{a}$$

alrededor del eje x es igual a la mitad del volumen del cilindro circunscripto.

6. Calcular el volumen engendrado por el área limitada por la curva

$$y = \sec \frac{1}{2} \pi x$$

el eje x y las rectas $x = \pm \frac{1}{2}$, al girar alrededor del eje x.

R: 4.

7. Calcular el volumen engendrado por la parábola cúbica

$$y = x^3$$

al girar alrededor de los ejes, entre $x = 0$ y $x = 2$.

R: $V_x = \frac{128}{7}\pi$; $V_y = \frac{96}{5}\pi$.

8. Dado el segmento esférico de altura h perteneciente a la esfera de radio r, hallar por integración que su volumen es $\frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$.

9. Calcular el volumen engendrado por la parábola

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant a,$$

al girar alrededor del eje x.

R: $\frac{1}{15}\pi a^3$.

10. Determinar el volumen engendrado por la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

al girar alrededor del eje x. Verifíquese calculando el volumen generado al girar la curva alrededor del eje y.

R: $\frac{32}{105}\pi a^3$.

11. Calcular el volumen generado por la revolución alrededor del eje x, del área limitada por las curvas

$$y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

R: $\frac{1}{2}\pi(1 - e^{-4})$.

Hallar el volumen generado por la revolución alrededor del eje x de las áreas limitadas por:

32. El área limitada por las parábolas

$$y^2 = 4x,$$

$$y^2 = 5 - x,$$

gira alrededor de los ejes de coordenadas. Calcular los volúmenes que engendra.

R: 10π; $\frac{176}{3}\pi$.

33. Calcular el volumen generado por la hipocicloide (astroide)

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a \operatorname{sen}^3 t, \end{cases}$$

al girar alrededor del eje x. Compárese el resultado con el obtenido en el ejercicio 10.

34. Calcular el volumen engendrado por un arco de la cicloide

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

al girar alrededor del eje y.

R: $6\pi^3 a^3$.

35. Dada la curva

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = 4t - t^3, \end{cases}$$

calcular el área del bucle y el volumen generado por dicha área al girar alrededor del eje x.

R: $A = \frac{256}{15}$; $V = \frac{64}{3}\pi$.

36. Calcular el volumen generado por la curva

$$y^2 = x^3$$

al girar alrededor de la recta $x = 4$.

R: $\frac{2048}{35}\pi$.

37. Calcular el volumen generado por la parábola

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$$

al girar alrededor de la recta $x + y = 1$.

Solución: Siendo la distancia d de un punto (ξ, η) de la parábola $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$,

a la recta $x + y - 1 = 0$, igual a $d = \frac{\xi + \eta - 1}{\sqrt{2}}$ y la altura del cilindro elemental $\sqrt{2}\, d\xi$, resulta:

$$V = \pi \int_0^1 d^2 \sqrt{2}\, d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi \int_0^1 (\xi + \eta - 1)^2 d\xi =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 \xi^2 + (1 - 2\sqrt{\xi} + \xi)^2 + 1 + 2\xi(1 - \sqrt{\xi})^2 - 2\xi - 2(1 - \sqrt{\xi})^2 d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{30}.$$

38. Calcular el volumen engendrado por la hipérbola

$$xy = 4$$

al girar alrededor de la recta $x + y = 5$.

R: 2.28.

39. La ecuación de la parábola representada en la figura es

$$y = x^2.$$

Calcular el volumen generado cuando el área

a) OAB gira alrededor del eje x; R: $\frac{32}{5}\pi$.

b) OAB „ „ de AB; R: $\frac{8}{3}\pi$.

c) OAB „ „ „ CA; R: $\frac{224}{15}\pi$.

d) OAB „ „ del eje y; R: 8π.

e) OAC „ „ „ „ „ R: 8π.

f) OAC „ „ de CA; R: $\frac{256}{15}\pi$.

g) OAC „ „ „ AB; R: $\frac{40}{3}\pi$.

h) OAC „ „ del eje x: R: $\frac{128}{5}\pi$.

Fig. XII-26.

40. Calcular el volumen engendrado por la cardioide

$$\varrho = 2(1 - \cos\vartheta)$$

al girar alrededor del eje polar.

Solución: Por ser $x = \varrho\cos\vartheta$; $y = \varrho\,\text{sen}\,\vartheta$ resulta:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_\alpha^\beta \varrho^2\,\text{sen}^2\,\vartheta\,(\varrho'\cos\vartheta - \varrho\,\text{sen}\,\vartheta)\,d\vartheta.$$

En nuestro caso

$$V = \pi \int_\pi^0 4(1-\cos\vartheta)^2 \operatorname{sen}^2\vartheta\,(4\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta - 2\operatorname{sen}\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= 8\pi \int_\pi^0 (1 - 2\cos\vartheta + \cos^2\vartheta)\operatorname{sen}^3\vartheta\,(2\cos\vartheta - 1)\,d\vartheta =$$

$$= 8\pi \int_\pi^0 (4\cos\vartheta - 1 - 5\cos^2\vartheta + 2\cos^3\vartheta)\,(1-\cos^2\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= 8\pi \int_\pi^0 (1 - 4\cos\vartheta + 4\cos^2\vartheta + 2\cos^3\vartheta - 5\cos^4\vartheta + 2\cos^5\vartheta)\,d(\cos\vartheta) =$$

$$= 8\pi\left[\cos\vartheta - 2\cos^2\vartheta + \frac{4}{3}\cos^3\vartheta + \frac{1}{2}\cos^4\vartheta - \cos^5\vartheta + \frac{1}{3}\cos^6\vartheta\right]_\pi^0 = \frac{64}{3}\pi.$$

41. Calcular el volumen generado por la revolución alrededor del eje x de la curva

$$y = e^{-x}$$

desde $x = 0$ hasta $x = \infty$.

R: $\frac{1}{2}\pi$

42. Calcular el volumen engendrado por la curva

$$y = xe^{-x}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \infty,$$

al girar alrededor del eje x.

R: $\frac{1}{4}$

43. Calcular el volumen generado por la revolución alrededor del eje x de la curva $y^4(1-x) = 1$ desde el origen hasta $x = 1$.
R: 2π.

14. AREA DE UN SOLIDO DE REVOLUCION

Sea AB una curva plana, rectificable, correspondiente a una función $y = f(x)$, en un intervalo (a, b) y consideremos el sólido engendrado por la revolución de esta curva alrededor del eje de las abscisas.

Siendo la curva rectificable puede tomarse como variable el arco s, contado a partir de un origen arbitrario fijo. Así, las coordenadas x e y de un punto cualquiera serán funciones continuas de s.

El área de la superficie engendrada por la porción de curva comprendida entre los puntos extremos de abscisas a y b es, por definición, el límite del área engendrada por la revolución de un polígono inscripto en la curva, cuando tienden a cero las longitudes de los lados del polígono.

Llamaremos s_1 y s_{n+1} los valores del arco s correspondientes a los puntos extremos del arco de curva considerado y señalaremos sobre dicho arco una sucesión de puntos en los cuales s toma los valores $s_2, s_3, \ldots, s_n$.

Sean x_i e y_i las coordenadas del punto de la curva correspondiente al valor s_i del arco.

Inscribamos en la curva el polígono cuyos vértices sean los puntos antes señalados y sea c_i el segmento que une los puntos de coordenadas (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}). Este segmento, al girar alrededor del eje x, engendra la superficie lateral de un tronco de cono, cuya área está dada por

$$2\pi \frac{y_i + y_{i+1}}{2} c_i. \qquad [1]$$

Evidentemente, el área engendrada por el polígono entero se obtendrá sumando todas las expresiones análogas a la [1], correspondientes a todos los c_i; se tendrá, pues,

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} c_i,$$

expresión que, por suma y resta de un mismo valor, puede escribirse

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} (s_{i+1} - s_i) - 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} [(s_{i+1} - s_i) - c_i] \qquad [2]$$

Llamando M al máximo valor de y en el intervalo considerado, y teniendo en cuenta que c_i es la cuerda del arco $s_{i+1} - s_i$ y que, por lo tanto, los corchetes que figuran en la segunda sumatoria son siempre positivos, puede asegurarse que esta segunda sumatoria será menor que

$$2\pi M \sum_{i=1}^{n} [(s_{i+1} - s_i) - c_i] = 2\pi M \left[s_{n+1} - s_1 - \sum_{i=1}^{n} c_i\right].$$

Como el arco $s_{n+1} - s_1$ es, por definición, el límite del perímetro, $\sum_{i=1}^{n} c_i$, del polígono inscripto, cuando c_i tiende a cero esta expresión también tenderá a cero. Por tanto, el área de la superficie de revolución que buscamos calcular será igual al límite de la primera sumatoria de [2].

Siendo $\frac{y_i + y_{i+1}}{2}$ un valor medio de y en el intervalo (s_i, s_{i+1}), en el límite tendremos que el área A será

$$A = 2\pi \int_{s_1}^{s_{n+1}} y \, ds.$$

Según que la curva esté expresada en coordenadas cartesianas, paramétricas o polares se tendrán las siguientes expresiones del área:

(I) $$A = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

(II) $$A = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

(III) $$A = 2\pi \int_\alpha^\beta \varrho \operatorname{sen} \vartheta \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\, d\vartheta.$$

Ejemplos:

1°) **Calcular el área de la superficie de revolución engendrada por la curva**

$$4y = x^2 - 2 \ln x, \quad \text{para} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2,$$

al girar alrededor del eje x.

Como es $y' = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ resulta $1 + y'^2 = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, es decir

$$ds = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) dx.$$

Se tiene entonces

$$A = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_1^2 (x^2 - 2 \ln x)\left(x + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\pi\left[\frac{1}{4}x^4 + x^2 - x^2 \ln x - (\ln x)^2\right]_1^2 - \frac{3}{4}\pi.$$

2°) Calcular el área de la superficie generada por la rotación alrededor del eje x de la cardioide:

$$\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t). \end{cases}$$

Resulta $ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2(8 - 8 \cos t) = 16a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t$ y el área será

$$A = 2\pi \int_0^\pi a(2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)\, 4a \operatorname{sen} \frac{1}{2}t\, dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^\pi \left[4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t \cos \frac{1}{2}t - 4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t \cos \frac{1}{2}t \left(\cos^2 \frac{1}{2}t - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t\right)\right] \operatorname{sen} \frac{1}{2}t\, dt =$$

$$= 64\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{sen}^2 t \cos t - \operatorname{sen}^2 t \cos^3 t + \operatorname{sen}^4 t \cos t\right] dt = \frac{128}{5}\pi a^2.$$

3°) Calcular el área de la superficie generada por la rotación de la curva

$$\varrho = 4 \cos \vartheta,$$

al girar alrededor del eje x, al variar ϑ de 0 a $\frac{1}{2}\pi$.

Como es $\varrho'^2 + \varrho^2 = 4^2$ es $ds = 4d\vartheta$ y el área resulta:

$$A = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho \operatorname{sen} \vartheta \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}\, d\vartheta = 32\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta\, d\vartheta$$

$$= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2\vartheta\, d2\vartheta = 16\pi.$$

Es fácil verificar que el resultado es correcto pues la curva es una semicircunferencia de radio 2 y el área engendrada será una esfera del mismo radio.

EJERCICIOS:

1. Calcular la superficie del cono generado por la rotación alrededor del eje x de la recta $y = 3x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

   R: $48\sqrt{10}\pi$.

2. Idem alrededor del eje y.

   R: $16\sqrt{10}\pi$.

3. Calcular el área lateral del tronco de cono generado por la rotación alrededor del eje x de la recta $3y = -2x + 6$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

   R: $\frac{20}{9}\sqrt{13}\pi$.

4. Calcular la superficie del cono generado por rotación alrededor del eje x de la recta que une el origen con el punto (x_1, y_1).

   R. $\pi y_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

5. Idem alrededor del eje y.

   R: $\pi x_1\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

   [Nótese que si m es la pendiente de la recta, las áreas verifican la relación: $\frac{A_x}{A_y} - m$].

6. Calcular por integración la superficie de la esfera generada por la rotación del círculo de radio r alrededor de un diámetro.

   R: $4\pi r^2$.

7. Calcular el área de la esfera generada por la revolución alrededor de un diámetro del círculo de radio $r = 3$.

   R: 36π.

8. Calcular el área de la superficie generada por la revolución alrededor del eje x del arco de la curva

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

   desde $x = 1$ hasta $x = 3$.

   R: $\frac{208}{9}\pi$.

9. Calcular el área de la superficie generada por la rotación alrededor del eje x del arco de la curva $y = x^2$ comprendido entre $x = 0$ y $x = 3$.

   R: $\frac{1}{3}\pi(37\sqrt{37} - 1)$.

10. Determinar el área de la superficie de revolución generada por la curva $y^2 = x$ al girar alrededor del eje x en el intervalo $(0, 4)$.

   R: $\frac{62}{3}\pi$.

11. Calcular el área de la superficie generada por la rotación de la parábola $y^2 = 9 - x$ al girar el arco correspondiente al primer cuadrante, alrededor del eje x.

R: 128,17.

12. Calcular el área de la superficie generada por la rotación alrededor del eje y de la curva $8x = y^4$ desde $y = 0$ hasta $y = 2$.

R: $\dfrac{\pi}{108}(17\sqrt{34} - 32)$.

13. Determinar el área de la superficie de revolución generada por la curva $y = x^3$ al girar alrededor de los ejes en el intervalo $(0,\ 1)$.

R: $A_x = 1{,}134\,\pi$; $A_y = 3{,}4\,\pi$.

14. Calcular el área de la superficie de revolución engendrada por la curva

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

al girar alrededor de los ejes desde el origen hasta $x = 1$.

R: $A_x = \dfrac{1}{2}\pi\,(2 + \operatorname{Sh} 2)$; $A_y = 2\pi\,(1 - e^{-1})$.

15. Calcular el área del elipsoide generado por la revolución, alrededor del eje x, de la elipse:

$$x = a\cos t, \qquad y = b \operatorname{sen} t, \qquad [1]$$

con $a > b$.

Solución: Siendo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t =$$
$$= \cos^2 t\,(b^2 - a^2) + a^2 = (1 - k^2 \cos^2 t)a^2,$$

si es $k^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}$, la mitad del área del cuerpo engendrado resulta:

$$\frac{1}{2}A = 2\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t\sqrt{1 - k^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= -2\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\cos^2 t}\; d(\cos t) =$$

$$= \frac{ab\,\pi}{k}\left(k\sqrt{1 - k^2} + \operatorname{arc\,sen} k\right) =$$

$$= \pi\left(b^2 + ab\frac{\operatorname{arc\,sen} k}{k}\right)$$

y el área total será:

$$A = 2\pi\left(b^2 + ab\frac{\operatorname{arc\,sen} k}{k}\right).$$

16. Calcular el área del elipsoide generado por la revolución de la elipse [1] con $a < b$ alrededor del eje x.
$\left[\text{Téngase en cuenta que la excentricidad es } k^2 = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2}\right]$

R: $2\pi\left[b^2 + \dfrac{ab}{k}\ln\left(k + \sqrt{1 + k^2}\right)\right] = 2\pi\left[b^2 + \dfrac{ab}{k}\operatorname{Arg\,Sh} k\right]$.

17. Calcular el área del elipsoide generado por la revolución alrededor del eje x de la elipse

$$12x^2 + 16y^2 = 120.$$

R: $52{,}96\,\pi$.

18. Calcular el área del elipsoide de revolución generado por la rotación de la elipse de semiejes a y b alrededor del eje y.

R: $2\pi\left(a^2 + \dfrac{b^2}{k}\operatorname{Arg\,Th} k\right) = 2\pi a^2 + \dfrac{b^2}{k}\pi\ln\dfrac{1 + k}{1 - k}$.

19. Calcular el área de la superficie generada por la rotación alrededor del eje x de la curva $y = e^{-x}$ desde $x = 0$ hasta $x = \infty$.

R: $\pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$.

20. Calcular el área de la superficie de revolución generada por la rotación de la astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

alrededor del eje x.
(Obsérvese que la integral a resolver es impropia y procédase como se indicó en la pág. 395).

R: $\dfrac{12}{5}\pi a^2$.

21. Calcular el área de la superficie engendrada por la rotación alrededor del eje x de una onda (*bucle*) de la curva

$$8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4.$$

R: $\dfrac{1}{4}\pi a^2$.

22. Calcular el área de las superficies generadas por la rotación alrededor de los ejes de la curva

$$6a^2xy = x^4 + 3a^4$$

desde $x = a$ hasta $x = 2a$.

R: $A_x = \dfrac{47}{16}\pi a^2;\ \ A_y = \dfrac{\pi}{a^2}\left(\dfrac{15}{4} + \ln 2\right)$

23. Calcular el área de la superficie generada por la rotación alrededor del eje x de una onda de la curva

$$y = \operatorname{sen} x.$$

Solución:

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx =$$

$$= -\,2\pi \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,d(\cos x).$$

Haciendo la sustitución $z = \cos x$ el nuevo intervalo de integración resulta $(1, -1)$ y tenemos:

$$A = -\,2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + z^2}\,dz = -\,2\pi \left[\frac{1}{2} z\sqrt{1 + z^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arg\,Sh} z\right]_1^{-1} =$$

$$= 2\pi\,(\sqrt{2} + \operatorname{Arg\,Sh} 1) = 2\pi\left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(3 + 2\sqrt{2})\right] \sim 14{,}4.$$

24. Verificar que el área de una zona esférica de radio r es $2\pi rh$.

(Considérese la zona generada por la revolución alrededor del eje x, del arco $y^2 = r^2 - x^2$ desde $x = c$ hasta $x = c + h$).

25. Calcular el área de la superficie generada por el círculo

$$\begin{cases} x = 6 + 4\operatorname{sen} 2t, \\ y = 4 - 4\cos 2t, \end{cases}$$

al girar alrededor de los ejes coordenados desde $t = 0$ hasta $t = \pi$.

R: $A_x = 64\pi^2$; $A_y = 96\pi^2$.

26. Calcular el área de la superficie generada por la rotación de la cicloide (una onda)

$$\begin{cases} x = r(t - \operatorname{sen} t), \\ y = r(1 - \cos t), \end{cases}$$

alrededor del eje x.

R: $\frac{64}{3}\pi a^2$.

27. El toro se genera por la revolución de un círculo de radio a alrededor de una recta de su plano a distancia b del centro $(b > a)$. Demostrar que su área es $4\pi^2 ab$.

(Hágase girar alrededor del eje y el arco $x = b + a\cos t$; $y = a\operatorname{sen} t$ de $t = 0$ a $t = 2\pi$).

28. Calcular el área de la superficie generada por la astroide

$$\begin{cases} x = \cos^3 x, \\ y = \operatorname{sen}^3 x, \end{cases}$$

al girar el arco comprendido en el primer cuadrante, alrededor del eje x.

R: $\frac{6}{5}\pi$.

29. Idem alrededor del eje y.

R: $\frac{6}{5}\pi$.

30. Calcular el área de la superficie generada por la rotación de la curva

$$\begin{cases} x = 4 + 3t^2, \\ y = 6 - 4t^2, \end{cases}$$

alrededor de los ejes de coordenadas, de $t = 0$ a $t = 1$. Trácese el gráfico y verifíquense geométricamente los resultados.

R: $A_x = 40\pi$; $A_y = 55\pi$.

31. Calcular el área de la superficie generada por la rotación, alrededor de cada eje, de la curva

$$\begin{cases} x = e^t \operatorname{sen} t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases}$$

desde $t = 0$ hasta $t = \frac{1}{2}\pi$.

R: $A_x = \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi(e^\pi - 2)$; $A_y = \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi(2e^\pi + 1)$.

32. Calcular el área de la superficie generada por el arco del primer cuadrante de la cardioide $\rho = 1 - \cos\theta$, al girar alrededor del eje x.

R: $\frac{8}{5}(3\sqrt{2} - 2)\pi$.

33. Calcular el área de la superficie generada por la lemniscata

$$\rho^2 = \cos 2\theta$$

al girar alrededor del eje y y del eje x.

R: $A_y = 2\sqrt{2}\pi$; $A_x = 2(2 - \sqrt{2})\pi$.

CAPÍTULO XIII

APLICACIONES FISICAS

En numerosas cuestiones de física se aplican conceptos del cálculo infinitesimal. Tal es lo que ocurre con la velocidad y aceleración de un cuerpo que pueden ser definidos como la derivada primera y segunda, respectivamente, del espacio respecto del tiempo.

Veremos ahora como los momentos de diversos órdenes y los trabajos realizados por las fuerzas se pueden expresar, en ciertos casos, mediante integrales definidas.

Empezaremos por recordar los conceptos de *momentos* en el caso de sistema de puntos, para pasar luego al caso de magnitudes continuas, basándonos siempre en las consideraciones intuitivas en que se funda el técnico al *aplicar* el cálculo integral.

1. MOMENTOS DE UN SISTEMA DE PUNTOS MATERIALES SITUADOS EN UNA RECTA

Consideremos sobre una recta, una serie de puntos A, B, ..., L de abscisas conocidas x_1, x_2, ..., x_n, respecto de un origen O y una unidad dados.

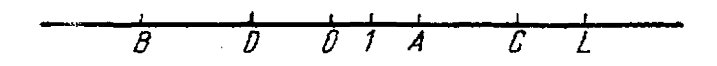


Fig. XIII-1.

Supongamos que en cada punto se hallan condensadas masas: m_1, m_2, ..., m_n. Brevemente diremos que los puntos A, B, ..., L son *puntos materiales*.

Definimos como *momento de primer orden* $M^{(1)}$ o *momento estático* respecto de O a la suma de los productos de las abscisas por las masas correspondientes:

$$M^{(1)} = m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i.$$

Análogamente se define el *momento de segundo orden* $M^{(2)}$ o *momento de inercia* respecto de O a la suma de los productos de las masas por los cuadrados de las distancias a O:

$$M^{(2)} = m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + \ldots + m_nx_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i^2$$

y en general *momento de orden* r : $M^{(r)}$ respecto de O, a la suma:

$$M^{(r)} = m_1x_1^r + m_2x_2^r + \ldots + m_nx_n^r = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i^r.$$

Consideremos ahora la siguiente cuestión. Si se cambia el origen de abscisas, ¿el momento $M^{(1)}$, o sea el momento estático, se anula para algún valor conveniente del nuevo origen?

Llamemos G al nuevo origen y sea x_G su abscisa. Las distancias de los puntos $A, B, \ldots, L$ a G serán: $x_1 - x_G, x_2 - x_G, \ldots, x_n - x_G$ y el momento correspondiente será:

$$M_G^{(1)} = m_1(x_1 - x_G) + m_2(x_2 - x_G) + \ldots + m_n(x_n - x_G) = 0,$$

o sea

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n - x_G(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) = 0,$$

y en definitiva

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i} = \frac{M^{(1)}}{M},$$

si se designa con M la suma de las masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Este valor x_G, que si se adopta como origen anula el correspondiente momento estático, se denomina *centro de masas* o *centro de gravedad* del sistema de masas m_i distribuidas en los puntos de abscisas x_i.

El centro de gravedad G es independiente del origen de coordenadas. En efecto, si adoptamos un nuevo origen O_1 de abscisa x_0 las distancias a O_1 serán las diferencias $(x_i - x_0)$ y el centro de gravedad respecto de O_1 tendrá como abscisa

$$\frac{\sum(x_i - x_0)m_i}{M} = \frac{\sum x_im_i}{M} - \frac{\sum x_0m_i}{M} = \frac{M^{(1)}}{M} - x_0 = x_G - x_0$$

y esta es la abscisa de G en el nuevo sistema.

EJERCICIOS:

1. En los puntos de abscisas 1, -3, 5, -4 se han colocado respectivamente las masas 7, 5, 2, 1. Calcular los momentos de primero y segundo orden y determinar la abscisa x_G del centro de gravedad.

   R: $M^{(1)} = 7\,(1) + 5\,(-3) + 2\,(5) + 1\,(-4) = -2.$

   $M^{(2)} = 7\,(1) + 5\,(9) + 2\,(25) + 1\,(16) = 118.$

   $$x_G = \frac{M^{(1)}}{M} = \frac{-2}{7+5+2+1} = -\frac{2}{15}.$$

2. ¿Qué masa debería ponerse en el punto $x = -4$, del ejercicio anterior, dejando los otros invariables, para que el origen resultara ser el centro de gravedad?

   R: 0,5.

Momento de inercia mínimo: Puesto que el momento de inercia $M^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$ está dado por una suma de cantidades positivas, no podrá anularse por un cambio del origen de coordenadas. Tiene sentido en cambio esta pregunta: ¿para qué origen de coordenadas será *mínimo* el valor de $M^{(2)}$?

Llamemos x_0 al nuevo origen de coordenadas. Resulta, considerando que en las sumatorias i varía de 1 a n:

$$M_0^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_0)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 - 2x_0 x_i + x_0^2) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 - 2x_0 \sum_{i=1}^{n} m_i x_i + x_0^2 \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

De acuerdo a las notaciones anteriores resulta:

$$M_0^{(2)} = M^{(2)} - 2x_0 M^{(1)} + x_0^2 M.$$

Puesto que es $M^{(1)} = M x_G$ se tiene:

$$M_0^{(2)} = M^{(2)} - 2x_0 M x_G + x_0^2 M = M^{(2)} + M(x_0^2 - 2x_0 x_G + x_G^2 - x_G^2) =$$
$$= M^{(2)} + M(x_0 - x_G)^2 - M x_G^2 .$$

El único término en el que interviene x_0 es el segundo, que al ser un cuadrado es positivo o nulo. El valor mínimo que puede tomar $M_0^{(2)}$ por variación de x_0, es el que anula a ese término, lo cual ocurre precisamente para $x_0 = x_G$. Por consiguiente resulta:

El momento de inercia de un sistema de puntos materiales situados sobre una recta es mínimo cuando se adopta como origen el centro de gravedad y su valor es

$$M_G^{(2)} = M^{(2)} - M x_G^2 .$$

Podemos escribir esta relación en la forma

$$M^{(2)} = M_G^{(2)} + M x_G^2 ,$$

que expresa el teorema de *Steiner* (también llamado de Huyghens):

El momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto de un punto es igual al momento de inercia baricéntrico más el producto de *la masa total del sistema multiplicada por el cuadrado de la abscisa del centro de gravedad.*

Aplicaciones a la estadística: En el cálculo de probabilidades y en estadística se utilizan también los conceptos de momentos en la siguiente forma. Se considera que una variable discreta X (llamada *variable aleatoria*) es capaz de tomar diversos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente, de modo que la probabilidad total sea $\sum_{i=1}^{n} p_i = M = 1$.

Puede concebirse que en cada punto de abscisa x_i se ha colocado una masa p_i y para este sistema de puntos materiales están definidos los momentos:

$$M^{(1)} = \sum p_i x_i, \; M^{(2)} = \sum p_i x_i^2, \; M^{(3)} = \sum p_i x_i^3, \; M^{(4)} = \sum p_i x_i^4, \; \ldots$$

El momento $M^{(1)}$ que correspondía a la abscisa del centro de gravedad, se denomina *esperanza matemática* $E(X)$ o valor medio $\bar{x}$ de la *variable aleatoria* X y se escribe habitualmente $\bar{x} = E(X) = \sum p_i x_i$.

El momento de segundo orden $M^{(2)}$ es mínimo, de acuerdo a lo visto anteriormente, cuando se toma como origen el centro de gravedad $\bar{x}$. Para este valor mínimo del momento de segundo orden se tiene el valor $M_G^{(2)}$ que se designa como σ^2 y que por lo tanto resulta definido por la relación

$$\sigma^2 = M^{(2)} - (\bar{x})^2 = \sum p_i x_i^2 - (\sum p_i x_i)^2$$

(pues $M = \sum p_i = 1$). El valor σ se denomina *desvío cuadrático medio* o *desviación standard.*

EJEMPLO:

Consideremos como variable aleatoria X los puntos que se obtienen al arrojar dos dados.

Cada dado puede presentar los puntos 1, 2, ..., 6 y los dos juntos las sumas 2, 3, ..., 12. Estas sumas no tienen igual probabilidad. Así la suma 7 se puede obtener con cualquiera de estas combinaciones: 1 y 6; 2 y 5; 3 y 4; 4 y 3; 5 y 2; 6 y 1. La probabilidad de la suma 7 es por consiguiente $\frac{6}{36}$.

El cuadro de valores para la variable X es:

$$X \begin{cases} x_i = 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12 \\ p_i = \frac{1}{36}, & \frac{2}{36}, & \frac{3}{36}, & \frac{4}{36}, & \frac{5}{36}, & \frac{6}{36}, & \frac{5}{36}, & \frac{4}{36}, & \frac{3}{36}, & \frac{2}{36}, & \frac{1}{36}. \end{cases}$$

Entonces el valor medio es

$$\bar{x} = \sum p_i x_i = \frac{1}{36}(2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12) = 7,$$

$$\sigma^2 = \sum p_i x_i^2 - (\bar{x})^2 \sim 5{,}83$$

y la desviación standard es $\sigma = 2{,}41$.

Se observa en este caso que entre los valores $\bar{x} - 2\sigma$ y $\bar{x} + 2\sigma$ está aproximadamente el 95 % de los casos teóricos que se presentan. Este resultado es de carácter general en las distribuciones llamadas "gaussianas" (ver pág. 61).

2. MOMENTOS DE UN SISTEMA DE PUNTOS MATERIALES SITUADOS EN UN PLANO

Consideremos ahora n puntos materiales $A, B, \ldots, L$ situados en un plano, cuyas coordenadas en un sistema cartesiano ortogonal sean $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $\ldots$, $(x_n; y_n)$.

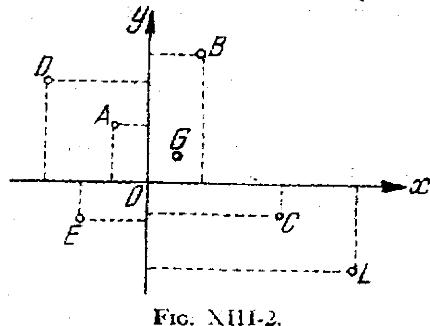


FIG. XIII-2.

Si en cada uno de ellos consideramos concentradas las masas Δm_1, Δm_2, $\ldots$, Δm_n, podremos definir los momentos respecto de un punto o de una recta. Así resulta:

Momento de primer orden respecto del eje de las abscisas:

$$M_x^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta m_i .$$

y en general *momento de orden r respecto del mismo eje:*

$$M_x^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} y_i^r \Delta m_i ,$$

pues y_i es la *distancia* del punto al eje considerado.

Análogamente el *momento de primer orden respecto del eje de las ordenadas* es

$$M_y^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i ,$$

y en general el *momento de orden r respecto del eje de las ordenadas:*

$$M_y^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \Delta m_i .$$

También en este caso es posible determinar un punto G de coordenadas $(x_G; y_G)$ tal que los momentos de primer orden respecto de dos ejes que pasen por él sean nulos. Lo demostraremos utilizando dos ejes paralelos a los primitivos. Resultará entonces

$$M_{y_G}^{(1)} = \sum (x_i - x_G) \Delta m_i = \sum x_i \Delta m_i - x_G \sum \Delta m_i ,$$

$$M_{x_G}^{(1)} = \sum (y_i - y_G) \Delta m_i = \sum y_i \Delta m_i - y_G \sum \Delta m_i .$$

Siendo $M = \sum \Delta m_i$ la masa total, resulta que estos momentos se anulan si es

$$x_G = \frac{\sum x_i \Delta m_i}{M} = \frac{M_y^{(1)}}{M} \qquad y_G = \frac{\sum y_i \Delta m_i}{M} = \frac{M_x^{(1)}}{M} .$$

El punto G así determinado es independiente del sistema de coordenadas elegido. En el caso de elegir otros ejes paralelos se repite la demostración que hemos hecho para el caso de puntos alineados; si en cambio se hace una rotación de un ángulo φ, habrá que utilizar las conocidas fórmulas de transformación de coordenadas:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + y\,\mathrm{sen}\,\varphi, \\ y' = -x\,\mathrm{sen}\,\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$

Resulta así que el momento estático o de primer orden de un sistema de puntos respecto de un eje baricéntrico es nulo.

Momentos de inercia: Si se consideran los cuadrados de las distancias a un eje se tienen los momentos axiales de 2º orden o momentos de inercia:

$$M_x^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2\,\Delta m_i.$$

$$M_y^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,\Delta m_i.$$

También se definen los momentos polares de inercia respecto de un punto. En particular, si d_i designa la distancia de cada punto al origen resulta:

$$M_0^{(2)} = \sum d_i^2\,\Delta m_i = \sum (x_i^2 + y_i^2)\,\Delta m_i$$

en virtud del teorema de Pitágoras, con lo que se obtiene

$$M_0^{(2)} = M_x^{(2)} + M_y^{(2)}$$

El valor k definido por la relación $M_0^{(2)} = Mk^2$ se denomina *girador, radio de giro* o *radio de inercia* del sistema material de masa total M. Este valor k determina el radio de una circunferencia sobre la que habría que distribuir la masa M de un sistema dado para obtener el mismo momento de inercia respecto de O.

Además se definen los *momentos centrífugos* $M_{xy}^{(2)}$ respecto de dos ejes. Para el caso de los ejes coordenados es

$$M_{xy}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,\Delta m_i.$$

También en el plano se verifica el *teorema de Steiner:* "El momento de inercia de un sistema de puntos materiales respecto de un eje de su plano es igual al momento de inercia respecto de un eje paralelo que pasa por el centro de gravedad G más el producto de la masa total multiplicada por el cuadrado de la distancia d entre los ejes.

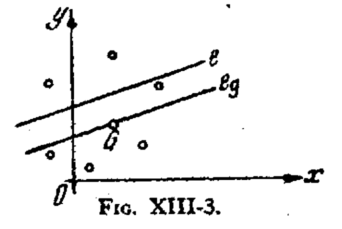


Fig. XIII-3.

$$M_e^{(2)} = M_g^{(2)} + Md^2.$$

La demostración es análoga a la efectuada anteriormente.

El lector demostrará fácilmente que el momento de inercia centrífugo $M_{xy}^{(2)}$ de un sistema de puntos materiales de un plano está vinculado al momento centrífugo $M_{x_G y_G}^{(2)}$ respecto de dos ejes paralelos a los anteriores que pasan por G, por la relación

$$M_{xy}^{(2)} = M_{x_G y_G}^{(2)} + M x_G y_G,$$

donde x_G, y_G son las coordenadas del centro de gravedad y M la masa total del sistema.

3. MOMENTOS DE LINEAS, SUPERFICIES Y VOLUMENES

Para definir los momentos de los cuerpos reales y continuos habrá que dividirlos en n partes, considerar cada una de las masas correspondientes concentradas en sus respectivos centros de gravedad, calcular el momento como si se tratase de puntos materiales aislados y luego pasar al límite cuando $n \to \infty$. Este límite será, de acuerdo a lo ya visto, una integral definida.

Cada una de las masas Δm_i de las porciones en que se ha dividido el cuerpo será igual al producto del volumen Δv_i por la densidad δ, que en lo sucesivo supondremos constante.

Cuando una de las dimensiones predomina sensiblemente sobre las otras dos, la masa Δm_i será el producto Δs_i del arco por la *densidad lineal* y cuando sólo una de las dimensiones sea despreciable la masa será igual al producto $\Delta\sigma_i$ de un elemento de superficie por la *densidad superficial*.

En general para determinar los momentos de los cuerpos continuos es necesario utilizar integrales múltiples que no tratamos en este volumen, pero en muchos casos será posible calcularlos utilizando integrales simples.

MOMENTOS DE UNA LÍNEA: Consideremos un alambre que puede asimilarse a una curva tal como aparece en la figura 4 el arco AB, dado que la longitud predomina sobre el ancho y el espesor.

Si la *densidad lineal* del alambre es δ, la masa de un arco $PQ = \Delta s$ será $\delta \cdot \Delta s$ y los momentos respecto de los ejes de las abscisas y ordenadas serán, respectivamente

$$y\delta \cdot \Delta s; \qquad x\delta \cdot \Delta s.$$

Formando ahora la suma de los productos análogos en una división del arco AB en n partes se tendrá $\delta \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta s_i$ y pasando al límite

cuando $n \to \infty$ y cada intervalo parcial tiende a cero, resultará como momento estático la integral definida:

$$M_x^{(1)} = \delta \int_a^b y\, ds$$

y en general como momento de orden n:

$$M_x^{(n)} = \delta \int_a^b y^n\, ds.$$

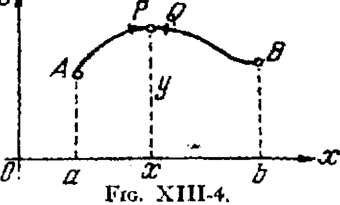


Fig. XIII-4.

Considerando las distancias al eje Oy se tendrán análogamente los momentos respecto de este eje:

$$M_y^{(1)} = \delta \int_a^b x\, ds,$$

$$M_y^{(n)} = \delta \int_a^b x^n\, ds.$$

Centro de gravedad de un arco de curva: Definimos como centro de gravedad de una figura a un punto tal que resulten nulos los momentos estáticos respecto de cualquier eje que pase por él. En particular consideraremos dos ejes paralelos a los ejes coordenados. Si se trata de un arco AB como el de la figura 5, de acuerdo a la definición de momento estático, resulta

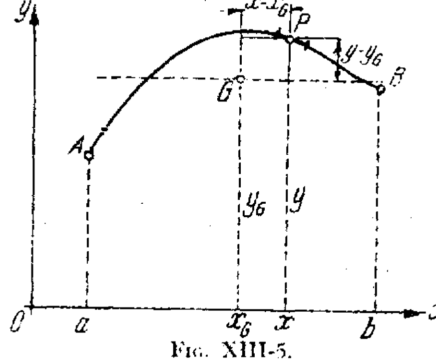


Fig. XIII-5.

$$\delta \int_a^b (x - x_G)\, ds = 0 \quad \therefore \quad \int_a^b x\, ds = x_G \int_a^b ds.$$

$$\delta \int_a^b (y - y_G)\, ds = 0 \quad \therefore \quad \int_a^b y\, ds = y_G \int_a^b ds.$$

Por consiguiente, las cordenadas del centro de gravedad de una linea de longitud s están dadas por las relaciones

$$x_G = \frac{\int_a^b x\, ds}{s}; \qquad y_G = \frac{\int_a^b y\, ds}{s}.$$

Multiplicando numeradores y denominadores por δ estas relaciones muestran que el momento de un arca respecto de un eje es igual al momento de toda su masa concentrada en el centro de gravedad.

EJEMPLOS:

1º) Hallar el centro de gravedad de un *arco completo de la cicloide.*

$$\begin{cases} x = r\,(t - \operatorname{sen} t) \\ y = r\,(1 - \cos t) \end{cases} \qquad \text{para } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Siendo $ds^2 = dx^2 + dy^2 = r^2\,[(1 - \cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t]\,dt^2 =$

$$= r^2[2 - 2\cos t]\,dt^2 = 4r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}t\,dt^2$$

es

$$ds = 2r \operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,dt \quad \text{y} \quad s = \int_0^{2\pi} 2r \operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,dt = 4r\Big[-\cos\frac{1}{2}t\Big]_0^{2\pi} = 8r.$$

Las coordenadas del centro de gravedad son

$$x_G = \frac{1}{8r}\int_0^{2\pi} r(t - \operatorname{sen} t)\,2r \operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,dt = \frac{1}{8r}\cdot 8\pi r^2 \quad \text{o sea} \quad x_G = \pi r;$$

$$y_G = \frac{1}{8r}\int_0^{2\pi} r(1 - \cos t)\,2r \operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,dt = \frac{1}{8r}\cdot\frac{32}{3}r^2 \quad \text{o sea} \quad y_G = \frac{4}{3}r.$$

En realidad, en el caso de la cicloide se evita el cálculo de x_G, puesto que por razones de simetría debía encontrarse en el eje de simetría, que es la recta de abscisa $x = \pi r$.

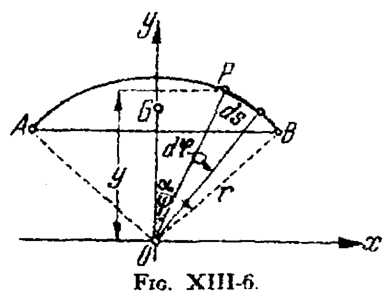


FIG. XIII-6.

2º) Hallar el centro de gravedad de un arco de circunferencia. Sea AB un arco de una circunferencia de radio r y centro O, que supondremos referido a un sistema de ejes cartesianos de origen O y orientado de modo que Oy sea eje de simetría del arco. Entonces la abscisa del centro de gravedad será nula y para calcular la ordenada habrá que aplicar la fórmula

$$y_G = \frac{\displaystyle\int_a^b y\,ds}{s},$$

siendo s la longitud del arco AB. Designemos con φ el ángulo que forma el radio OP con el eje de las ordenadas, siendo P un punto variable entre $A(\varphi = -\alpha)$ y $B(\varphi = +\alpha)$. Resulta entonces

$$y = r\cos\varphi, \qquad ds = r d\varphi, \qquad s = \widehat{AB} = 2\alpha r \ (\alpha \text{ en radianes}).$$

$$y_G = \frac{\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} r\cos\varphi \cdot r\,d\varphi}{2\alpha r} = \frac{r^2\Big[\operatorname{sen}\varphi\Big]_{-\alpha}^{\alpha}}{2\alpha r} = r\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$$

Expresado en función de la cuerda $AB = 2r$ sen α y del arc... resulta

$$y_G = r\frac{\overline{AB}}{\overset{\frown}{AB}}.$$

Es decir: El centro de gravedad de un arco de circunferencia está sobre su eje de simetría a una distancia del centro igual al produ... dio por el cociente entre la cuerda y el arco.

Casos particulares:

1°) Si el arco es el cuarto de circunferencia de radio r sit... primer cuadrante, G debe hallarse sobre la bisectriz de este cuadrante.

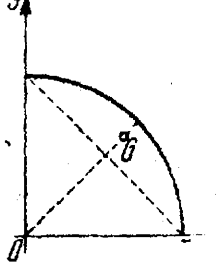


Fig. XIII...

Como la cuerda es $r\sqrt{2}$ y el arco $\frac{1}{2}\pi r$, resulta

$$OG = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}r.$$

Las coordenadas del centro de gravedad son, entonces:

$$x_G = OG\cos 45° = \frac{2}{\pi}r; \qquad y_G = OG \text{ sen } 45° = \frac{2}{\pi}r.$$

2°) Si el arco es la semicircunferencia correspondiente a ... meros cuadrantes, será $x_G = 0$; $y_G = \frac{2}{\pi}r$.

Ejercicios:

1. Hallar el centro de gravedad del arco de la parábola

$$y^2 = 4x$$

en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 4$.

R: $x_G = 1{,}64$; $y_G = 2{,}29$.

2. Determinar el centro de gravedad del arco total de la cardioide

$$\varrho = a\,(1 + \cos\vartheta).$$

R: $x_G = \frac{4}{5}a$; $y_G = 0$.

3. Dada la hipocicloide

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \text{sen}^3 t,$$

verificar que el centro de gravedad del arco comprendido en el primer cuadrante tiene las coordenadas $x_G = y_G = 0{,}4$.

4. Hallar el centro de gravedad del arco de la curva

$$x = t^2, \qquad y = t - \frac{t^3}{3}$$

para $-1 \leqslant t \leqslant +1$.

R: $x_G = \frac{2}{5}$; $y_G = \frac{13}{24}$.

5. Hallar el centro de gravedad del arco de catenaria

$$y = \operatorname{Ch} x$$

comprendido entre las abscisas $x = 0$ y $x = 1$.

R: $x_G = (\operatorname{Sh} 1 - \operatorname{Ch} 1 + 1) : (\operatorname{Ch} 1 - 1)$; $y_G = \frac{1}{4}(\operatorname{Sh} 2 + 2) : \operatorname{Sh} 1$.

6. Hallar el centro de gravedad del arco de la curva

$$\varrho = e^{\vartheta}$$

desde $\vartheta = 0$ hasta $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

R: $x_G = \frac{1}{5}\,\frac{e^{\pi} - 2}{e^{\pi/2} - 1} \sim 1{,}1$; $y_G = \frac{1}{5}\,\frac{2e^{\pi} + 1}{e^{\pi/2} - 1} \sim 2{,}48$.

CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA SUPERFICIE: Consideremos un recinto limitado por una curva $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las ordenadas correspondientes a $x = a$, $x = b$. Determinaremos las coordenadas x_G, y_G del centro de gravedad G de esta superficie por la condición

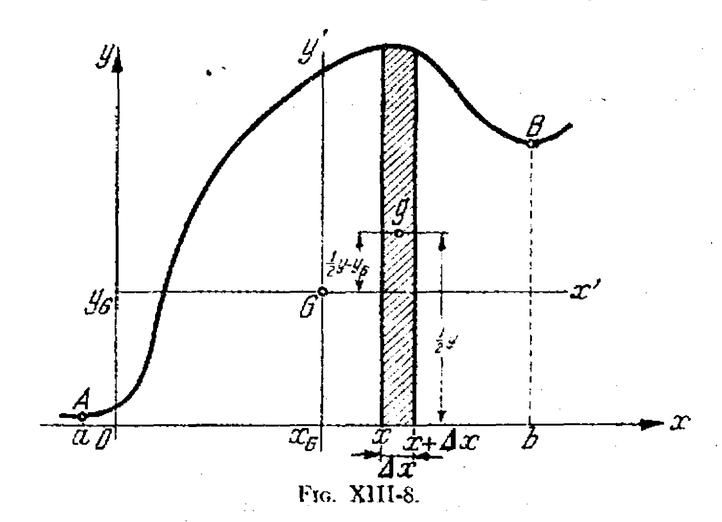


FIG. XIII-8.

de que los momentos estáticos respecto de dos ejes que pasen por G sean nulos. Elegimos para ello los ejes Gx', Gy' paralelos a los ejes coordenados. Dividimos el intervalo (a, b) en n partes de amplitud Δx.

Correspondientemente tendremos n fajas de base Δx y de masa $y\,\Delta x\cdot\delta$. Consideremos esta masa concentrada en el centro de gravedad g de la faja, que tiene por coordenadas —aproximadamente— los valores x y $\frac{1}{2}y$.

Los momentos del punto material g respecto de los ejes Gy', Gx' serán respectivamente

$$y\,\Delta x\cdot\delta\cdot(x-x_G); \qquad y\,\Delta x\cdot\delta\cdot(\tfrac{1}{2}y-y_G).$$

Sumando las n expresiones análogas y pasando al límite se tendrá como expresión de los momentos estáticos respecto de los ejes Gy', Gx':

$$\delta\int_a^b y(x-x_G)\,dx; \qquad \delta\int_a^b y(\tfrac{1}{2}y-y_G)\,dx.$$

La anulación de estas integrales implica, respectivamente:

$$\int_a^b x\,y\,dx = x_G\int_a^b y\,dx; \qquad \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx = y_G\int_a^b y\,dx.$$

Como es $\int_a^b y\,dx = A$, siendo A el área de la figura, resultan como coordenadas del centro de gravedad G:

$$x_G = \frac{1}{A}\int_a^b x\,y\,dx; \qquad y_G = \frac{1}{2}\,\frac{1}{A}\int_a^b y^2\,dx.$$

EJEMPLOS:

1°) Calcular el baricentro del cuadrante de círculo de radio r.

Como el área del recinto es $A=\frac{1}{4}\pi r^2$ será suficiente calcular los numeradores de x_G e y_G, teniendo en cuenta que es $x^2+y^2=r^2$, o sea

$$y=\sqrt{r^2-x^2}.$$

FIG. XIII-9.

Resulta $\int_a^b x\,y\,dx = \int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\Big[(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^r = \frac{1}{3}r^3;$

$$\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^r (r^2-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{1}{3}r^3.$$

Se tiene entonces $x_G = y_G = \frac{4r}{3\pi}$.

(Es evidente que por razones de simetría debía ser $x_G = y_G$ y que era suficiente calcular uno sólo de estos valores).

2°) Calcular el centro de gravedad del área limitada por una semionda de la curva

$$y = \operatorname{sen} x.$$

El área encerrada por la curva y el eje de las x es, como se vio en la página 367, $A = 2$; se tiene entonces:

$$x_G = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{sen} x - x\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi;$$

$$y_G = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cdot \cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{8}\pi.$$

3°) Hallar el baricentro de una superficie triangular.

Consideremos un triángulo de base b y altura h y ubiquemos los ejes coordenados en la forma que lo indica la figura. En base a la semejanza de triángulos resulta en el triángulo TOR:

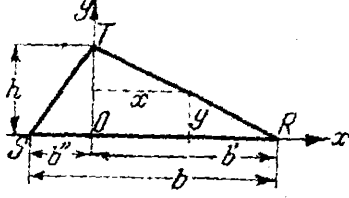


Fig. XIII-10.

$$x = \frac{b'}{h}(h - y).$$

Entonces se tiene:

$$\int_{x_G}^{x_1} y^2\,dx = \int_h^0 y^2\frac{b'}{h}(-dy) = \frac{b'}{h}\int_0^h y^2\,dy = \frac{b'}{h}\,\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}b'h^2.$$

El cálculo con la otra parte del triángulo OST da análogamente $\frac{1}{3}b''h^2$ y el total se obtiene sumando: $\frac{1}{3}bh^2$.

Como es $2A = bh$ resulta:

$$y_G = \frac{\frac{1}{3}bh^2}{bh} = \frac{1}{3}h.$$

Dado que a este resultado se llega partiendo de cualquiera de los lados, se concluye que el centro de gravedad de un triángulo se encuentra en el *punto de intersección de las medianas*, que es el único punto que está situado sobre las paralelas a los lados trazadas a $\frac{1}{3}$ de la altura correspondiente.

Observación: Intuitivamente es evidente que el centro de gravedad de un triángulo debe encontrarse en el punto de intersección de las medianas. Basta trazar una serie de rectángulos inscriptos tal como aparecen en la figura y observar que el centro de gravedad de cada rectángulo está en el centro geométrico. Aplicando en cada uno de ellos un vector proporcional al área, resultará que el punto de aplicación del sistema de vectores paralelos debe encontrarse sobre la mediana.

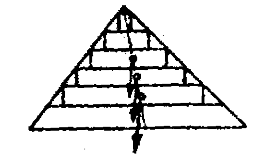


Fig. XIII-11.

Centro de gravedad de una figura compuesta: Sea determinar el centro de gravedad de la parte rayada de la figura limitada por los

ejes coordenados y la circunferencia de radio r tangente a estos ejes. La zona rayada es la diferencia entre el cuadrado de lado r y el cuarto de círculo. Conocemos los centros de gravedad G_1 y G_2 de estas dos superficies. Por razones de simetría las dos coordenadas buscadas deben ser iguales. G_1 tiene coordenadas

$$x_{G_1} = y_{G_1} = \frac{1}{2}r$$

y el área de la superficie del cuadrado es $A_1 = r^2$.

G_2 tiene por coordenadas de acuerdo a lo visto al calcular el cuadrante del círculo

$$x_{G_2} = y_{G_2} = r\left(1 - \frac{4}{3\pi}\right).$$

El área correspondiente es $A_2 = \frac{1}{4}\pi r^2$.

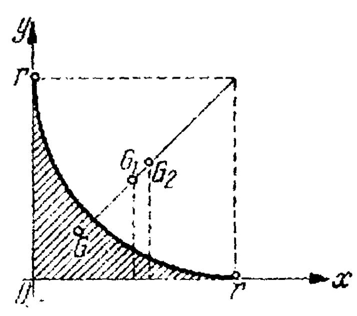


FIG. XIII-12.

La superficie rayada es $r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = r^2(1 - \frac{1}{4}\pi)$ y de acuerdo a la definición de centro de gravedad es

$$x_G r^2(1 - \frac{1}{4}\pi) = x_{G_1} r^2 - x_{G_2}\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{2}r^3 - \frac{3\pi - 4}{12}r^3 = \frac{10 - 3\pi}{12}r^3$$

es decir

$$x_G = y_G = \frac{10 - 3\pi}{3(4 - \pi)}r \sim 0{,}223\, r.$$

EJERCICIOS:

1. **Hallar el centro de gravedad del área limitada por la parábola**

$$y = x^2,$$

el eje de las x y la recta $x = a$.

R: $x_G = \frac{3}{4}a$; $y_G = \frac{3}{10}a^2$.

2. **Idem del área encerrada por la curva**

$$y = \cos x,$$

para $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ y el eje de las abscisas.

R: $x_G = \frac{1}{2}\pi - 1$; $y_G = \frac{1}{8}\pi$.

3. **Idem del área limitada por el eje y y la curva.**

$$x = 2y - y^2.$$

R: $x_G = \frac{2}{5}$; $y_G = 1$.

4. Idem del triángulo cuyos lados son los ejes y la recta

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

R: $x_G=\frac{1}{3}a;\ y_G=\frac{1}{3}b.$

Hallar el baricentro de las áreas limitadas por las siguientes curvas:

5. $y^2=4x,\ x=5.$ R: $x_G=3;\ y_G=0.$

6. $y=x^3,\ x=2,\ y=0.$ R: $x_G=\frac{8}{5};\ y_G=\frac{16}{7}.$

7. $y=x^2,\ y=2x+3.$ R: $x_G=1;\ y_G=\frac{17}{5}.$

8. $y=x^2-2x-3,\ y=6x-x^2-3.$ R: $x_G=2;\ y_G=1.$

9. $y=x^3,\ y=x\ (0<x<1).$ R: $x_G=\frac{8}{15};\ y_G=\frac{8}{21}.$

10. Determinar el centro de gravedad del área limitada por los ejes de coordenadas y la parábola

$$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}.$$

R: $x_G=y_G=\frac{1}{5}a.$

Determinar el centro de gravedad de las áreas encerradas por las siguientes curvas y rectas:

11. $y=c^2-x^2,\ y=0.$ R: $x_G=0;\ y_G=\frac{2}{5}c^2.$

12. $y=x^2,\ y=4.$ R: $x_G=0;\ y_G=\frac{12}{5}.$

13. $x=y^2-y,\ y=x.$ R: $x_G=\frac{3}{5};\ y_G=1.$

14. Hallar el baricentro del área correspondiente al primer cuadrante de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

R: $x_G=\frac{4a}{3\pi};\ y_G=\frac{4b}{3\pi}.$

15. Hallar el centro de gravedad del área del triángulo curvilíneo determinado por el círculo $x^2+y^2=r^2$ y las rectas $x=r,\ y=r.$

R: $x_G=y_G=\frac{2r}{3(4-\pi)}.$

16. Determinar el centro de gravedad del área encerrada por las parábolas $y^2=8x;\ y=x^2.$

R: $x_G=0{,}9;\ y_G=1{,}8.$

17. **Determinar el centro de gravedad del área limitada por la cisoide**

$$y^2(2a-x)=x^3$$

y su asíntota $x=2a$.

R: $x_G=\frac{5}{3}a$; $y_G=0$.

18. **Hallar el centro de gravedad del área limitada por la curva de Agnesi**

$$x^2y=4a^2(2a-y)$$

y el eje de las x.

R: $x_G=0$; $y_G=\frac{1}{2}a$.

19. **Mostrar que el baricentro de un sector circular de radio r, de ángulo central α está a la distancia $\frac{4r}{3\alpha}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha$ del centro del círculo y sobre la bisectriz del sector.**

20. **Hallar el centro de gravedad del área limitada por un arco de la cicloide**

$$x=r(t-\operatorname{sen} t),\qquad y=r(1-\cos t),$$

y el eje de las x.

R: $x_G=r\pi$; $y_G=\frac{5}{6}r$.

Centro de gravedad de una superficie limitada por una curva dada en coordenadas polares: Sea $\varrho=f(\vartheta)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares. Dividamos en n partes el sector (α,β) que limita el recinto. En cada una de ellas consideremos un sector circular de radio ϱ_i y de amplitud $\Delta\vartheta_i$ o un triángulo isósceles de base $\varrho_i\Delta\vartheta_i$ y altura ϱ_i. El centro de gravedad G_i está situado a $\frac{2}{3}$ de la altura de este triángulo (pág. 478). Las coordenadas cartesianas de este punto son $\frac{2}{3}\varrho_i\cos\vartheta_i$; $\frac{2}{3}\varrho_i\operatorname{sen}\vartheta_i$. Si toda la superficie del triángulo $\frac{1}{2}\varrho_i^2\Delta\vartheta_i$ está concentrada en este punto, los momentos estáticos respecto de los ejes Oy, Ox serán:

$$\frac{1}{3}\varrho_i^3\cos\vartheta_i\Delta\vartheta_i;$$

$$\frac{1}{3}\varrho_i^3\operatorname{sen}\vartheta_i\Delta\vartheta_i.$$

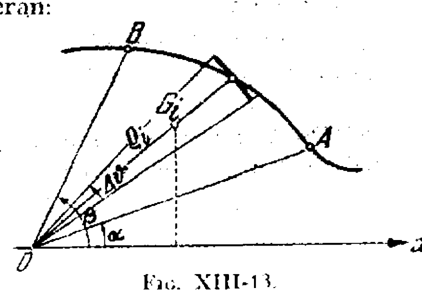


Fig. XIII-13.

Sumando todas las n expresiones análogas y pasando al límite se tienen las integrales

$$\frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \varrho^3 \cos\vartheta\, d\vartheta; \qquad \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \varrho^3 \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta.$$

Dividiendo estos valores por el área A total se tienen las coordenadas del centro de gravedad G:

$$x_G = \frac{1}{3A}\int_{\alpha}^{\beta} \varrho^3 \cos\vartheta\, d\vartheta; \qquad y_G = \frac{1}{3A}\int_{\alpha}^{\beta} \varrho^3 \operatorname{sen}\vartheta\, d\vartheta.$$

EJEMPLO:

Calcular el centro de gravedad del cuarto de círculo $\varrho = r$ para ϑ variando de 0 a $\frac{1}{2}\pi$.

El área A es $\frac{1}{4}\pi r^2$; $x_G = \dfrac{1}{\frac{3}{4}\pi r^2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^3 \cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{4r}{3\pi}$; $y_G = \dfrac{4r}{3\pi}$,

resultado que coincide con el hallado anteriormente utilizando coordenadas cartesianas.

EJERCICIOS:

1. Hallar el centro de gravedad del área total de la cardioide

$$\varrho = a\,(1 + \cos\vartheta).$$

R: $x_G = \frac{5}{6}a$; $y_G = 0$.

2. Verificar que la distancia al origen del centro de gravedad del área encerrada por una hoja de la curva

$$\varrho = a \cos 2\vartheta,$$

es igual a $\dfrac{128\, a\sqrt{2}}{105\,\pi}$.

3. Idem del área de una hoja de la curva

$$\varrho = a \cos 3\vartheta,$$

es $\dfrac{81\, a\sqrt{3}}{80\,\pi}$.

CENTRO DE GRAVEDAD DE UN SÓLIDO: Procediendo como en el caso de líneas y superficies, se puede calcular el centro de gravedad de un sólido, imponiendo la condición de anulación de los momentos respecto de planos que pasan por él.

En ciertos casos, cuando hay condiciones de simetría, se pueden expresar los momentos mediante integrales simples y éste es el único que consideraremos en este tomo, dejando para el otro el caso general que exige el empleo de integrales múltiples.

Así si el sólido se origina por la rotación de una curva $y = f(x)$

en torno del eje Ox, sólo es necesario determinar el valor x_G, pues G debe encontrarse sobre el eje Ox.

Para hallar el momento respecto del plano yz (es decir $x = 0$) pueden considerarse los cilindros $\pi y_i^2 \Delta x_i$ que se indican en la figura y que distan x_i de ese plano. Sumando las expresiones análogas para n intervalos Δx_i de (a, b) y pasando al límite resulta

$$M_x = \delta\pi \int_a^b xy^2\,dx.$$

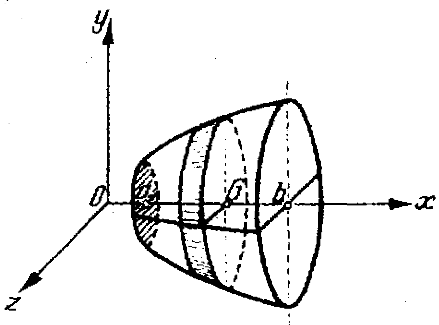


Fig. XIII-14.

El momento respecto a un plano paralelo al (yz) que pase por G será

$$\delta\pi \int_a^b (x - x_G)\,y^2\,dx$$

y su anulación determina

$$x_G = \frac{\pi \int_a^b xy^2\,dx}{\pi \int_a^b y^2\,dx} = \frac{\pi \int_a^b xy^2\,dx}{V},$$

siendo V el volumen del sólido de revolución de acuerdo a lo visto en la página 450.

Ejemplos:

1°) Determinar el centro de gravedad del sólido engendrado por la rotación de la curva

$$y = \operatorname{sen} x$$

para $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$, alrededor del eje x.

Como es $V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} y^2\,dx = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\pi \Big[x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{4}\pi^2$

resulta

$$x_G = \frac{4}{\pi^2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{2}x\,(1 - \cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}x \operatorname{sen} 2x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} \sim 1{,}103.$$

2°) Calcular el centro de gravedad de un cono circular homogéneo de radio r y altura h.

Considerando que el cono tiene su eje sobre Ox y que es originado por el segmento OP de ecuación

$$y = \frac{r}{h}x$$

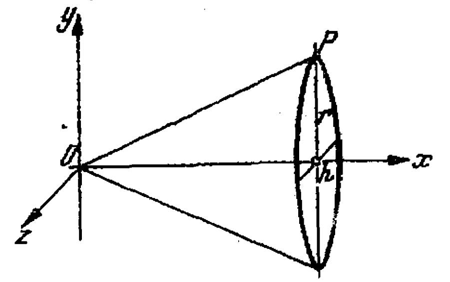


FIG. XIII-15.

resulta

$$x_G = \frac{\pi \int_0^h x\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3}{4}h.$$

El centro de gravedad de un cono circular recto y homogéneo está situado sobre su eje a $\frac{3}{4}$ de la altura medidos desde el vértice.

EJERCICIOS:

1. Hallar el centro de gravedad de una semiesfera de radio r.

   R: $x_G = 0$; $y_G = \frac{3}{8}r$.

2. La parábola $y = x^2$ gira alrededor del eje x. Hallar el centro de gravedad del sólido de revolución así engendrado en el intervalo $0 < x < 1$.

   R: $x_G = \frac{5}{6}$.

3. El área determinada por la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, la recta $y = 1$ y el eje de las abscisas gira alrededor de Oy. Determinar el centro de gravedad del sólido de revolución generado.

   R: $y_G = \frac{9}{16}$.

4. Determinar el centro de gravedad del sólido generado por la revolución alrededor del eje x del área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ correspondiente al primer cuadrante.

   R: $x_G = \frac{3}{8}a$.

4. TEOREMAS DE PAPUS O DE GULDIN

Estos teoremas constituyen relaciones notables entre los volúmenes y áreas de los cuerpos originados por la rotación alrededor de un eje de las figuras planas y las correspondientes trayectorias de los centros de gravedad.

Partiendo de las fórmulas que dan las ordenadas del centro de gravedad de una línea o de una superficie resultan sucesivamente:

1) En el caso de las líneas (pág. 473)

$$y_G = \frac{\int_a^b y\,ds}{\int_a^b ds};$$

y como es $\int_a^b ds = s$, resulta:

$$(2\pi\, y_G)s = 2\pi \int_a^b y\,ds$$

y el segundo miembro mide el área de la superficie engendrada por la rotación de la curva $y(x)$ alrededor del eje x (ver pág. 459).

El primer miembro es el producto de la longitud de la circunferencia $2\pi y_G$ descripta por el centro de gravedad, por la longitud s de la curva. De aquí el teorema de Guldin: *El área descripta por una curva que gira alrededor de un eje es igual a la longitud de la circunferencia descripta por el centro de gravedad al girar alrededor del eje multiplicada por la longitud de la curva.*

II) La fórmula que da la expresión de la ordenada del centro de gravedad de una superficie también permite calcular otra fórmula notable. Por ser

$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx},$$

como el denominador es el área $A = \int_a^b y\,dx$, resulta:

$$(2\pi y_G)\,A = \pi \int_a^b y^2\,dx$$

y siendo el 2º miembro igual al volumen determinado por la curva al girar en torno del eje de las abscisas y el primer miembro igual al producto de la circunferencia descripta por el centro de gravedad multiplicada por el área encerrada por la curva, tenemos el 2º teorema de Guldin: *El volumen determinado por una curva plana al girar alrededor de un eje de su plano es igual a la longitud de la circunferencia descripta por el centro de gravedad al girar alrededor de ese eje multiplicada por la superficie correspondiente.*

EJEMPLOS:

1º) Si una circunferencia gira alrededor de un eje que no la atraviesa engendra un toro circular. Supongamos que la circunferencia de radio r tiene su centro C distante $a > r$ del eje Ox de rotación. Puesto que C es tanto el centro de gravedad de la circunferencia como del círculo, resultan para el área y el volumen del toro:

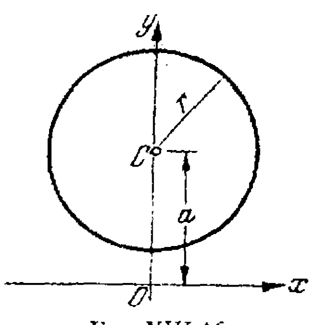


FIG. XIII-16.

$$Area\ del\ toro = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar;$$

$$Volumen\ del\ toro = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 ar^2.$$

2º) El teorema de Guldin sirve para determinar el centro de gravedad de una figura si se conoce el área del cuerpo engendrado por una figura que rota, o el volumen engendrado por la superficie correspondiente.

Tal es el caso de una *semicircunferencia* de radio r que al rotar alrededor de Ox determina una esfera. Por razones de simetría es $x_G = 0$. Para calcular y_G aplicamos el primer teorema de Guldin, teniendo en cuenta que el área de la esfera descripta por la semicircunferencia es $4\pi r^2$:

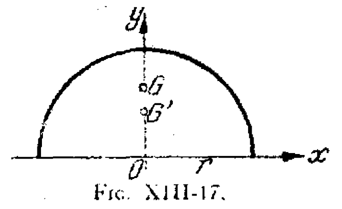


FIG. XIII-17.

$$(2\pi y_G)\pi r = 4\pi r^2 \text{ o sea } y_G = \frac{2r}{\pi} \sim 0.637\ r.$$

resultado que ya habíamos logrado anteriormente (pág. 475).

Si se busca el centro de gravedad G' del *semicírculo* de radio r es $x_{G'} = 0$, y aplicando el segundo teorema de Guldin se tiene

$$(2\pi y_{G'})\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{o sea} \quad y_{G'} = \frac{4r}{3\pi} \sim 0{,}423\ r,$$

que también habíamos mencionado antes (pág. 481, ej. 19).

3º) *Centro de gravedad del perímetro de un triángulo.* Consideremos el triángulo ABC e imaginemos una rotación alrededor del lado $BC = a$. Sea h la altura correspondiente a este lado. La superficie descripta estará constituída por dos conos cuyas áreas sumadas serán

$$\pi h \cdot c + \pi h \cdot b = \pi h\ (b + c).$$

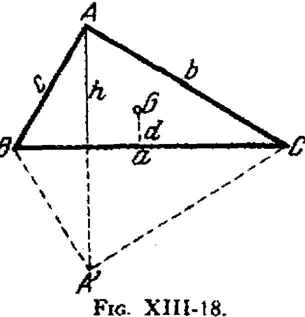


FIG. XIII-18.

Llamando d a la distancia del centro de gravedad buscado G al lado a (eje de rotación), la longitud de la circunferencia que describe G es igual a $2\pi d$. En virtud del teorema de Guldin resulta

$$\pi h\ (b + c) = 2\pi d\ (a + b + c)$$

y por consiguiente es

$$d = \frac{1}{2} h\ \frac{b + c}{a + b + c}.$$

NOTA: Los enunciados de los teoremas I y II figuran en el libro VII de los célebres *Comentarios* que PAPO o PAPUS DE ALEJANDRÍA escribiera el año 320. Durante mucho tiempo se creyó que el autor de estas notables proposiciones fué PABLO GULDIN o GULDINUS, matemático suizo que vivió a principios del siglo XVII.

EJERCICIOS:

1. Hallar el área lateral y el volumen de un cono circular recto aplicando el teorema de Papus.

2. La semicircunferencia $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ gira alrededor de la recta $y = r$. Aplicando el teorema de Papus, determinar el área de la superficie engendrada.

   R: $2\pi(\pi - 2)r^2$.

3. El semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ gira alrededor de la recta $y = x - r$. Determinar el volumen del sólido de revolución engendrado.

   R: $\dfrac{3\pi + 4}{3} \dfrac{\pi r^3}{\sqrt{2}}$.

5. MOMENTOS DE INERCIA

Para calcular momentos de inercia de líneas, superficies o volúmenes continuos se procede en la misma forma que en los párrafos anteriores. Se divide el cuerpo en n partes cada una de masa Δm_i y si r_i es la distancia a un punto, a una recta o a un plano, el valor aproximado del momento de inercia será:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i.$$

El límite cuando $n \to \infty$ y cada una de las partes en que se ha descompuesto el cuerpo tiende a cero, es por definición el momento de inercia $M^{(2)}$ (ó I) del cuerpo:

$$M^{(2)} = I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i.$$

Cuando este límite exista, podremos calcular el momento de inercia mediante la integral definida:

$$I = \int_a^b r^2\,dm.$$

Veamos algunos ejemplos:

1°) *Momento de inercia de un rectángulo ABCD.*

a) *Respecto de la base $b = AB$.* Eligiendo los ejes coordenados, como lo indica la figura, resulta para un elemento situado a la distancia y de b:

$$\Delta m = b\Delta y \cdot \delta,$$

siendo δ la densidad superficial. El momento de inercia será:

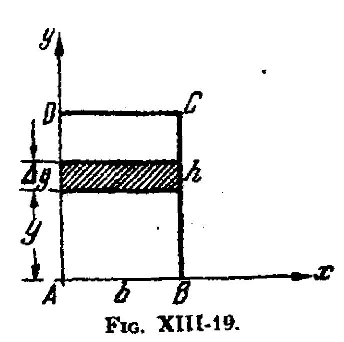


FIG. XIII-19.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \Delta m_i = \delta \cdot b \int_0^h y^2 dy = \delta \cdot b \frac{\left[y^3\right]_0^h}{3} = \frac{1}{3}\delta \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{3}(\delta \cdot b \cdot h)h^2 = \frac{Mh^2}{3}$$

siendo M la masa total igual a la superficie $b \times h$ multiplicada por la densidad δ.

b) ***Respecto del lado*** $AD = h$. **Procediendo en la misma forma que en el caso a), con rectángulos de base Δx y altura h situados a distancia x del lado AD, resulta como momento de inercia $\frac{1}{3}M \cdot b^2$.**

Como vale el teorema de Steiner que afirma que el momento de inercia respecto de un eje es igual al momento de inercia de un eje baricéntrico paralelo, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia:

$$I = I_g^{(2)} + Md^2,$$

resulta de inmediato que los momentos de inercia del rectángulo (b, h) respecto de los ejes $(1,1)$, $(2,2)$, paralelos a los anteriores y que pasan por G son:

$$I_{1,1} = I_b - M(\tfrac{1}{2}h)^2 = \tfrac{1}{3}Mh^2 - \tfrac{1}{4}Mh^2 = \tfrac{1}{12}Mh^2 = \tfrac{1}{12}bh^3;$$

$$I_{2,2} = I_h - M(\tfrac{1}{2}b)^2 = \tfrac{1}{3}Mb^2 - \tfrac{1}{4}Mb^2 = \tfrac{1}{12}Mb^2 = \tfrac{1}{12}hb^3.$$

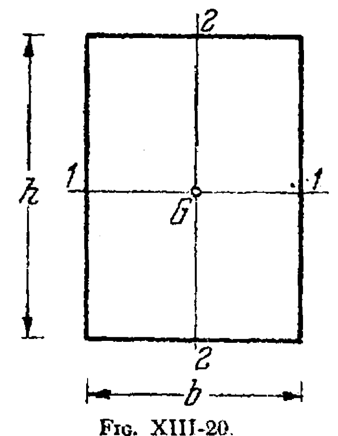


FIG. XIII-20.

Por consiguiente, el momento polar de inercia respecto de G es

$$I_G = I_{1,1} + I_{2,2} = \frac{1}{12}M(h^2 + b^2).$$

2°) *Momento de inercia de un hierro en doble te.*

Consideremos un hierro en doble te de alas anchas y paralelas, en el cual hemos supuesto —para simplificar— que no hay contornos curvos. Sea yy un eje baricéntrico, tal como lo hemos señalado en la figura. Para calcular el momento de inercia respecto de yy, será suficiente, por razones de simetría, calcular el momento de inercia de la mitad de la figura y luego duplicar el resultado.

Tanto el rectángulo superior como el inferior tienen base $\frac{1}{2}b$ y altura t. El momento de inercia de cada uno de ellos respecto de yy es (dejando de lado la densidad δ): $\frac{1}{3}t(\frac{1}{2}b)^3$. El momento de inercia del rectángulo dispuesto verticalmente de base $\frac{1}{2}d$ y altura $(h - 2t)$ es

$$\frac{1}{3}(h - 2t)\frac{d^3}{8}.$$

El momento de inercia de toda la figura que está a la derecha de yy es

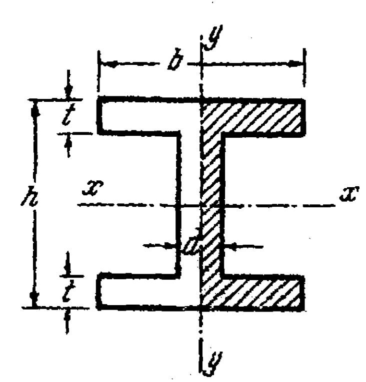


Fig. XIII-21.

$$\frac{t \cdot b^3}{12} + \frac{d^3}{24}(h - 2t).$$

El momento de inercia del perfil será el doble de este valor:

$$\frac{t \cdot b^3}{6} + \frac{d^3}{12}(h - 2t).$$

Para el perfil 20 el *Manual Hutte* (t. I. pág. 932, ed. en castellano, 1938) da los siguientes datos en mm:

$$h = 200;\ b = 200;\ d = 10;\ t = 16,$$

con lo que resulta como valor del momento de inercia respecto del eje yy el valor 2 134,73 cm⁴. El mismo manual da el valor 2 140 cm⁴ para el perfil 20; la diferencia se debe a la existencia de partes curvas en el contorno, que hemos omitido en este cálculo.

Si se quiere hallar el momento de inercia respecto del eje xx, convendrá aplicar en los rectángulos superior e inferior el teorema de Steiner. Siendo el momento baricéntrico de estos rectángulos (dejando de lado el factor δ) igual a $\frac{b \cdot t^3}{12}$ y la distancia de su eje baricéntrico al eje xx igual a $\frac{1}{2}(h - t)$ resulta como momento respecto del eje xx:

$$\frac{b \cdot t^3}{12} + \frac{1}{4}(h - t)^2\, b \cdot t.$$

El momento del rectángulo dispuesto verticalmente es $\frac{d(h - 2t)^3}{12}$ y el momento del perfil resulta entonces:

$$\frac{b \cdot t^3}{6} + \frac{1}{2}(h - t)^2\, b \cdot t + \frac{d(h - 2t)^3}{12}.$$

Con los datos anteriores resulta: 5 825,75 cm⁴, mientras que el *Manual Hutte* da, para el perfil correspondiente con los cantos curvos, el valor 5 950 cm⁴.

3º) *Momento polar de inercia de un círculo.*

Sea un círculo homogéneo de radio r y de densidad superficial δ. Considerando una corona circular de radios x_i y $x_i + \Delta x_i$, su masa es

$$2\pi x_i \cdot \Delta x_i \delta,$$

y el momento de inercia de n coronas análogas con respecto al origen resulta

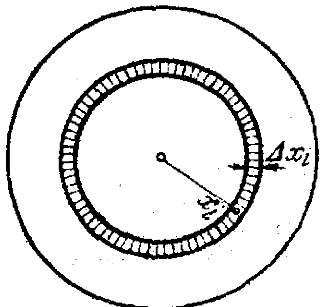


Fig. XIII-22.

$$2\pi\delta \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \Delta x_i,$$

pues hay que multiplicar cada una de las expresiones anteriores por el cuadrado de la distancia al origen. Pasando al límite se obtiene el momento polar de inercia

$$I_0 = 2\pi\delta \int_0^r x^3\,dx = \frac{1}{2}\pi\delta r^4 = \pi r^2\delta\ \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}Mr^2,$$

siendo M la masa total del círculo y r su radio.

4º) *Momento de inercia de un cilindro recto.*

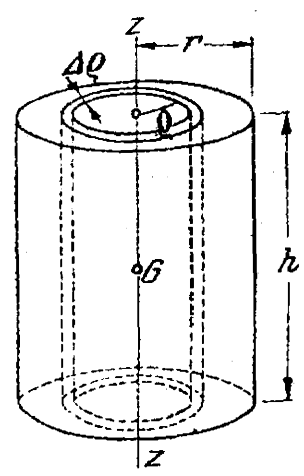


FIG. XIII-23.

Consideremos un cilindro circular de radio r y altura h y determinemos su momento de inercia respecto de un eje z paralelo a las generatrices del cilindro y que pasa por su centro de gravedad. Todos los puntos comprendidos en la superficie cilíndrica de altura h, limitada por la corona de radios ϱ, $\varrho + \Delta\varrho$ están a una distancia ϱ del eje z. El momento de inercia de estos puntos será (siendo δ la densidad):

$$2\,\pi\varrho\Delta\varrho\, h\cdot\delta\cdot\varrho^2.$$

Sumando n expresiones análogas y pasando al límite cuando $n \to \infty$ resulta:

$$I_z = 2\,\pi h\delta \int_0^r \varrho^3\,d\varrho = \pi r^2 h\cdot\delta\frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}Mr^2$$

siendo M la masa total del cilindro.

EJERCICIOS (¹):

1. Hallar el momento de inercia del área del círculo de radio r respecto a un diámetro.

R: $\frac{1}{4}\pi r^4$.

Determinar el momento de inercia I_y para el área encerrada por los ejes y las siguientes curvas:

2. $y = 4 - x^2$. R: $\frac{64}{15}$.

3. $y = x^2 - x^3$. R: $\frac{1}{30}$.

4. $y^2 = 2 - x$. R: $\frac{128}{105}\sqrt{2}$.

5. $y = 2x - x^2$. R: 1,6.

(¹) En estos ejercicios se ha supuesto que la figura es homogénea y no habiéndose considerado la densidad, los resultados se refieren a los *momentos geométricos*.

Determinar el momento de inercia I_x para el área encerrada por el eje de las abscisas y las siguientes curvas y rectas:

6. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$. R: $\frac{1}{9}(e^3 - 1)$.

7. $y = \operatorname{sen} x$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$. R: $\frac{2}{9}$.

8. $y = 2x^3$, $x = 1$, $x = 2$. R: 272,8.

9. $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $x = 2$. R: π.

10. Determinar el momento de inercia axial respecto del eje x del área del triángulo limitado por los ejes y la recta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

R: $\frac{ab^3}{12}$.

11. Determinar el momento de inercia axial respecto del eje x del área limitada por el eje Ox y la curva

$$y = 1 - x^2.$$

R: $\frac{32}{105}$.

12. Verificar que para el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se tienen los momentos de inercia axiales: $I_x = \frac{1}{4}\pi a^3 b$; $I_y = \frac{1}{4}\pi ab^3$ y el momento de inercia polar $I_0 = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$.

13. Mostrar que el momento polar de inercia respecto del origen del sector circular de ángulo central α en el círculo

$$\rho = r$$

es $\frac{1}{4}\alpha r^4$.

Determinar el momento de inercia polar del área limitada por una hoja de las siguientes curvas:

14. $\rho^2 = 2 \operatorname{sen} 2\vartheta$. R: $\frac{1}{4}\pi$.

15. $\rho = \operatorname{sen} 2\vartheta$. R: $\frac{3}{64}\pi$.

16. $\rho = \cos 3\vartheta$. R: $\frac{3}{32}\pi$.

17. El área limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$ gira alrededor del

eje y generando un sólido de revolución. Hallar el momento de inercia del cuerpo respecto del eje Oy. (Tómese la densidad $\delta = 1$).

R: $\frac{32}{3}\pi$.

18. **El área limitada por la curva $y^2 = x^3$, el eje Ox y la recta $x = 1$ gira alrededor del eje de las abscisas, engendrando un sólido de revolución. Determinar los momentos de inercia del cuerpo respecto de los ejes coordenados.**

R: $I_x = \frac{1}{14}\pi\delta$; $I_y = \frac{4}{11}\pi\delta$.

19. **Verificar que el momento de inercia de un cono circular de altura h y radio r respecto de su eje es igual a $\frac{1}{10}\pi\delta r^4 h$.**

20. **Calcular el momento polar de inercia de una esfera de radio r respecto de su centro.**

SOLUCIÓN:

Los puntos comprendidos entre 2 superficies esféricas de radios ϱ y $\varrho + d\varrho$ tienen una masa igual a $4\pi\varrho^2 d\varrho$ multiplicadas por la densidad δ que supondremos constante. El momento polar de inercia será

$$I_0 = 4\pi\delta \int_0^r \varrho^4 d\varrho = \frac{4}{3}\pi r^3\delta\ \frac{1}{5}r^2 \cdot 3 = \frac{3}{5}Mr^2.$$

Como la distancia ϱ de cada punto $P(x, y, z)$ de la esfera con respecto a O está dada por la relación $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, resulta que los momentos respecto de cada plano coordenado serán $\frac{1}{5}Mr^2$ y los momentos respecto de cada eje serán $\frac{2}{5}Mr^2$.

6. TRABAJO

Definición: Cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un punto material que se desplaza, se dice que efectúa un *trabajo*.

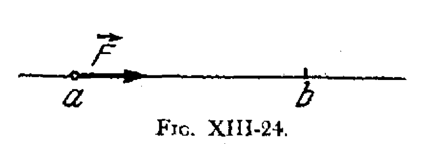


FIG. XIII-24.

Consideraremos primero el caso en que la fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un punto que se mueve sobre un segmento rectilíneo.

Si la fuerza $\vec{F}$ tiene una intensidad F constante y su dirección coincide con la de la recta (a, b), el trabajo se mide por el producto $F \times (b - a)$.

Si la fuerza $F(x)$ de dirección coincidente con la de la recta (a, b) es variable, para definir el trabajo se divide el segmento en n partes, iguales o desiguales, mediante los puntos $x_1 = a, x_2, \ldots, x_n = b$ y considerando en cada uno de estos intervalos un valor ξ_i se forma la suma

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ se tiene la expresión del trabajo

$$\mathcal{T} = \int_a^b F(x)\, dx.$$

Si la fuerza además de ser variable se mueve sobre una curva cualquiera el trabajo se expresa mediante las *integrales curvilíneas* que estudiaremos en el próximo tomo.

EJEMPLOS:

1°) Se llaman *fuerzas elásticas* a las que actúan sobre un punto proporcionalmente a la distancia a un punto fijo que tomaremos como origen. Será entonces $F(x) = -kx$ (1). Calcularemos el trabajo necesario para llevar esta fuerza de A a B de acuerdo a las notaciones de la figura.

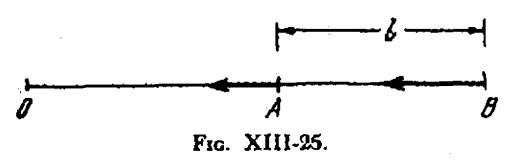


FIG. XIII-25.

Si designamos con a y b las abscisas de A y B, respectivamente, resulta

$$\mathcal{T} = \int_a^b F(x)\, dx = -k\int_a^b x\, dx = -k\frac{1}{2}\left[x^2\right]_a^b = -\frac{1}{2}k(b^2 - a^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}k(b-a)(b+a) = F_m l$$

siendo $l = (b - a)$, la longitud del camino AB y F_m el promedio de las fuerzas que actúan en A y en B.

EJERCICIOS:

1. La fuerza para estirar un resorte es proporcional a la elongación. La fuerza es de 12 kg cuando el resorte ha sido comprimido 2,5 cm. Calcular el trabajo realizado para comprimir el resorte 6 cm desde su posición de reposo.

   SOLUCIÓN:

   La fuerza F necesaria para comprimir el resorte x cm es $F = -kx$. $F = 12$ kg cuando $x = 2,5$ cm, o sea $12 = -2,5\,k$ y $k = -4,8$.
   El trabajo realizado es

$$\mathcal{T} = \int_a^b F\, dx = -k\int_a^b x\, dx = 4,8\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^6 = 4,8 \cdot 18 = 86,4 \text{ kg} \cdot \text{cm} = 0,864 \text{ kgm}.$$

2. Un resorte tiene la longitud inicial de 18 cm y una fuerza de 10 kg es suficiente para llevarlo a la longitud de 16 cm. ¿Cuál es el valor de la constante k para este resorte? ¿Cuál es el trabajo necesario para comprimirlo de 16 a 12 cm?

   R: $k = -5$ kg/cm; $\mathcal{T} = 2,8$ kgm.

---

(1) El signo menos que precede a la constante $k > 0$, se debe a que la fuerza tiende a mover al punto en sentido contrario al sentido positivo de las abscisas.

2°) *Teorema de la fuerza viva.* Si un cuerpo de masa m tiene una velocidad v se dice que tiene una *energía cinética* o *fuerza viva* $E = \frac{1}{2}mv^2$. Veremos la relación entre la variación de esta fuerza viva y el trabajo de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, teniendo presente la relación fundamental de la dinámica: $F = \text{masa} \times \text{aceleración} = m\frac{d^2x}{dt^2}$, si suponemos un cuerpo de masa m moviéndose sobre una recta bajo la acción de una fuerza F. Entonces es:

$$\mathcal{C} = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b m\frac{d^2x}{dt^2}\,dx = \int_a^b m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)dx.$$

Pero $\frac{dx}{dt} = v$ donde v designa la *velocidad*; por consiguiente se tiene

$$\mathcal{C} = \int_{v_1}^{v_2} m\frac{d}{dt}(v)\cdot v\,dt = \int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{dt}[(mv)]\cdot v\,dt.$$

La expresión subintegral evidentemente se puede escribir $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2)\,dt$, e integrando se tiene el teorema de la fuerza viva:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2}m\Big[v^2\Big]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = E_2 - E_1.$$

Si un cuerpo se mueve bajo la acción de una fuerza, el trabajo de estas fuerzas es igual a la variación de la fuerza viva.

3°) *Trabajo de la gravedad.* Cuando un cuerpo recorre una trayectoria bajo la acción de su peso efectúa un trabajo que sólo depende de los extremos de la trayectoria.

Deberemos generalizar la noción de trabajo al caso de una fuerza constante y una trayectoria curvilínea.

Consideremos en un plano vertical un cuerpo que recorre el arco APB bajo la acción de su peso $p = mg$ (fuerza constante).

El trabajo elemental de la fuerza cuando el punto pasa de P a Q es por definición $p \times PQ \times \cos(p, PQ) = p \times P'Q'$, siendo P' y Q' las proyecciones de estos puntos sobre el eje vertical.

Dividiendo la trayectoria APB en n partes y sumando los trabajos elementales resultará como trabajo total

$$p\sum P'Q' = p \times A'B' = p(y_B - y_A).$$

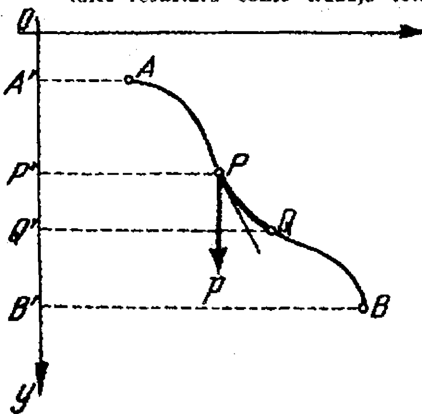


FIG. XIII-26.

Esta fórmula muestra que el trabajo no depende del conjunto de puntos de la trayectoria sino de sus extremos exclusivamente. Cuando esto ocurre se dice que la fuerza deriva de un *potencial*. En este caso particular el potencial es $p \cdot y$ y el trabajo es igual a la disminución de esta energía potencial.

4°) *Trabajo de expansión de un gas perfecto.* Consideremos el gas contenido en el interior de un cilindro con pistón de sección s. Cuando el gas se expande, es decir aumenta su volumen (y por consiguiente dismi-

nuye su presión), el pistón se mueve de modo que el gas ha realizado un *trabajo*. Como la fuerza = presión × sección, es variable (dado que la presión varía con cada posición del pistón) definiremos el trabajo $\mathcal{T}$ mediante la integral definida:

$$\mathcal{T} = \int_a^b p \cdot s\, dx.$$

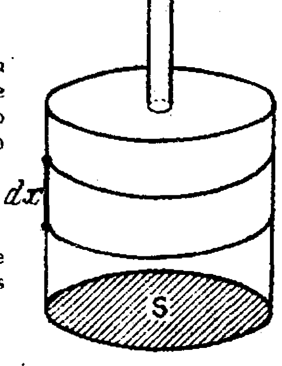


Fig. XIII-27.

Ahora bien, $s\,dx$, es el producto de la sección del cilindro por el desplazamiento, o sea mide el volumen determinado por el desplazamiento del pistón y resulta como expresión del trabajo

$$\mathcal{T} = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv.$$

Ahora es necesario conocer la relación entre p y v para calcular el trabajo. Consideraremos algunos casos especiales:

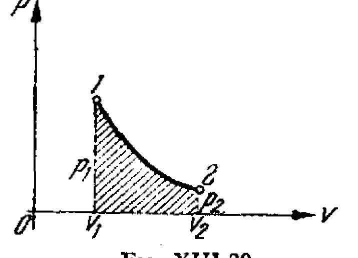


Fig. XIII-28.

a) Si la expansión es *isotérmica* (a temperatura absoluta T constante), se cumple la ley de Boyle-Mariotte:

$$pv = p_1 v_1 = nRT, \quad \text{o sea} \quad p = \frac{p_1 v_1}{v}$$

y la expresión del trabajo resulta

$$\mathcal{T} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{p_1 v_1}{v}\, dv = p_1 v_1 \Big[\ln v\Big]_{v_1}^{v_2} = p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = nRT \ln \frac{v_2}{v_1}.$$

b) Si la expansión es *adiabática* (es decir si no hay intercambio de calor con el medio exterior) vale la ley de Poisson,

$$pv^k = \text{constante} = C,$$

con k = constante (igual a $\frac{5}{3}$ para los gases monoatómicos y a $\frac{7}{5}$ para los diatómicos). El trabajo se expresa entonces por:

$$\mathcal{T} = \int_{v_1}^{v_2} p\, dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{p_1 v_1^k}{v^k}\, dv = \int \frac{p_1 v_1^k}{k-1}\left[\frac{1}{v_1^{k-1}} - \frac{1}{v_2^{k-1}}\right] =$$

$$= \frac{p_1 v_1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}\right] = \frac{p_1 v_1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{k-1}\right] = \frac{1}{k-1}(p_1 v_1 - p_2 v_2).$$

Esta misma expresión vale para los *cambios politrópicos* (calor específico constante), cuya ley es pv^n = constante.

Ejercicios:

1. Una cantidad de aire sometida a la presión de 1,0545 atmósferas es comprimida isotérmicamente de 32 772 a 65,544 cm³. Calcular el trabajo realizado. R: 2 157,765 kgm.

2. **Determinar el trabajo necesario para comprimir el volumen de aire del ejercicio 1 adiabáticamente ($pv^{1,4}$ = constante).**

   R: 9 559,722 kgm.

3. **Un volumen de 3 277,2 cm³ sometido a la presión de 1,0545 atmósferas es comprimido hasta ocupar 819,3 cm³. Calcular el trabajo realizado en la compresión cuando**

   a) es isotérmica: pv = constante;

   b) es adiabática: $pv^{1,4}$ = constante.

   R: a) 47,9 kgm; b) 58,77 kgm.

4. **Una masa de gas que ocupa un volumen inicial de 453,040 cm³ a la presión de 4,218 atmósferas se expande hasta tener la presión de 2,109 atmósferas. Calcular el volumen final y el trabajo realizado por el gas si la ley es**

   a) pv = constante;

   b) $pv^{1,2}$ = constante.

   R: a) 906,080 cm³, 13 305,555 kgm; b) 806,977 cm³, 10 500 kgm.

EL CICLO DE CARNOT: Un ciclo es una transformación de un gas que partiendo de ciertos valores de sus variables (presión, temperatura, volumen, ...) vuelve a sus valores iniciales.

Cuando un gas ideal efectúa un ciclo recorriendo dos isotermas y dos adiabáticas se dice que ha efectuado un ciclo de Carnot. Partiendo del estado 1 (con volumen v_1 y presión p_1) recorre comprimiéndose la adiabática 1-2, llegando a un volumen v_2 y presión p_2. De allí se expande según la isoterma 2-3 corespondiente a la temperatura T hasta llegar al estado 3. Desde 3 comienza la expansión adiabática de T a T_0 llegando al estado 4, desde donde sufre la compresión isotérmica (temperatura T_0) volviendo al estado inicial.

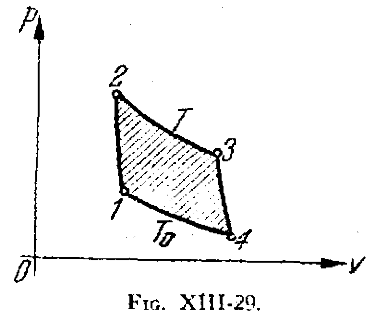


FIG. XIII-29.

Calculemos el trabajo que ha entregado el sistema, medido de acuerdo a lo visto anteriormente por el área encerrada por las isotermas y adiabáticas entre los puntos 1, 2, 3, 4.

Durante los pasajes de 1 a 2 y de 3 a 4 (adiabáticas) el intercambio de calor es cero y el trabajo también es cero.

Entre 2 y 3 (isoterma) el trabajo es

$$\mathcal{T}_2 = nRT \ln \frac{v_3}{v_2}$$

y entre 4 y 1 (isoterma) es

$$\mathcal{T}_1 = nRT_0 \ln \frac{v_4}{v_1}.$$

De acuerdo a las relaciones entre adiabáticas e isotermas:

$$p_1 v_1 = p_4 v_4 \qquad\qquad p_2 v_2 = p_3 v_3$$

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k \qquad\qquad p_3 v_3^k = p_4 v_4^k$$

resulta

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{v_4}{v_1}$$

y por consiguiente los logaritmos de estas relaciones también serán iguales, con lo que se tiene

$$\frac{\mathcal{E}_2}{T} = \frac{\mathcal{E}_1}{T_0}$$

o sea, si sustituímos las expresiones $\mathcal{E}$ por las correspondientes *cantidades de calor* Q, utilizando el equivalente calórico del trabajo,

$$\frac{Q_2}{T} = \frac{Q_1}{T_0}.$$

El rendimiento térmico es

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$$

y de acuerdo a la relación anterior resulta

$$\eta = \frac{T - T_0}{T},$$

con lo cual se muestra que *para un gas ideal el rendimiento térmico de un ciclo de Carnot depende exclusivamente de las temperaturas de las fuentes.*

CAPÍTULO XIV

SERIES NUMERICAS

1. DEFINICIONES

Dada una sucesión de *infinitos* números $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ se llama *serie* a la expresión:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Como se ve, se trata de "una suma de infinitos sumandos". Pero ¿qué significa "sumar infinitos sumandos"? Llamaremos S, *suma de la serie*, al límite de la sucesión de las sumas parciales $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (u_0 + u_1 + \ldots + u_n).$$

Si este límite (1) es finito la serie se llama *convergente;* si es infinito la serie se llama *divergente* y si S_n no tiende a ningún límite la serie se llama *oscilante.*

EJEMPLOS:

1°) Sea la serie $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$.

La suma parcial S_n es en este caso

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Calculando el límite de esta expresión cuando $n \to \infty$, resulta

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

La serie es convergente y su suma es 1.

2°) La serie $1 + 2 + 3 + \ldots$ es evidentemente *divergente* pues $S_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

3°) La serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ es *oscilante* pues la suma S_n es alternadamente igual a 1 ó 0 según se tome un número impar o par de términos. Por consiguiente S_n no tiende a ningún valor definido cuando $n \to \infty$.

---

(1) Hemos definido el límite de una sucesión en la página 123.

EJERCICIOS:

Escribir el término general de las siguientes series [1]:

1. $3 - 9 + 27 - 81 + \cdots$ R: $(-1)^n 3^{n+1}$.

2. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$ R: $\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

3. $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \cdots$ R: $\frac{n+2}{n+1}$.

4. $x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$ R: $\frac{x^{n+1}}{n!}$.

5. $\frac{\sqrt{x}}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{4} + \frac{x^2}{8} + \cdots$ R: $\frac{x^{\frac{1}{2}(n+1)}}{2^n}$.

6. $\frac{z^4}{2} - \frac{z^6}{4} + \frac{z^8}{6} - \frac{z^{10}}{8} + \cdots$ R: $(-1)^n \frac{z^{2n}}{2(n-1)}$, $n \geqslant 2$.

Calcular la suma de los 4 primeros términos de las series cuyo término general se indica:

7. $u_n = \frac{1}{n}$, para $n \geqslant 1$. R: $\frac{25}{12}$.

8. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, para $n \geqslant 1$. R: $\frac{7}{12}$.

9. $u_n = (-2)^n$, para $n \geqslant 0$. R: -5.

10. $u_n = \frac{1}{n^2}$, para $n \geqslant 1$. R: $\frac{205}{144}$.

11. $u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$, para $n \geqslant 10$. R: $\frac{1}{3}$.

12. $u_n = \frac{2^n}{n!}$, para $n \geqslant 0$. R: $\frac{19}{3}$.

2. SERIE GEOMETRICA

Es aquella en la cual cada término es igual al anterior multiplicado por un factor constante llamado *razón* de la serie.

En particular si el primer término es 1 y la razón es q resulta la serie:

---

(1) Hemos escrito como subíndice del primer término u_0 el valor 0. Algunas veces se comienza por el valor u_1, lo cual no trae aparejado ningún cambio en el desarrollo ulterior. Correspondientemente a veces la suma parcial S_n tiene n y otras $(n+1)$ términos.

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Para estudiar en que casos la serie geométrica converge y en cuales diverge, formemos la suma de los $(n + 1)$ primeros términos

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n.$$

Por tratarse de una progresión geométrica, para $q \neq 1$ (¹), es:

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+1}}{q - 1} - \frac{1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{n+1}}{1 - q}.$$

En tanto sea $-1 < q < 1$, es decir $|q| < 1$, q^{n+1} tiende a 0 y por consiguiente el segundo término tiende a 0, quedando

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

La serie geométrica es *convergente* si $|q| < 1$ y su suma es igual al primer término dividido por 1 menos la razón.

Si $q = 1$, la expresión anterior de S_n no puede emplearse (¿por qué?) pero siendo todos los términos iguales a 1 resulta $S_n = n$ y $S_n \to \infty$: la serie es *divergente*.

Si $q = -1$, $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \pm 1$ y la serie es *oscilante* pues S_n vale 1 ó 0 y no tiende a un límite único.

Si $q > 1$. evidentemente es $S_n > n$ y cuando $n \to \infty$, $S_n \to \infty$: la serie es *divergente*.

Si $q < -1$, $q^{n+1} \to \pm \infty$ y la serie también resulta *oscilante*.

La generalización de la discusión anterior a la serie

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

está resumida en el siguiente cuadro:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} \text{si } |q| < 1 & \text{es } S = \dfrac{a}{1 - q}. \\ \text{si } q \geqslant 1 & \text{es divergente.} \\ \text{si } q \leqslant -1 & \text{es oscilante.} \end{cases}$$

(¹) Para obtener una expresion de S_n basta multiplicar ambos miembros de la igualdad por q y restar miembro a miembro: $S_n q - S_n = q^{n+1} - 1$ o sea $S_n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$. La demostración rigurosa de esta fórmula se hace mediante el principio de inducción completa (ver Cap. I. pág. 15).

EJEMPLOS:

1º) Calcular la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

Por tratarse de una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$ es convergente:

$$S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

2º) Expresar como fracción ordinaria el decimal periódico $N=0{,}282828\ldots$

Siendo

$$N=\frac{28}{100}+\frac{28}{100^2}+\frac{28}{100^3}+\cdots$$

una serie geométrica de razón $\frac{1}{100}$, resulta $N=\dfrac{\frac{28}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\dfrac{28}{99}$.

EJERCICIOS:

Dado el primer término y la razón de las siguientes series geométricas, calcular la suma parcial S_4 y la total S:

1. $a=1,\ q=2.$ R: $S_4=15;\ S=\infty.$

2. $a=5,\ q=-1.$ R: $S_4=0;$ oscila.

3. $a=1,\ q=-\frac{1}{3}.$ R: $S_4=\frac{20}{27};\ S=\frac{3}{4}.$

4. $a=9,\ q=\frac{1}{3}.$ R: $S_4=\frac{40}{3};\ S=\frac{27}{2}.$

5. Calcular la suma

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\cdots$$

Marcar sobre una recta en la que se ha señalado un origen O y una unidad de medida, los valores de las sumas parciales que se acercan por ambos lados al punto de abscisa $\frac{1}{3}$.

6. Calcular la suma de la serie

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\cdots$$

R: $\frac{5}{8}$.

(Obsérvese que los términos de orden impar y los de orden par forman separadamente 2 series geométricas cuyas sumas son $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{4}$).

7. Expresar como fracción ordinaria el decimal periódico $0{,}142857\,142857\ldots$

R: $\frac{1}{7}$.

8. Expresar como fracción ordinaria el decimal periódico: $N = 0{,}abc\,abc\,abc\ldots$ donde a, b, c son dígitos cualesquiera.

R: $N = \dfrac{abc}{999}$.

9. Expresar como fracción ordinaria el decimal periódico mixto:

$$0{,}38\,153\,153\ldots.$$

R: $\dfrac{38153 - 38}{99900} = \dfrac{38115}{99900}$.

(Procédase como en el ejemplo 2°).

10. Demostrar que un decimal periódico mixto es igual a una fracción ordinaria cuyo numerador es igual al número formado por el no-período y el período menos el no-período y cuyo denominador se forma con tantos 9 como cifras tiene el período seguido de tantos ceros como cifras tiene el no-período.

11. En un cuadrado de 5 cm de lado se unen los puntos medios de sus lados y se tiene un nuevo cuadrado. En este segundo cuadrado se unen los puntos medios y se obtiene un tercer cuadrado. Así se continúa indefinidamente. ¿Cuál es la suma de las áreas de los infinitos cuadrados? Generalícese para un cuadrado de lado a.

R: 50 cm^2; $2a^2$.

(Obsérvese que la suma de las áreas es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$).

12. Trácese desde el vértice C del ángulo recto de un triángulo rectángulo ABC la altura correspondiente a la hipotenusa c. Desde su pie trácese la perpendicular al cateto b; desde su pie la perpendicular a la hipotenusa y así sucesivamente. Calcúlese la longitud total de la poligonal de infinitos lados así obtenida.

R: $ab : (c - b)$.

(Obsérvese que los triángulos rectángulos que se van formando al trazar las perpendiculares son semejantes al triángulo dado. Resulta una serie geométrica de razón $\frac{b}{c}$).

13. Probar que la suma

$$S = 1 + 2r + 2r^2 + \ldots$$

es convergente si $-1 < r < 1$ y que es $S = \dfrac{1 + r}{1 - r}$.

14. Dada la serie

$$r + \frac{r}{1 + r} + \frac{r}{(1 + r)^2} + \cdots$$

determinar para qué valores converge y en ese caso calcular la suma.

R: La serie converge si $r > 0$ ó $r < -2$; la suma es $1 + r$. También converge si $r = 0$ y la suma es 0.

15. *Aquiles y la tortuga.*

Aquiles, "el de los pies ligeros" corre con una velocidad de 10 metros por segundo y la tortuga con una velocidad de 10 centímetros por segundo. Supongamos que Aquiles parte de A para alcanzar a la tortuga que sale, en el mismo instante de T, siendo la distancia $AT = 990$ m. Cuando Aquiles llegue a T, la tortuga llegará a T'; cuando Aquiles llegue a T', la tortuga llegará a T'' y así sucesivamente. ¿Alcanzará Aquiles a la tortuga? En caso afirmativo ¿cuándo la alcanzará?
Generalícese para una distancia $AT = l$ y una velocidad de Aquiles n veces superior a la velocidad de la tortuga v_T.

Solución:

Si A corre hacia T, tardará 99 segundos en llegar a T. En esos 99 segundos la tortuga se habrá trasladado a T' con $TT' = 99 \times 0{,}1 = 9{,}9$ m. Aquiles

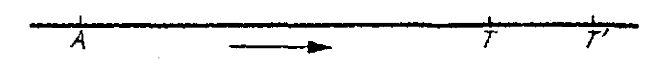


Fig. XIV-1.

que ha llegado a T para alcanzar el punto T' empleará $9{,}9 : 10 = 0{,}99$ segundos. En este tiempo la tortuga se ha trasladado a T'' con $T'T'' = 0{,}99 \times 0{,}1 = 0{,}099$ m y Aquiles empleará, para recorrer esa distancia, $0{,}099 : 10 = 0{,}0099$ segundos.
El tiempo total que emplea Aquiles para alcanzar a la tortuga es

$$99 + 0{,}99 + 0{,}0099 + \dots,$$

serie geométrica de razón 0,01 cuya suma será $99 : (1 - 0{,}01) = 100$ segundos.

En general será $t = \dfrac{l}{v_T(n-1)}$.

También puede resolverse elementalmente mediante la ecuación de primer grado $10\,t = 0{,}1\,t + 990$, obtenida igualando los espacios recorridos al cabo de un tiempo t.
Este problema está vinculado a una de las 4 célebres *aporías* de Zenón de Elea a las que se refiere Aristóteles en su *Física*.
El problema, tal como lo hemos planteado, exige sumar *infinitos* términos. La suma de un número infinito de términos ¿puede resultar finita? Ahora sabemos que la contestación es afirmativa, de acuerdo a la teoría de las series convergentes.

3. CONDICION NECESARIA DE CONVERGENCIA

Demostraremos que en toda serie convergente el término general tiende a cero.

En efecto, de acuerdo a la definición de serie convergente es

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

o también

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

El límite de $S_n - S_{n-1} = u_n$, cuando $n \to \infty$ será igual a la diferencia de límites:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Por consiguiente: *Si el término general de una serie no tiende a cero, la serie no es convergente.*

Pero puede tender a cero el término general y la serie no ser convergente. Tal es lo que ocurre con la serie

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

en la cual $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ es mayor que n veces el último término: $S_n > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Luego $S_n \to \infty$, a pesar de que $u_n \to 0$.

Por consiguiente la condición $u_n \to 0$ *no es suficiente* para asegurar la convergencia de la serie; en cambio es *necesaria*, vale decir se debe cumplir toda vez que la serie sea convergente.

EJERCICIOS:

Escribir el término general de las series cuyos primeros términos se dan a continuación y determinar en cuales de ellas el término general no tiende a cero:

1. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots;$

2. $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots;$

3. $1 + \frac{4}{3} + \frac{6}{4} + \frac{8}{5} + \cdots;$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \cdots;$

5. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots;$

6. $\frac{4}{1} + \frac{7}{2} + \frac{10}{3} + \frac{13}{4} + \cdots;$

7. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdots.$

8. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots.$

R: No tiende a 0 el término general en 3, 4, 6, y por consiguiente estas series no son convergentes. Las series 5, 7 y 8 son divergentes (como veremos más adelante) a pesar de que en ellas el término general tiende a 0.

9. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$, cuyo término general tiende a cero cuando $n \to \infty$, es divergente.

(Multiplíquese por el conjugado del denominador de u_n y calcúlese S_n).

4. CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE DE CONVERGENCIA

CAUCHY estableció que la condición necesaria y suficiente para la convergencia de una serie es que la suma de p términos a partir de un cierto rango

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+p}$$

pueda hacerse tan pequeña como se quiera con tal de tomar n suficientemente grande, cualquiera sea p fijo.

Es fácil demostrar que la condición es *necesaria*, esto es, que si la serie es convergente se verifica la condición de Cauchy. En efecto, si es S la suma de la serie se puede escribir:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} = S_{n+p} - S_n = (S_{n+p} - S) - (S_n - S)$$

y puesto que $S_n \to S$; $S_{n+p} \to S$, el último miembro puede hacerse tan pequeño como se quiera con tal de tomar n suficientemente grande.

Veamos un ejemplo concreto. En la serie convergente

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots,$$

determinar n para que la suma de $p = 10$ términos sea menor que 0,001.

Para que resulte

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+10} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+10} - \frac{1}{n+11}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+11} < \frac{1}{1\,000};$$

habrá que tomar $n > 95$.

Si se pide que la suma de *todos* los términos de esta serie *a partir* de un u_n sea menor que 0,001, o en otros términos, si se quiere que el *resto* de la serie:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots, \qquad [1]$$

sea menor que 0,001, debe ser $n > 999$, puesto que la suma [1] es menor que $\frac{1}{n+1}$.

La condición es suficiente. Sin hacer una demostración rigurosa (que puede verse en los tratados de Análisis Matemático) podemos razonar intuitivamente en la siguiente forma:

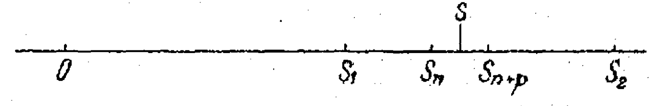


FIG. XIV-2.

Representemos con puntos de una recta las sumas parciales de la serie. Puesto que la suma $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} = S_{n+p} - S_n$.

es tan pequeña como se quiera a partir de un valor de $n = n_0$, cualquiera sea p, resultará que *todas* las infinitas sumas S_{n+p} estarán en un entorno de S_{n_0}. Estas infinitas sumas S_{n+p} deben tender a un cierto *límite único* S, pues si hubiera dos límites S' y S'' distintos, resultaría que habría valores $S_{n'}$ y $S_{n''}$, con n' y n'' mayores que n_0, tan próximos como se quiera de S' y S'', que no cumplirían la condición $(S_{n'} - S_{n''})$ arbitrariamente pequeño, puesto que hemos supuesto que la distancia $S' - S''$ es un valor distinto de cero.

El criterio de Cauchy (1823) es muy importante por cuanto permite dar una *definición intrínseca* del límite de la sucesión S_n en base a los propios términos de la sucesión.

EJERCICIOS:

1. Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ determinar el número n_0 tal que para $n > n_0$ y $p = 5$ resulte $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} < 0{,}001$. Calcular n_0 para que el resto de la serie $(p = \infty)$ sea $< 0{,}001$.

   R: $n_0 = 15$; $n_0 = 22$.

   (Obsérvese que es $u_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$).

2. Demostrar que la serie armónica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

   no es convergente, aplicando la condición de Cauchy.

   (La suma de los $(n^2 - n)$ términos decrecientes a partir del $(n+1)$-simo:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2},$$

   no puede hacerse tan pequeña como se quiera. En efecto, siendo cada uno de estos términos mayor que el último, será la suma mayor que $(n^2 - n)\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$ y esta expresión, para n suficientemente grande es muy próxima a 1 y por consiguiente no puede hacerse arbitrariamente pequeña).

5. SERIES DE TERMINOS POSITIVOS

Si en la definición general de serie y de suma de una serie se consideran solamente términos positivos, se tienen las series de términos positivos.

En este caso resultarán series convergentes y series divergentes, pero nunca se tendrán series oscilantes, puesto que la sucesión S_n de

las sumas parciales cuando $n \to \infty$ tenderá a un valor finito o a un valor infinito.

EJEMPLOS:

1°) Sea $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.

La suma parcial

$$S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!},$$

se puede escribir

$$S_n=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\frac{1}{1!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

y el límite de S_n cuando $n \to \infty$ es $S=1$.

2°) Sea la serie:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Consideremos las primeras sumas parciales

$$S_1=1,$$

$$S_2=1+1=2,$$

$$S_3=1+1+\frac{1}{2!}=2{,}5,$$

$$S_4=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=2{,}667,$$

$$S_5=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=2{,}708,$$

....

Es evidente que las sumas parciales

$$S_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!},$$

crecen con n, por tratarse de números positivos. Pero, ¿crecen estas sumas por encima de todo límite? Veremos que no.
Comparemos S_n con la suma

$$\sigma_n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

en la cual cada término es mayor o igual que el correspondiente término de S_n. Pero σ_n es (dejando de lado el primer término 1) una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y por consiguiente su suma es siempre menor que la suma de la serie geométrica correspondiente: $\sigma_n < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$

Por lo tanto de S_n sabemos que es una sucesión creciente y además que se mantiene inferior a 3. *Admitiremos que toda sucesión creciente y acotada tiene un límite finito.*

Gráficamente



FIG. XIV-3.

El límite de S_n, o sea la suma de la serie propuesta, es el célebre número e que aparece en multitud de problemas de matemática:

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ \ldots$$

(Se trata de un número irracional, como hemos mostrado en la página 256; por ello su expresión decimal contiene infinitas cifras no periódicas).

6. CRITERIOS DE COMPARACION

I) *Convergencia.*

Hemos demostrado la convergencia de la serie del número e comparándola con otra serie, también de términos positivos, que tienen sus términos respectivamente mayores y que es convergente. El procedimiento se puede aplicar a cualquier serie de términos positivos.

Si los términos de una serie de términos positivos son respectivamente menores o iguales que los de una serie de términos positivos que se sabe que es convergente, la primera serie es también convergente. En efecto, sea $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$, una serie de términos positivos cuya convergencia se quiere estudiar y

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

una serie de términos positivos de la cual se sabe que es convergente; sea además $u_n < a_n$, a partir de un cierto valor de n.

Si las sumas parciales son

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n,$$

$$A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n,$$

resulta, por ser $u_n \leqslant a_n$, $S_n \leqslant A_n$ y $\lim_{n\to\infty} S_n \leqslant \lim_{n\to\infty} A_n = A$, si designamos con A la suma de la serie que sirve de punto de comparación.

En virtud del principio que hemos admitido anteriormente de que toda sucesión creciente y acotada tiene un límite, resulta que la sucesión S_n (que es creciente porque está constituida por sumandos

positivos y acotada porque es inferior a A) tiene un límite $S \leqslant A$, o en otros términos la serie es *convergente*.

EJEMPLOS:

1°) La serie $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ es convergente, pues sus términos son respectivamente menores que los de la serie convergente (ya estudiada en la pág. 498),

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

pues $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$ dado que es $n^2 > n^2 - n$.

2°) La serie

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

es convergente si es $p > 1$. En efecto, sus términos son respectivamente menores (o iguales) que los de la serie cuya suma parcial es (para $n = 2^r - 1$)

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$$

que se puede escribir

$$\sigma_n = 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \cdots + \frac{2^m}{(2^m)^p} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^{p-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \frac{1}{2^{3(p-1)}} + \cdots + \frac{1}{2^{m(p-1)}} =$$

$$= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^m$$

si se designa con q el valor $\frac{1}{2^{p-1}}$. La última expresión es una progresión geométrica y la serie correspondiente es convergente si $|q| < 1$. Como $q = \frac{1}{2^{p-1}}$, resultará su valor menor que 1 sólo si $p > 1$, y el teorema queda demostrado.

II) *Divergencia.*

En correspondencia con el criterio de comparación para establecer la convergencia de una serie de términos positivos, existe un criterio para establecer la divergencia.

Si los términos de una serie de términos positivos son respectivamente mayores o iguales que los de una serie de términos positivos que se sabe que es divergente, la primera serie es también divergente.

EJEMPLO:

La serie armónica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots$$

es divergente. En efecto, sus términos son respectivamente mayores o iguales que los de la serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}+\cdots,$$

(en la cual aparecen sólo términos del tipo $\frac{1}{2^n}$).

Esta última serie es evidentemente divergente pues resulta

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\to\infty.$$

OBSERVACIÓN: Las series del tipo $\frac{1}{n^p}$, llamadas *series p*, son convergentes si es $p > 1$ y divergentes si es $p \leqslant 1$. Si p es un poco mayor que 1, por ejemplo $p = 1{,}0001$ la serie es convergente mientras que para $p = 1$ la serie es divergente. Esto se explica observando que las series para $p > 1$ son todas convergentes pero su suma es cada vez mayor a medida que p se acerca al valor 1, de modo que la suma se hace infinita cuando es $p = 1$.

OTRAS FORMAS DE LOS CRITERIOS DE COMPARACIÓN: Aplicando los criterios de comparación resultan las siguientes reglas de aplicación muy sencilla:

I) Sea $\sum\frac{1}{c_n}$ una serie convergente. Si

$$\lim_{n\to\infty}(c_n a_n) = L,$$

siendo L un número finito, es $\sum a_n$ convergente.

Es suficiente observar que resulta $a_n < \frac{L'}{c_n}$ siendo L' un número finito mayor que L y entonces puede aplicarse el criterio de comparación.

II) Sea $\sum\frac{1}{d_n}$ una serie divergente. Si

$$\lim_{n\to\infty}(d_n a_n) = L > 0$$

la serie $\sum a_n$ es divergente.

Eligiendo $0 < K < L$ será $a_n > \frac{K}{d_n}$.

EJEMPLOS:

1º) La serie $\sum \frac{1}{n^2+1}$ es convergente como se ve eligiendo $c_n = n^2$, con lo que resulta $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 =$ número finito.

2º) La serie $\sum \frac{1+n}{1+n^2}$ es divergente pues si $d_n = n$ se tiene $\frac{1+n}{1+n^2} \cdot n \to 1 > 0$.

EJERCICIOS:

1. Demostrar que si $\sum u_n$ es convergente, $\sum u_n{}^2$ y $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ son convergentes.

Teniendo en cuenta que la serie armónica diverge, que la serie-p converge para $p > 1$ y diverge para $p \leqslant 1$ y que la serie geométrica converge o diverge para $q < 1$, $q \geqslant 1$, respectivamente, determinar el comportamiento de las series siguientes, aplicando el criterio de comparación:

2. $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2^5}} + \frac{1}{\sqrt{3^5}} + \frac{1}{\sqrt{4^5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^5}} + \cdots$ (C)

3. $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + \cdots$ (D)

4. $\frac{3}{1} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{3}{2^n} + \cdots$ (C)

5. $\frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} + \cdots$ (C)

6. $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots$ (D)

7. $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{n+4} + \cdots$ (D)

8. $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{2^n+3} + \cdots$ (C)

9. $\frac{1}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[4]{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{5}} + \cdots$ (D)

10. $\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{65} + \cdots + \frac{1}{n^3+1} + \cdots$ (C)

11. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{4!} + \frac{2^2}{6!} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2n)!} + \cdots$ (C)

12. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdots + \frac{1}{\ln n} + \cdots$ (D)

13. $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{5}{10} + \frac{7}{17} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2+1} + \cdots$ (D)

14. $-1-7+\frac{5}{2}+\frac{13}{9}+\cdots+\frac{3n+1}{n^2-5}+\cdots$ (D)

15. $2+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\frac{17}{64}+\cdots+\frac{n^2+1}{n^3}+\cdots$ (D)

16. $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\cdots+\frac{\ln n}{n}+\cdots$ (D)

17. $\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\cdots+\frac{1}{7n}+\cdots$ (D)

18. $-1+2+\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\cdots+\frac{2}{3n-5}+\cdots$ (D)

19. $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\cdots+\frac{1}{n^2+5}+\cdots$ (C)

20. $\frac{1}{9}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots$ (C)

21. $0+\frac{1}{8}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{n-1}{n^3}+\cdots$ (C)

22. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{3\sqrt{10}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}+\cdots$ (C)

23. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\cdots$ (D)

24. $4+\frac{8}{17}+\frac{12}{626}+\cdots+\frac{4n}{1+n^4}+\cdots$ (C)

25. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2+\sqrt{n}}+\cdots$ (D)

26. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{27}+\frac{1}{256}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$ (C)

Mediante la descomposición en fracciones, verificar las sumas de las series siguientes:

27. $\sum_1^\infty \frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}.$

28. $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}.$

29. $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}.$

30. $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{11}{96}.$

31. $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{18}.$

32. (Generalización del ejercicio anterior)

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}=\frac{1}{k\cdot k!}.$$

Observación: Ténganse en cuenta las relaciones:

$$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right];$$

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right];$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right];$$

$$\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+4)}\right];$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right].$$

Convergencia y divergencia: En el estudio de las series hay dos cuestiones distintas: una es saber con certeza si la serie es convergente o no y otra es calcular la suma de la serie.

Desde el punto de vista teórico la primera cuestión es la más importante, porque hasta tanto no se haya demostrado la convergencia de una serie no se puede operar con los términos de la serie sin correr el riesgo de llegar a resultados absurdos.

Una vez que se ha demostrado la convergencia de una serie se podrá tener un valor tan próximo como se quiera de la suma de la serie con tal de tomar un número suficientemente grande de términos. (Sobre este punto y enfocando la cuestión desde el punto de vista del cálculo numérico volveremos en la pág. 572).

Ya hemos estudiado algunos criterios que permiten decidir sobre la convergencia o divergencia de una serie de términos positivos comparando sus términos con los de otras series de convergencia o divergencia conocidas. Ahora estableceremos otros criterios en los que se emplean exclusivamente términos de la serie dada.

7. CRITERIOS DE CONVERGENCIA: D'ALEMBERT, CAUCHY, KUMMER Y RAABE

La comparación de una serie de términos positivos con una serie geométrica permite establecer los criterios de D'Alembert y Cauchy.

Criterio de D'Alembert: En una serie de términos positivos

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

se calcula

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=L.$$

Si es $L<1$, la serie es convergente; si es $L>1$, la serie es diver

gente. Si $L = 1$, este criterio no permite decidir sobre la convergencia o divergencia de la serie.

Demostración:

a) *Convergencia.* Puesto que es el $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = L < 1$, si se adopta

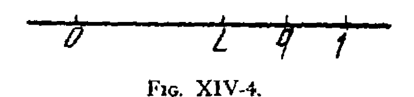


Fig. XIV-4.

un valor q mayor que L pero menor que 1, será

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} < q$$

desde un valor de n en adelante, por ejemplo desde $m + 1$. (Para algunos valores de n podrá ser $\frac{u_n}{u_{n-1}} > q$).

Entonces será

$$u_{m+1} < q \cdot u_m,$$

$$u_{m+2} < q \cdot u_{m+1} < q^2 u_m,$$

$$u_{m+3} < q \cdot u_{m+2} < q^3 u_m,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_n < q^{n-m} u_m,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Por consiguiente los términos de la serie $u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n + \dots$, serán menores que los de la serie geométrica $u_m(q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-m} + \dots)$. Esta serie por ser geométrica y de razón $q < 1$, será convergente. El criterio de convergencia queda así demostrado.

b) *Divergencia:* En el caso $L > 1$, se demuestra la divergencia observando que desde un valor de n en adelante, por ejemplo desde $m + 1$, es $\frac{u_n}{u_{n-1}} > 1$ y por consiguiente la serie $u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_n + \dots$ es mayor que la serie $u_m + u_m + u_m + \dots$, evidentemente divergente.

Ejemplos:

1°) La serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

tiene como término general $u_n = \frac{1}{n!}$ y por consiguiente es

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Siendo $L = 0$, la serie es convergente.

2°) La serie

$$\frac{1!}{100} + \frac{2!}{100^2} + \frac{3!}{100^3} + \cdots$$

tiene como término general $\frac{n!}{100^n}$. La relación

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n!}{100^n} \cdot \frac{100^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n}{100} \to \infty.$$

Por ser $L > 1$ la serie es divergente (¹).

Obsérvese cuán pequeños son los primeros términos de esta serie divergente: $0{,}01 + 0{,}0002 + 0{,}000006 + \ldots$. El centésimo término es menor que un decimal del orden 42 (es decir después de la coma hay 41 ceros que preceden al 1). Los primeros 268 términos son todos menores que la unidad pero a partir del 269° el término general ya es mayor que 1. Los términos crecen entonces rápidamente: el término de orden 500 es aproximadamente $1{,}22 \times 10^{134}$.

Conviene insistir sobre el hecho de que la convergencia o divergencia de una serie no depende de los primeros términos, sino del término general.

Observación: Nótese que el criterio de D'Alembert exige que el límite L sea menor que 1, no siendo suficiente que la razón $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ se mantenga constantemente menor que 1. En efecto, en el caso de la serie armónica ese cociente es $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ y a pesar de ser menor que 1, la serie es *divergente*. Pero el criterio, bien aplicado, no asegura nada en este caso pues resulta $L = 1$, esto es, se trata del caso dudoso.

Ejercicios:

Aplicando el criterio de D'Alembert indicar si las series de las cuales damos el término general u_n, convergen o divergen:

1. $3 : 2^n$;	2. $2^n : 3$;	3. $3 : 10^n$;
4. $2^n : n!$;	5. $\frac{1}{5^{n-1}} \frac{3^{n-1}}{n^2}$;	6. $n\,2^n : 3^n$;
7. $3^n : n\,2^n$;	8. $9^n : n!$;	9. $n! : (2n)!$;

(¹) En realidad no hace falta aplicar ningún criterio para demostrar la divergencia de esta serie, basta observar que el término general no tiende a cero.

10. $(n^2+1):4^n$; 11. $(2n+1):5^n$; 12. $\dfrac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$;

13. $1:n^p$.

R: Son todas convergentes excepto 2 y 7. Para 13 este criterio no permite asegurar nada, tanto para $p>1$, como para $p\leqslant 1$, a pesar que en el primer caso es convergente y en el segundo divergente.

Determinar la convergencia o divergencia de las series:

14. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}+\cdots$. (C)

15. $\dfrac{2}{2^{100}}+\dfrac{2^2}{3^{100}}+\dfrac{2^3}{4^{100}}+\cdots+\dfrac{2^n}{(n+1)^{100}}+\cdots$. (D)

16. $\dfrac{2!}{1\,000}+\dfrac{3!}{1\,000^2}+\dfrac{4!}{1\,000^3}+\cdots+\dfrac{(n+1)!}{1\,000^n}+\cdots$. (D)

17. $\dfrac{3}{3}+\dfrac{4}{3^2}+\dfrac{5}{3^3}+\cdots+\dfrac{n+2}{3^n}+\cdots$. (C)

18. $\dfrac{4}{5}+2\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+3\left(\dfrac{4}{5}\right)^3+\cdots+n\left(\dfrac{4}{5}\right)^n+\cdots$. (C)

19. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}+\cdots$. (C)

20. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)2n}+\cdots$. (C)

21. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4^2}+\dfrac{5}{4^3}+\dfrac{7}{4^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{4^n}+\cdots$. (C)

22. $\dfrac{1}{3\cdot 2}+\dfrac{1}{4\cdot 2^2}+\dfrac{1}{5\cdot 2^3}+\cdots+\dfrac{1}{(n+2)2^n}+\cdots$. (C)

23. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{2\cdot 2!}{5}+\dfrac{2^2 3!}{10}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}n!}{n^2+1}+\cdots$. (D)

24. $\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{5^2}+\dfrac{6}{5^3}+\cdots+\dfrac{n+3}{5^{n-1}}+\cdots$. (C)

25. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}+\cdots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots 3n}+\cdots$. (C)

26. $\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{7!}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+1)!}+\cdots$. (C)

27. $\dfrac{2\cdot 3}{1!}+\dfrac{3\cdot 4}{2!}+\dfrac{4\cdot 5}{3!}+\cdots+\dfrac{(n+1)(n+2)}{n!}+\cdots$. (C)

28. $\dfrac{4!}{3!1!3}+\dfrac{5!}{3!2!3^2}+\cdots+\dfrac{(n+3)!}{3!n!3^n}+\cdots$. (C)

29. $\dfrac{10}{1!}+\dfrac{10^2}{2!}+\dfrac{10^3}{3!}+\cdots+\dfrac{10^n}{n!}+\cdots$. (C)

30. $\frac{1}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\cdots+\frac{n!}{n^n}+\cdots$ (C)

31. $\frac{1}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{9}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}+\cdots$ (C)

32. $\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2^2}{2\cdot 3}+\frac{2^3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{2^n}{n(n+1)}+\cdots$ (D)

33. Demostrar la divergencia de la serie

$$\frac{1!}{10}+\frac{2!}{10^2}+\frac{3!}{10^3}+\cdots=0{,}1+0{,}02+0{,}006+\cdots.$$

(Verifíquese que los términos van disminuyendo de valor hasta el décimo, que es aproximadamente 0,00036 y que los 24 primeros términos son menores que la unidad).

Criterio de Cauchy: En una serie de términos positivos

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

se calcula

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=L.$$

Si es $L<1$, la serie es convergente; si es $L>1$, la serie es divergente. Si es $L=1$, este criterio no permite decidir sobre la convergencia o divergencia de la serie.

Demostración:

a) *Convergencia:* Puesto que es $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=L<1$, si se adopta un valor q mayor que L pero menor que 1, será

$$\sqrt[n]{u_n}<q$$

desde un valor de n en adelante, por ejemplo a partir del m-simo. (Para algunos valores de n podrá ser $\sqrt[n]{u_n}>q$).

Entonces será

$$\sqrt[m]{u_m}<q \qquad \text{o sea} \qquad u_m<q^m,$$

$$\sqrt[m+1]{u_{m+1}}<q \qquad \text{o sea} \qquad u_{m+1}<q^{m+1},$$

. . . .

$$\sqrt[n]{u_n}<q \qquad \text{o sea} \qquad u_n<q^n.$$

. . . .

Sumando ordenadamente se ve que los términos de la serie

$$u_m+u_{m+1}+\ldots+u_n+\ldots$$

son respectivamente inferiores a $q^m(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-m} + \dots)$ y puesto que esta última es una serie convergente por ser geométrica y de razón $q < 1$, la serie dada es convergente por el criterio de comparación.

b) *Divergencia:* Si $L > 1$, será a partir de un índice m, $\sqrt[n]{u_n} > 1$, es decir $u_m > 1$; $u_{m+1} > 1$; ... y la serie $u_m + u_{m+1} + \dots$ tendrá sus términos mayores que los de la serie divergente $1 + 1 + 1 + \dots$

EJEMPLOS:

1º) Sea la serie $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$ Siendo el término general $\frac{1}{n^n}$ es: $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n} \to 0$. La serie es convergente.

2º) La serie $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} + \cdots$, de término general $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$ es convergente pues $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{2}$ y resulta $L < 1$.

EJERCICIOS:

Aplíquese el criterio de Cauchy para determinar si las siguientes series convergen o divergen:

1. $1 + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1} + \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{n}\right)^n + \cdots$ (C)

2. $1 + \frac{1}{(\lg 2)^2} + \frac{1}{(\lg 2)^3} + \cdots + \frac{1}{(\lg n)^n} + \cdots$ (C)

3. $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} + \cdots$ (C)

Para qué valores de r convergen las series cuyos términos generales se indican:

4. $\left(\frac{nr}{n+1}\right)^n$.

5. $\frac{[(n+1)r]^n}{n^{n+1}}$.

R: $r < 1$.

OBSERVACIÓN: Se puede demostrar que siempre que exista límite de $\sqrt[n]{a_n}$ cuando $n \to \infty$, existe y es el mismo, el límite del cociente $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, mientras que la recíproca no es cierta.

Así verifíquese que la serie

$$a + b + a^2 + b^2 + a^3 + b^3 + \cdots$$

con $0 < a < b < 1$, es convergente de acuerdo al criterio de Cauchy, mientras que el cociente de dos términos sucesivos no tiende a un límite pues $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1} \to \infty$, y $\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = a\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} \to 0$, si se considera que el primer término es u_0.

Podría parecer entonces que el criterio de D'Alembert es inútil por estar contenido en el de Cauchy. Sin embargo, muchas veces es más fácil aplicar el criterio de D'Alembert que el de Cauchy.

CRITERIO DE KUMMER: Consideremos una serie de términos positivos $\sum u_n$. Sea $\sum \frac{1}{D_n}$ una serie divergente y formemos la expresión

$$T_n = D_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - D_{n+1}.$$

Calculemos $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = L$.

Si es $L > 0$, la serie $\sum u_n$ es convergente y

si es $L < 0$, la serie $\sum u_n$ es divergente.

En efecto, si es $L > 0$ y consideramos un valor K comprendido entre 0 y L, a partir de un cierto valor m se verificará que es $T_n > K$,

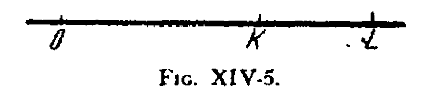


FIG. XIV-5.

es decir

$$D_n u_n - D_{n+1} u_{n+1} > K u_{n+1}. \qquad \text{para todo } n > m.$$

Haciendo $n = m, m + 1, m + 2, \ldots$ resulta sucesivamente:

$$D_m u_m - D_{m+1} u_{m+1} > K u_{m+1},$$
$$D_{m+1} u_{m+1} - D_{m+2} u_{m+2} > K u_{m+2},$$
$$D_{m+2} u_{m+2} - D_{m+3} u_{m+3} > K u_{m+3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_n u_n - D_{n+1} u_{n+1} > K u_{n+1}.$$

Sumando ordenadamente y simplificando resultará

$$D_m u_m - D_{n+1} u_{n+1} > K\,(u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{n+1})$$

o sea

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{n+1} < \frac{D_m u_m - D_{n+1} u_{n+1}}{K} < \frac{D_m u_m}{K}.$$

Esta expresión $\frac{D_m u_m}{K}$ es independiente de n y por consiguiente la suma del primer miembro que es de términos positivos y creciente con n, está acotada y tendrá un límite finito. La serie es entonces *convergente*.

Para demostrar la divergencia en el caso de ser $L < 0$, basta observar que a partir de un cierto valor m' será

$$D_n u_n < D_{n+1} u_{n+1}, \qquad \text{si es } n \geqslant m'$$

o sea que todos los productos $D_n u_n$ con $n > m'$ son superiores a $D_{m'} u_{m'}$.

Siendo $D_n u_n > D_{m'} u_{m'}$, es $\sum u_n > D_{m'} u_{m'} \sum \frac{1}{D_n}$

y en virtud del criterio de comparación es $\sum u_n$ divergente, por serlo por hipótesis la serie del 2º miembro.

CRITERIO DE RAABE: Si en el criterio de Kummer elegimos $D_n = n$, resulta

$$T_n = n \frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1) = n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1.$$

Si $T_n \to L$, $\qquad R_n = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = T_n + 1 \to L + 1$

y resulta de acuerdo al criterio anterior que la serie es convergente si es $L > 0$ y divergente si es $L < 0$; o lo que es lo mismo, si

$\lim_{n\to\infty} R_n > 1$, la serie es convergente;

$\lim_{n\to\infty} R_n < 1$, la serie es divergente.

APLICACIÓN DEL CRITERIO DE RAABE: Para aplicar el criterio de Raabe hay que empezar por formar el cociente $\frac{u_n}{u_{n+1}}$. Si el límite de este cociente es distinto de 1, la serie será convergente o divergente según que sea mayor o menor que 1, respectivamente. Obsérvese que en la formulación del criterio de Raabe consideramos la relación entre un término y el siguiente en vez de tomar el cociente entre un término y el anterior como lo prescribe el criterio de D'Alembert. Sólo si el límite del cociente es 1 se aplica Raabe restando de la expresión $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ el valor 1 y multiplicando todo por n. Si este nuevo límite es mayor que 1, la serie converge; si es menor que 1 diverge y si es igual a 1 habrá que aplicar otro criterio para decidir sobre su convergencia.

Así en la serie

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots,$$

resulta

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} : \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2}{n} \to 1.$$

Como el criterio de D'Alembert *no* permite afirmar nada, aplicamos el criterio de Raabe:

$$R_n = n\left(\frac{n+2}{n} - 1\right) = \frac{2n}{n} \to 2.$$

Por ser este límite mayor que 1, la serie es *convergente*.

Ejercicios:

Indicar si las siguientes series convergen o divergen:

1. $\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} + \cdots.$ (D)

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^3 + \cdots.$ (C)

3. $\frac{1}{2^2 - a} + \frac{1}{3^2 - a} + \frac{1}{4^2 - a} + \cdots + \frac{1}{n^2 - a} + \cdots.$ (C)

Aplicando el criterio de Raabe determinar si las series cuyo término general es u_n, convergen o divergen:

4. $u_n = \frac{1}{(2n-1)2n}$; 5. $u_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{4\cdot 5\cdots(4+n-1)}$.

R: Convergen.

6. Mostrar que la serie

$$1 + \frac{1+\alpha}{1+\beta} + \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{(1+\beta)(2+\beta)} + \cdots$$

es convergente o divergente según que sea $\beta \gtrless 1 + \alpha$ respectivamente.

8. CRITERIO DE LA INTEGRAL DE CAUCHY

Sea

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots. \qquad [1]$$

una serie de *términos positivos y decrecientes*.

Consideremos una función $f(x)$ tal que sea $f(n) = u_n$. [Así por ejemplo para la serie $\sum \frac{1}{n}$ es $f(x) = \frac{1}{x}$; para $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ es $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$].

Demostraremos que la serie converge o diverge al mismo tiempo que la integral

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

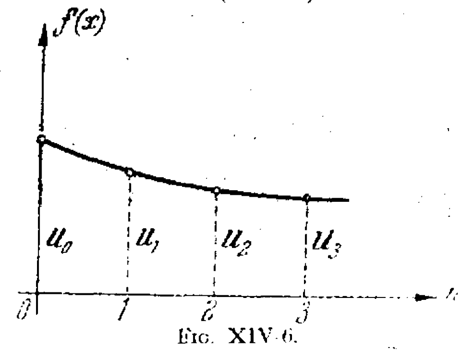


Fig. XIV-6.

Dado el carácter decreciente de los términos de la serie de términos positivos será:

$$u_{n-1} \geqslant f(x) \geqslant u_n > 0.$$

Integrando en el intervalo $(n-1, n)$ resultará:

$$\int_{n-1}^{n} u_{n-1}\, dx \geqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \geqslant \int_{n-1}^{n} u_n\, dx.$$

Pero tanto u_{n-1} como u_n son valores numéricos que se pueden sacar fuera del signo integral y como es $\int_{n-1}^{n} dx = \Big[x\Big]_{n-1}^{n} = n - (n-1) = 1$, resulta:

$$u_{n-1} \geqslant \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \geqslant u_n. \qquad [2]$$

Escribiendo las relaciones correspondientes a estas desigualdades para $n = 1, 2, 3, \ldots, n$ y sumando resulta:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} \geqslant \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 f(x)\, dx + \ldots +$$

$$+ \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx \geqslant u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

La suma de las integrales es $\int_0^n f(x)\, dx = I_n$. Además, designando con S_n la suma de los $(n+1)$ términos: $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, se puede escribir la última relación en la forma:

$$S_n - u_n \geqslant I_n \geqslant S_n - u_0,$$

o lo que es lo mismo (restando de $S_n = S_n = S_n$),

$$u_0 \geqslant S_n - I_n \geqslant u_n > 0.$$

La sucesión $(S_n - I_n)$ está acotada entre dos valores finitos: 0 y u_0 y además es decreciente pues

$$(S_n - I_n) - (S_{n-1} - I_{n-1}) = (S_n - S_{n-1}) - (I_n - I_{n-1}) =$$

$$= u_n - \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx$$

y la última diferencia es negativa de acuerdo a [2].

Siendo $(S_n - I_n)$ una sucesión decreciente y acotada tiene un límite finito comprendido entre 0 y u_0, de modo que se cumplirá

$$u_0 \geqslant \lim_{n\to\infty} (S_n - I_n) \geqslant 0. \qquad [3]$$

Por consiguiente la suma S_n de los $(n+1)$ primeros términos de la serie tiende a un valor finito o infinito conjuntamente con I_n, o en otros términos la serie [1] converge o diverge conjuntamente con $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\, dx$, donde n_0 es el índice del primer término de la serie.

Este criterio de Cauchy permite dar un valor aproximado de la suma de la serie [1] en el caso de convergencia y acotar la diferencia $(S_n - I_n)$ en el caso de divergencia.

EJEMPLOS:

1º) La serie $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$ es convergente pues siendo $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ resulta:

$$I_n = \int_1^n \frac{dx}{x(x+1)} = \left[\ln \frac{x}{x+1}\right]_1^n = \ln \frac{n}{n+1} + \ln 2 \to \ln 2 \cong 0{,}69.$$

Luego la serie es convergente y su suma S comprendida entre

$$I < S < I + u_0,$$

resulta en este caso $0{,}69 < S < 1{,}19$.

El valor exacto es $S = 1$.

2º) La serie armónica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ es *divergente* pues siendo $f(x) = \frac{1}{x}$ resulta $I_n = \int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n \to \infty$, cuando $n \to \infty$.

Además como es

$$1 \geqslant \lim_{n\to\infty} (S_n - I_n) \geqslant 0$$

resulta en este caso $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n) = C$, siendo C la célebre constante de *Euler* cuyo valor es 0,57721566490..., número que aparece en muchas cuestiones de matemática superior.

NOTA: Es muy sorprendente la divergencia de la serie armónica que ya conocían MENGOLI (1650) y J. BERNOUILLI (1689). Aplicando el resultado del ejemplo 2º se ve que sumando mil términos la suma parcial no alcanza el valor 8, que sumando un millón de términos no llega al valor 15, un billón al valor 30 y aún sumando 10^{100} términos no llega a 232. Pese a todo esto se puede lograr que las sumas parciales de un número suficientemente grande de términos superen a cualquier número por grande que sea.

EJERCICIOS:

Aplicando el criterio de la integral de Cauchy indicar si las series cuyo término general es u_n convergen o divergen.

1. $u_n = \frac{2}{n^2}$ (C)
2. $u_n = \frac{5}{n^4}$ (C)
3. $u_n = \frac{2}{2n+1}$ (D)
4. $u_n = \frac{3}{n^{3/2}}$ (C)
5. $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$ (C)
6. $u_n = \frac{1}{2n+3}$ (D)

7. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ (D) 8. $u_n = \dfrac{1}{(4n+1)^{3/2}}$ (C)

9. $u_n = \dfrac{2n}{(n^2+1)^3}$ (C) 10. $u_n = \dfrac{5}{\sqrt{n}}$ (D)

11. $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ (C) 12. $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$ (C)

13. $u_n = e^{-n}$ (C) 14. $u_n = 2^{-n}$ (C)

15. $u_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$ (D) 16. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ (D)

17. **Aplíquese el criterio de la integral de Cauchy a la serie**

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{4\cdot 8} + \cdots + \frac{1}{n\cdot 2n} + \cdots.$$

(Calcúlese un valor aproximado para la suma de los n primeros términos y compárese con el valor exacto $\frac{\pi^2}{12}$).

18. **Idem con la serie**

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots$$

cuya suma es $\frac{\pi^2}{8}$.

19. Representar gráficamente la función $\frac{1}{x}$ y señalar los valores correspondientes a las abscisas enteras. Interpretar geométricamente la constante C de Euler.

20. Demostrar la divergencia de la serie

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \cdots$$

con a y b positivos.

21. Estudiar la convergencia o divergencia de la serie

$$\frac{1}{2(\log 2)^p} + \frac{1}{3(\log 3)^p} + \frac{1}{4(\log 4)^p} + \cdots + \frac{1}{(n+1)[\log(n+1)]^p} + \cdots.$$

R: Para $p > 1$ la serie es convergente.

Para $p \leqslant 1$ la serie es divergente.

SERIES E INTEGRALES: El criterio de Cauchy muestra una de las múltiples analogías que existen entre las series y las integrales con límite superior de integración infinito.

Hay sin embargo una diferencia que conviene destacar. Mientras que en toda serie $\sum u_n$ convergente, el término general u_n tiende a 0 cuando $n \to \infty$, hay integrales $\int_0^\infty f(x)\,dx$ convergentes en las cuales $f(x)$ no tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

He aquí un ejemplo de Hardy: Sea $f(x)$ una función nula en todas partes excepto en los entornos de los puntos 1, 2, 3, ..., n, ... de semiamplitud $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{(n+1)^2}, \ldots$ en donde toma los valores correspondientes a las rectas que alcanzan el valor 1 en los puntos de abscisa entera y positiva, tal como aparece en la figura 7.

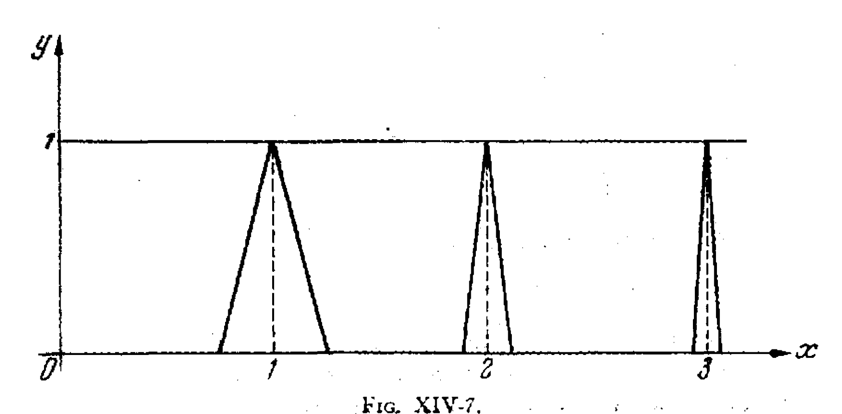


FIG. XIV-7.

Las áreas de estos triángulos constituyen los términos de la serie convergente

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

y por consiguiente la integral de 0 a ∞ es convergente. Sin embargo, $f(x)$ no tiende a 0 cuando $x \to \infty$ pues siempre es $f(n) = 1$, cualquiera sea n.

9. SERIE DE TERMINOS ALTERNADOS

Cuando en una serie los términos son positivos y negativos alternadamente:

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots, \qquad [1]$$

(donde los u_i son todos positivos) la serie se llama *alternada*.

Demostraremos que si los términos u_i son decrecientes, es decir si

$$u_{n+1} \leqslant u_n$$

y si

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0,$$

la serie [1] es *convergente* [1].

---

[1] Esta propiedad ya la conocía LEIBNIZ en el año 1705.

En efecto, si formamos las sucesivas sumas parciales resulta que todas las de índice impar constituyen una sucesión creciente y las de índice par una sucesión decreciente:

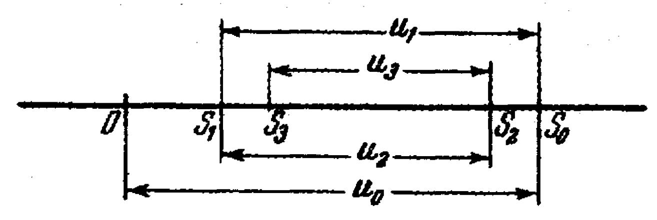


FIG. XIV-8.

$$S_{2n+1} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \dots + (u_{2n} - u_{2n+1}),$$

$$S_{2n} = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \dots - (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

Todos los paréntesis son positivos puesto que los términos u_n son decrecientes y por tanto a medida que n crece, S_{2n+1} aumenta y S_{2n} disminuye. Además

$$S_{2n} = S_{2n-1} + u_{2n} > 0,$$

$$S_{2n+1} = u_0 - (u_1 - u_2) - \dots - (u_{2n-1} - u_{2n}) - u_{2n+1} < u_0.$$

Siendo $\{S_{2n}\}$ una sucesión de términos decrecientes y positivos (acotados inferiormente) debe tener un límite L y también debe tener un límite L' la sucesión $\{S_{2n+1}\}$ por ser de términos crecientes acotados superiormente. Pero como

$$S_{2n} = S_{2n+1} - u_{2n+1},$$

tomando límites en ambos miembros cuando $n \to \infty$ y teniendo en cuenta que $u_{2n+1} \to 0$, resulta $L = L' = S$:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S.$$

CÁLCULO DEL ERROR EN LAS SERIES ALTERNADAS: Las series alternadas son particularmente apropiadas para el cálculo numérico por cuanto resulta fácil de determinar una cota superior del error cometido al tomar como valor aproximado de la suma de la serie, la suma de los r primeros términos.

En efecto, hemos visto que la sucesión decreciente $\{S_{2n}\}$ y la sucesión creciente $\{S_{2n-1}\}$ tienden a un límite S que es mayor que todas las sumas de subíndice impar y menor que las de subíndice par. El error absoluto ε cometido al tomar como valor aproximado de S el valor de una suma parcial S_{2n-1} será inferior a la diferencia entre dos sumas parciales:

$$\varepsilon = |S - S_{2n-1}| < |S_{2n} - S_{2n-1}| = |u_{2n}|.$$

O en otras palabras: *El error que se comete al considerar como valor aproximado de una serie alternada convergente la suma de sus r primeros términos es menor, en valor absoluto, que el término de orden* $(r + 1)$.

Además si r es *par*, la suma parcial da un valor por defecto de S y si r es *impar*, da un valor por exceso.

EJEMPLO:

La serie

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} + \cdots, \qquad [1]$$

es una serie alternada de términos decrecientes. Sumando hasta el 5º término se tendrá un valor por exceso:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 0{,}6333.$$

El error será menor que $\frac{1}{6!} < 0{,}0015.$

(Efectivamente la suma exacta de la serie es $1 - e^{-1} = 0{,}63212\ldots$).

Puede plantearse esta otra cuestión: ¿cuántos términos de la serie [1] deberán considerarse para lograr su suma con 4 cifras exactas, es decir con error $< 0{,}0001$? Como es $\varepsilon < |u_n| = \frac{1}{n!}$, para que sea $\varepsilon < 0{,}0001$ será suficiente que sea $n! < 1 : 0{,}0001 = 10\,000$, lo cual se consigue a partir de $n = 8$. Sumando entonces 7 términos (tomados con 5 decimales exactos) se logrará la aproximación pedida.

EJERCICIOS:

1. Verificar que la serie

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^6} + \cdots$$

es *convergente* y calcular su suma con 3 decimales exactos.

Solución: La serie es convergente pues es alternada, de términos decrecientes y con el término general tendiendo a 0. Como el error que se comete al tomar n términos es menor que $1 : (n+1)^6$ deberá ser $(n+1)^6 > 10^3$, lo cual implica $n \geqslant 3$:

$$S \sim 1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} = 1 - 0{,}0156 + 0{,}0014 = 0{,}9858.$$

El *error de fórmula* originado por la consideración de 3 términos en lugar de los infinitos, es inferior a $1 : 4^6 \sim 0{,}00024 < 0{,}0003$. El *error de cálculo* debido a la consideración de 4 cifras decimales en los cocientes es $2 \times 0{,}0001 = 0{,}0002$. La suma de estos 2 errores es 0,0005. Al considerar en lugar de 0,9858 el valor 0,986 se comete un nuevo "error de redondeo" de 0,0002, que sumado al anterior da $0{,}0007 < 0{,}001$. Luego 0,986 es la suma aproximada de la serie con todas sus cifras exactas.

2. Verificar que la serie armónica alternada

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

es convergente y calcular su suma con una cifra exacta.
(El valor exacto de esta serie es $\ln 2$).

3. Mostrar que la serie alternada

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8}+\cdots$$

cuyo término general tiende a cero, es *divergente*. ¿Está en contradicción este resultado con el teorema sobre series alternadas?

Solución: Para mostrar que la serie es divergente es suficiente observar que la serie de los términos positivos es convergente, mientras que la serie de los términos negativos (que es del tipo de la serie armónica) es divergente.
Esto no implica contradicción con el teorema general pues los términos de la serie no son decrecientes.

Verificar que las siguientes series alternadas convergen:

4. $\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}+\cdots.$

5. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\cdots.$

6. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots.$

7. $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}+\cdots.$

8. $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4}+\cdots.$

9. $1-\frac{1}{(2!)^2}+\frac{1}{(3!)^2}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n!)^2}+\cdots.$

10. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\cdots.$

(Nótese que la suma parcial de $2n$ términos está formada por las dos sumas de n términos

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}+\cdots,$$

ambas convergentes).

Verificar que las siguientes series alternadas divergen:

11. $1 - \frac{3}{4} + \frac{4}{6} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2n} + \cdots$.

12. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \cdots$.

13. $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{3}{8} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1} + \cdots$.

14. $\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} - \cdots + (-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} + \cdots$.

10. SERIE DE TERMINOS CUALESQUIERA

Convergencia absoluta y condicional: Hemos considerado hasta ahora series de términos positivos y series alternadas; en lo que sigue estudiaremos series cuyos términos pueden ser positivos o negativos sin ningún orden especial.

Claro está que el número de términos positivos y negativos en estas series debe ser infinito porque en la determinación de la convergencia o divergencia no influye un número finito de términos ya que la suma (algebraica) de esos términos es un valor finito.

Diremos que una serie $\sum u_n$ es *absolutamente convergente* si es convergente la serie de términos positivos $\sum |u_n|$ donde se ha considerado en lugar de cada término el correspondiente valor absoluto.

Si la serie $\sum u_n$ es convergente y la serie $\sum |u_n|$ es divergente la serie se dice *condicionalmente convergente.*

La serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

es absolutamente convergente porque la serie de los valores absolutos correspondientes es una serie geométrica convergente.

La serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

es condicionalmente convergente, porque si bien es convergente (se trata de una serie alternada, de términos decrecientes con $u_n \to 0$), la serie de los valores absolutos es divergente (serie armónica).

Ejercicio:

Indicar cuáles de las series alternadas convergentes de los ejercicios 4-10 del parágrafo anterior, convergen absolutamente.

R: 1; 8; 9.

Teorema I: Si una serie es absolutamente convergente, es convergente. Es decir, si $\sum |u_n|$ [1] converge, $\sum u_n$ [2] converge.

Si la serie de los valores absolutos converge, de acuerdo a la condición necesaria y suficiente estudiada en la página 505, la suma

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}|, \qquad [3]$$

puede hacerse tan pequeña como se quiera con tal de considerar n suficientemente grande. Pero la expresión correspondiente de [2]

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| \qquad [4]$$

que es menor o igual que la suma [3] (recuérdese que el valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos), también podrá hacerse tan pequeña como se quiera y con ello queda demostrada la convergencia de [2].

No vale el recíproco de este teorema. Lo muestra el ejemplo ya considerado de la serie armónica alternada:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Teorema II: Si una serie es condicionalmente convergente pero no absolutamente convergente, tanto la serie formada con los términos positivos como la formada con los términos negativos son divergentes.

Llamando v_n a los términos positivos y w_n a los negativos, si las series $\sum v_n$, $\sum w_n$ fueran convergentes, la serie resultaría absolutamente convergente, contra la hipótesis.

Tampoco puede resultar una de las series convergente y la otra divergente porque entonces la serie no sería convergente, contra la hipótesis.

Por lo tanto deben ser divergentes las series $\sum v_n$, $\sum w_n$.

Ya hemos visto, al tratar de límites indeterminados como la diferencia de infinitos puede resultar finita.

En la serie armónica alternada, tanto la serie formada con los términos positivos

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots ,$$

como la serie formada con los términos negativos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots ,$$

son divergentes.

Teorema de Riemann: Si una serie es condicionalmente convergente, cambiando el orden de los términos puede hacerse que su suma sea un valor dado cualquiera.

Explicaremos como debe procederse en un caso concreto. Propongámonos cambiar el orden de los términos de la serie armónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

de modo que la suma resulte, por ejemplo, igual a 1,5.

Empezaremos por escribir un número suficiente de términos positivos hasta lograr que la suma parcial de r términos

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2r-1}$$

supere a 1,5, con la condición de que la suma de $(r-1)$ términos no alcance a 1,5. Esto será posible porque siendo la serie formada con los términos positivos, divergente, de acuerdo al teorema II puede hacerse la suma parcial mayor que cualquier número dado.

En este caso particular hay que considerar 3 términos (1):

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 1{,}5333\ldots$$

Colocamos ahora términos negativos hasta un término tal que la suma sea inferior a 1,5. En este caso basta con el primer término negativo:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = 1{,}033\ldots.$$

Ahora agregamos términos positivos que hagan que la suma correspondiente supere a 1,5:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} = 1{,}5218\ldots.$$

El segundo término negativo ya hace disminuir la suma hasta un valor inferior a 1,5 y se continúa así indefinidamente:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{4} + \frac{1}{17} + \cdots + \\ + \frac{1}{25} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

La divergencia de la serie de términos positivos y de términos negativos asegura la posibilidad de este proceso.

El mismo procedimiento se puede aplicar a cualquier otra serie condicionalmente convergente. También puede lograrse, modificando el orden de los términos, que la nueva serie sea oscilante o divergente.

---

(1) El cálculo se hace fácilmente utilizando la tabla I (1 000 × recíproca) de la página 8 del apéndice.

EJERCICIOS:

1. **La serie estudiada por LEIBNIZ:**

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots,$$

es convergente y tiene por suma el valor $\frac{1}{4}\pi$.

Modificar el orden de los términos de modo de convertirla en una serie convergente de suma igual a $\frac{1}{2}$.

R: $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}-\frac{1}{19}-\frac{1}{23}+\frac{1}{9}-\cdots$.

2. **Modificar el orden de los términos de la serie**

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\cdots,$$

de modo que la suma de la nueva serie sea igual a 2.

(Racionalícese cada término y utilícense las tablas del apéndice).

11. SERIES DE TERMINOS COMPLEJOS

La definición de serie $\sum u_n$ se extiende al caso en que los términos u_n son números complejos:

$$u_n = \alpha_n + i\beta_n.$$

La suma parcial S_n de los n primeros términos será un número complejo $A_n + iB_n$ y el límite de esta suma S_n, cuando $n \to \infty$, será la suma $A + iB$ de la serie. Luego la serie $\sum u_n$ de términos complejos será convergente siempre que lo sean las series $\sum \alpha_n$, $\sum \beta_n$ de las partes reales e imaginarias de u_n y recíprocamente.

Si las series $\sum \alpha_n$, $\sum \beta_n$ son *absolutamente convergentes*, la serie $\sum u_n$ se dice *absolutamente convergente*.

Demostraremos ahora el

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que una serie de términos complejos $\sum u_n$ sea absolutamente convergente es que sea convergente la serie $\sum |u_n|$ donde $|u_n|$ es el módulo del complejo $u_n = \alpha_n + i\beta_n$.

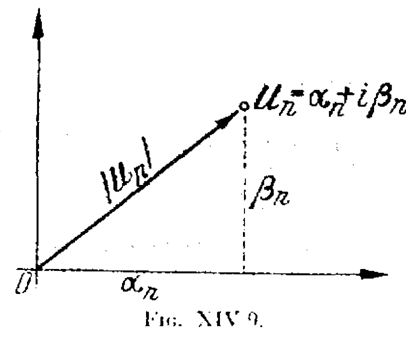


FIG. XIV 9.

1º) La condición es necesaria, pues si $\sum u_n$ es absolutamente convergente, son convergentes $\sum |\alpha_n|$ y $\sum |\beta_n|$ de acuerdo a la definición. Como es

$$|u_n| = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} < |\alpha_n| + |\beta_n|$$

resulta evidentemente $\sum |u_n|$ convergente.

2º) La condición es suficiente, pues siendo

$$|\alpha_n| < \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

$$|\beta_n| < \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2},$$

las dos series $\sum |\alpha_n|$ y $\sum |\beta_n|$ son convergentes y por consiguiente $\sum u_n$ es absolutamente convergente cuando es convergente $\sum \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$.

De acuerdo a la definición surge de inmediato que una serie absolutamente convergente de términos complejos es convergente.

EJEMPLO:

Consideremos la serie geométrica

$$1 + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n + \cdots,$$

en la que $q = \alpha + i\beta = \varrho \underline{|\varphi}$ es un número complejo. Procediendo como en el caso real se tiene $S_n = \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{q^n}{1-q}$. Será $q^n = \varrho^n \underline{|n\varphi}$ y si $\varrho < 1$, cuando $n \to \infty$, $\varrho^n \to 0$, y por consiguiente $q^n \to 0$. La suma de la serie resultará:

$$S = \frac{1}{1-q} \text{ si } |q| < 1.$$

12. ALGEBRA DE LAS SERIES

La suma de un número finito de sumandos goza de propiedades (asociativa, disociativa, conmutativa, etc.) que no siempre se conservan en las series. Habrá que asegurarse cuando se agrupan términos de una serie o se pasan términos de un miembro a otro que las operaciones sean legítimas.

Critíquese el siguiente razonamiento:

Escribiendo la serie armónica en la forma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\right)$$

y pasando los términos del segundo paréntesis al primer miembro resulta

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \cdots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$$

o sea

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots.$$

Como a partir de los segundos términos de estas series se verifica:

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{3}, \frac{1}{6} < \frac{1}{5}, \dots,$$

deberá ser (para que valga la igualdad), $\frac{1}{2} > 1$, resultado evidentemente absurdo.

1º) *Propiedad asociativa:* Aplicando la definición de suma de una serie se demuestra fácilmente que si una serie

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

es *convergente* se pueden reemplazar varios términos sucesivos por su suma efectuada.

La convergencia de

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

asegura la convergencia de

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} + \cdots,$$

obtenida agrupando sucesivamente cada dos de los términos de la primer serie.

Obsérvese que hay que asegurarse que la serie sea convergente antes de sustituir los términos por su suma efectuada. Así, si en la serie oscilante

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

se agrupan los términos sucesivos, por pares se obtiene la serie convergente

$$0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

y ambas series son esencialmente distintas.

2º) *Propiedad conmutativa:* Si una serie es absolutamente convergente, se puede alterar el orden de sus términos sin que varíe su suma (Teorema de Dirichlet - 1837).

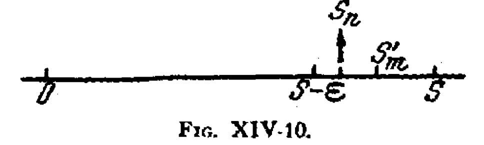


FIG. XIV-10.

Empezaremos por demostrar el teorema para el caso de series de términos positivos. Supongamos que a partir de la serie de términos positivos $\sum u_n$ formamos la serie $\sum u'_n$ con los mismos términos escritos en un orden diferentes. A cada u_n corresponderá un u'_n de modo que la suma S_n de la serie primitiva estará contenida en una cierta suma S'_m de la segunda (que contendrá eventualmente otros términos más). Como $S_n \to S$ a partir de un cierto valor n_0 será $S_n > S - \varepsilon$.

Además es $S'_m > S_n$. Como la serie es de términos positivos, las sumas parciales son crecientes y menores que S, es decir se verifica $S - \varepsilon < S'_m < S$. La sucesión de las sumas parciales S'_m de la serie reordenada tendrá como límite S.

A la misma conclusión se llega en el caso de términos cualesquiera si la serie es absolutamente convergente. En efecto, si $\sum u_n$ es absolutamente convergente dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario se puede hacer

$$|S_n - S| < |u_n| + |u_{n+1}| + \ldots < \varepsilon,$$

a partir de un valor n_0 suficientemente grande.

Consideremos la serie reordenada $\sum u'_m$ y sea S'_m una suma parcial que contiene todos los términos de S_n y algunos más y sea $m > n_0$. La diferencia entre S'_m y S_n solo puede contener algunos términos u_n con $n > n_0$ y por consiguiente debe ser $|S'_m - S_n| < \varepsilon$.

Como es

$$|S - S'_m| = |(S - S_n) + (S_n - S'_m)| < |S - S_n| + |S_n - S'_m| < 2\varepsilon,$$

resulta que $S'_m \to S$, o sea que la serie reordenada es convergente y tiene la misma suma que la serie dada.

Resulta de acuerdo a este teorema de Dirichlet, que si una serie es absolutamente convergente es *incondicionalmente convergente*, llamando así a las series cuya suma no depende del orden de sus infinitos sumandos.

Por otra parte el teorema de Riemann (pág. 530) muestra que la condición de convergencia absoluta es esencial.

3º) *Suma de series:* Sumando término a término dos series convergentes

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$$

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots,$$

se obtiene una serie también convergente de suma igual a $U + V$.

4º) *Factor común:* Si se multiplican los términos de una serie convergente $\sum u_n = U$ por un factor numérico k, se obtiene una serie convergente de suma igual a kU: $\sum ku_n = kU$.

5º) *Multiplicación de series:* Consideremos 2 series convergentes:

$$U = \sum u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots, \quad [1]$$

$$V = \sum v_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots. \quad [2]$$

Formemos el cuadro [3] haciendo todos los productos $u_r v_s$:

$$\begin{matrix} u_0v_0 & u_0v_1 & u_0v_2 & \ldots & u_0v_n & \ldots \\ u_1v_0 & u_1v_1 & u_1v_2 & \ldots & u_1v_n & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_nv_0 & u_nv_1 & u_nv_2 & \ldots & u_nv_n & \ldots \end{matrix} \qquad [3]$$

Definiremos como *serie producto* de [1] y [2] a la serie $\sum w_n$ con

$$w_n = u_0v_n + u_1v_{n-1} + \ldots + u_nv_0,$$

donde sus elementos w_n se forman sumando diagonalmente los términos de [3].

Demostraremos el

Teorema de Cauchy: Si las series [1] y [2] son absolutamente convergentes, la serie producto es absolutamente convergente y su valor es $U \cdot V$.

En lugar del cuadro [3] obtenido multiplicando $\sum_0^n u_r$ por $\sum_0^n v_s$, consideremos el cuadro correspondiente formado con los términos del producto $\sum_0^n |u_r| \cdot \sum_0^n |v_s|$. Cuando $n \to \infty$ estas dos sumas tienden a valores finitos (por tratarse de series absolutamente convergentes), de modo que la suma de los términos positivos $|u_r|\,|v_s|$ estará acotada y por consiguiente la serie correspondiente converge, o de otro modo que la serie obtenida sumando los términos de [3] es absolutamente convergente y por lo tanto es convergente.

La suma de esta serie convergente es UV puesto que la suma parcial de sus n^2 primeros términos es $\sum_0^n u_r \cdot \sum_0^n v_s$.

Demostrada la convergencia absoluta de la serie correspondiente al cuadro [3], en virtud del teorema de Dirichlet, podemos reordenar los términos y adoptando la ordenación en diagonal queda demostrado el teorema de Cauchy.

OTROS TEOREMAS SOBRE PRODUCTOS DE SERIES.

I) *Teorema de Mertens:* Si la serie [1] es absolutamente convergente y la serie [2] es convergente, la serie producto obtenida con la regla de Cauchy es convergente.

II) *Teorema de Abel:* Si las series [1] y [2] son convergentes y también lo es la serie $\sum w_n$ formada con la regla de Cauchy, es $UV = W$ donde U, V y W son las sumas de las series correspondientes.

III) *Teorema de Hardy:* Si en las series [1] y [2] $nu_n \to 0$ y $nv_n \to 0$,

entonces $\sum w_n$ converge. El resultado subsiste si los coeficientes de [1] y [2] satisfacen las condiciones menos restrictivas $|nu_n| < K$, $|nv_n| < K$, con K constante para todo n.

(Las demostraciones de estos teoremas exceden del marco de este libro y pueden verse en los tratados especializados de series de K. Knopp, T. J. Bromwich y G. H. Hardy).

UN EJEMPLO CRÍTICO DE PRODUCTO DE SERIES.

Si multiplicamos la serie convergente

$$\sum u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

por sí misma de acuerdo a la regla de Cauchy resulta:

$$w_0 = u_0u_0 = \frac{1}{\sqrt{1}}\frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$$

$$w_1 = u_0u_1 + u_1u_0 = -\left[\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}\right] = -\sqrt{2}.$$

$$w_2 = u_0u_2 + u_1u_1 + u_2u_0 = +\left[\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 1}}\right] =$$

$$= +\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}.$$

. . . .

$$w_n = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(r+1)(n+1-r)}}.$$

La serie $\sum w_n$ es divergente porque el término general no tiende a cero. En efecto, el producto $(r+1)(n+1-r)$ de factores de suma constante e igual a $(n+2)$ es siempre menor que $\frac{1}{4}(n+2)^2$ (ver pág. 207). Por consiguiente el término general de la suma que da w_n es mayor que $\frac{2}{n+2}$ y $(n+1)$ de tales términos serán mayores que $2\frac{n+1}{n+2}$ que tiende a 2 cuando $n \to \infty$.

¿Por qué no puede aplicarse ninguno de los teoremas de multiplicación de series?

(Obsérvese que la serie dada no es absolutamente convergente, a pesar de ser convergente).

SERIES DE POTENCIAS

1. INTRODUCCION

Se llaman series de potencias a las expresiones del tipo

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad [1]$$

Para cada valor de x se tiene una serie numérica. Si la serie es convergente tendrá como suma un número finito. ¿Para qué valores de x se obtendrán esos valores finitos?

En el caso de la serie

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \qquad [2]$$

se ve fácilmente que reemplazando x por un número real comprendido entre -1 y $+1$ la serie numérica que resulta es convergente. En efecto, la expresión [2] es una serie geométrica de razón $-x$ y de acuerdo a lo visto anteriormente si la razón es, en valor absoluto, menor que la unidad, no sólo podemos asegurar que la serie es convergente sino que podemos calcular exactamente su suma: $\dfrac{1}{1-(-x)} = \dfrac{1}{1+x}\cdot$ En otros términos: la serie [2] coincide con la función $\dfrac{1}{1+x}$ cuando x está comprendida entre -1 y $+1$.

También vale el razonamiento anterior si la variable es un número complejo de módulo inferior a 1 (como vimos en la pág. 533). Generalmente la variable compleja se designa con la letra z.

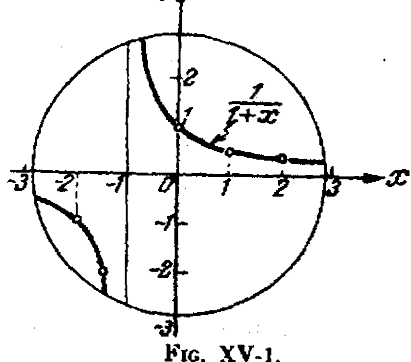


Fig. XV-1.

Demostraremos ahora que para los valores x de un cierto intervalo $(-R, +R)$ simétrico respecto del origen, la serie [1] define una función $f(x)$, pudiendo ser R un valor finito y distinto de cero, nulo o infinito. R recibe el nombre de *radio de convergencia*.

Si la serie de los módulos de los términos de [1]

$$|a_0| + |a_1|\,|x| + |a_2|\,|x|^2 + \ldots + |a_n|\,|x|^n + \ldots, \qquad [3]$$

es convergente, entonces [1] será convergente puesto que —como hemos demostrado antes— una serie absolutamente convergente es convergente.

Para estudiar la convergencia de la *serie de términos positivos* [3] podemos emplear cualquiera de los criterios estudiados, por ejemplo el de D'Alembert:

La serie [3] será convergente si formado el cociente

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|x|^n}{|x|^{n-1}} = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| |x|$$

su límite, cuando $n \to \infty$ es menor que 1. Si escribimos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \lambda \qquad \text{deberá ser} \qquad \lambda\,|x| < 1,$$

o sea si $|x| < \frac{1}{\lambda}$ la serie será *convergente*.

Al valor recíproco de λ se le llama radio de convergencia (o intervalo de convergencia en el caso de series de términos reales) y de acuerdo a lo anterior es

$$R = \frac{1}{\lambda} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|. \qquad [4]$$

Análogamente se demuestra que si $|x| > R$, la serie es divergente. Si es $x = R$ o $x = -R$, este criterio no permite asegurar nada.

Empleando el criterio de la raíz enésima de Cauchy a la serie [3] resulta

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| \quad \text{y si es} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = |x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \text{o sea si}$$

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

la serie es *convergente*.

Por consiguiente el radio de convergencia también se puede calcular mediante la fórmula

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad [5]$$

De acuerdo a lo visto anteriormente (pág. 518) este valor de R coincide con el valor dado por [4].

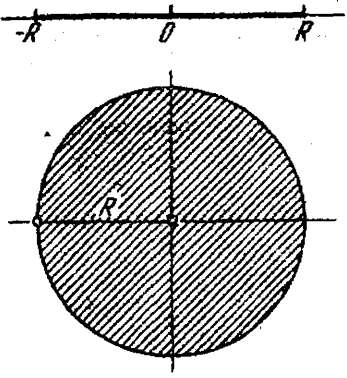


FIG. XV-2. — Las series de potencias de variable real convergen en el segmento $(-R, +R)$ y las de variable compleja en el círculo de radio R y centro en el origen.

Las demostraciones anteriores son válidas aún en el caso de que tanto los coeficientes a_n como la variable z sean números complejos. Resulta entonces que si es $|z| < R$, la serie es convergente.

El conjunto de los puntos z que verifican esta condición constituye el interior de un círculo con centro en el origen y radio R. (Si es $R = 0$, el círculo se reduce a un punto, el origen, y si es $R = \infty$, se trata de todo el plano).

Si la serie de potencias es del tipo $\sum a_n (z - z_0)^n$, siguiendo los pasos de la demostración anterior, se verifica fácilmente que la serie converge si es $|z - z_0| < R$. Los puntos z que verifican esta condición se encuentran en el círculo de centro z_0 y radio R.

EJEMPLOS:

1°) Determinar el intervalo de convergencia de la serie

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots .$$

Como es $|a_n| = |a_{n-1}| = 1$, el límite del cociente es 1 y se tiene $R = 1$, resultado coincidente con el hallado al estudiar las series geométricas.

2°) Idem de

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots .$$

Siendo $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}$ resulta

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Es decir: la serie converge para cualquier valor de x. Las series de este tipo se llaman *series enteras* y son las que tienen las mayores analogías con los polinomios.

3°) Idem de

$$1 + 1!x + 2!x^2 + \dots n!x^n + \dots .$$

Siendo el cociente $\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ resulta $R = 0$ y por consiguiente esta serie no converge para ningún valor de x excepto el origen 0.

Ejercicios:

Determinar para qué valores de la variable real x o de la variable compleja z, convergen las siguientes series:

1. $x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots$	$-1 \leqslant x \leqslant 1.$
2. $1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$	Todo valor de z.
3. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$-1 < x < 1.$
4. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$-1 < x \leqslant 1.$
5. $z + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$	$\lvert z \rvert < 1.$
6. $x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \cdots$	$-1 \leqslant x < 1.$
7. $1 - \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^4}{\sqrt{4}} - \frac{x^6}{\sqrt{6}}$	$-1 \leqslant x \leqslant 1.$
8. $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	Todo valor de x.
9. $z - \frac{z^3}{2!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$	Todo valor de z.
10. $x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \cdots$	$-1 \leqslant x \leqslant 1.$
11. $1 - x^2 + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}x^6 + \cdots$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < \frac{1}{2}\sqrt{2}.$
12. $\frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{4^2} + \frac{z^3}{6^2} + \frac{z^4}{8^2} + \cdots$	$\lvert z \rvert < 1.$
13. $\frac{x}{2\cdot 3} + \frac{x^2}{3\cdot 4} + \frac{x^3}{4\cdot 5} + \cdots$	$-1 < x < 1.$
14. $z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$	$\lvert z \rvert < 1.$
15. $x - 3x^3 + 5x^5 - \cdots$	$-1 < x < 1.$
16. $\frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{11} - \cdots$	$-1 \leqslant x \leqslant 1.$
17. $\frac{z}{1\cdot 2} - \frac{z^2}{2\cdot 2^2} + \frac{z^3}{3\cdot 2^3} - \cdots$	$\lvert z \rvert < 2.$
18. $x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{4x^4}{4!} + \cdots$	Todo valor de x.

19. $1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^4}{2^4} + \cdots$ $\qquad -2 < x < 2.$

20. $x + \frac{2^2}{5}x^2 + \frac{2^3}{10}x^3 + \cdots$ $\qquad -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}.$

21. $\frac{z}{3^2} - \frac{1}{3}\frac{z^3}{3^3} + \frac{1}{3}\frac{z^5}{3^5} - \cdots$ $\qquad |z| < 3.$

22. $1 + \frac{2^2}{2!}x + \frac{3^2}{3!}x^2 + \frac{4^2}{4!}x^3 + \cdots$ $\qquad$ Todo valor de x.

23. $\frac{1}{3} + \frac{2x}{2\cdot 3^2} + \frac{3x^2}{2^2\cdot 3^3} + \cdots$ $\qquad -6 < x < 6.$

24. $z + 4z^2 + 9z^3 + 16z^4 + \cdots$ $\qquad |z| < 1.$

25. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \cdots$ $\qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

26. $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{2x^2}{2\cdot 2\cdot 3} + \frac{3x^3}{2^2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$ $\qquad -2 < x < 2.$

27. $1 - \frac{z}{10} + \frac{2!z^2}{100} - \frac{3!z^3}{1\,000} + \cdots$ $\qquad z = 0.$

28. $\frac{10}{1}x + \frac{100}{2!}x^2 + \frac{1000}{3!}x^3 + \cdots$ $\qquad$ Todo valor de x.

29. $\frac{x}{6} - \frac{x^2}{2^2\cdot 6^2} + \frac{x^3}{3^2\cdot 6^3} - \cdots$ $\qquad -6 \leqslant x \leqslant 6.$

30. $\frac{z}{2} + \frac{2z^2}{2^2} + \frac{3z^3}{2^3} + \cdots$ $\qquad |z| < 2.$

31. $1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2}$ $\qquad$ Todo valor de x.

32. Para qué valores de x converge la serie:

$$1 + \frac{2(x-2)}{3} + \frac{3(x-2)^2}{3^2} + \cdots \frac{(n+1)(x-2)^n}{3^n} + \cdots.$$

Analizar lo que sucede en los extremos del intervalo de convergencia.

Solución: Sean $u_n = \frac{(n+1)(x-2)^n}{3^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+2)(x-2)^{n+1}}{3^{n+1}}$ y el cociente $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+2}{n+1}\frac{|x-2|}{3}$. Para que la serie converja debe ser

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1, \text{ es decir } \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\,\frac{|x-2|}{3} < 1 \text{ o bien } \frac{|x-2|}{3} < 1$$

y $|x - 2| < 3$.

El intervalo de convergencia es entonces: $-3 < (x-2) < 3$ ó $-1 < x < 5$. En los puntos extremos $x = -1$ y $x = 5$ la serie no converge, como se ve reemplazando directamente estos valores en la serie dada (es oscilante para $x = -1$ y divergente para $x = 5$).

Determinar el intervalo de convergencia de las siguientes series del tipo $\sum a_n(z-\alpha)^n$:

33. $(x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \cdots$ $\qquad 0 < x \leqslant 2$.

34. $\dfrac{1}{2}(x+2) + \dfrac{2^2}{2^2}(x+2)^2 + \dfrac{3^2}{2^3}(x+2)^3 + \cdots$ $\qquad -4 < x < 0$.

35. $\dfrac{2}{1\cdot 2}(z-3) + \dfrac{2^2}{2\cdot 3}(z-3)^4 + \dfrac{2^3}{3\cdot 4}(z-3)^6 + \cdots$ $\qquad |z-3| < \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

36. $\dfrac{(x-2)}{3} + \dfrac{(x-2)^2}{3^2\cdot 2} + \dfrac{(x-2)^3}{3^3\cdot 3} + \cdots$ $\qquad -1 \leqslant x < 5$.

37. $\dfrac{(z-5)}{4} + \dfrac{(z-5)^2}{2^2 4^2} + \dfrac{(z-5)^3}{3^2 4^3} + \cdots$ $\qquad |z-5| < 4$.

38. $\dfrac{(x+3)}{2\cdot 1} - \dfrac{(x+3)^2}{2^2\cdot 2} + \dfrac{(x+3)^3}{2^3\cdot 3} - \cdots$ $\qquad -5 < x \leqslant -1$.

39. $(z+1) + 2(z+1)^2 + 3(z+1)^3 + \cdots$ $\qquad |z+1| < 1$.

2. FORMULAS DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

Ya hemos visto (Cap. IX, págs. 252-254) que una función $f(x)$ continua y derivable (hasta el orden n) se puede expresar mediante un polinomio y un término complementario $T_n(x)$. Demostraremos nuevamente este resultado calculando el término complementario en forma de una integral definida.

Si t es la variable de integración resulta de acuerdo a la regla de Barrow:

$$\int_0^x f'(x-t)\,dt = -\Big[f(x-t)\Big]_0^x = f(x) - f(0);$$

aplicando ahora la fórmula de integración por partes es

$$\int_0^x f'(x-t)\,dt = \Big[t\,f'(x-t)\Big]_0^x + \int_0^x t\,f''(x-t)\,dt.$$

Igualando los dos resultados se obtiene la relación:

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \int_0^x t\,f''(x-t)\,dt.$$

La integral de esta expresión se calcula aplicando nuevamente la fórmula de integración por partes:

$$\int_0^x t\,f''(x-t)\,dt = \left[\tfrac{1}{2}t^2 f''(x-t)\right]_0^x + \tfrac{1}{2}\int_0^x t^2 f'''(x-t)\,dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 f''(0) + \tfrac{1}{2}\int_0^x t^2 f'''(x-t)\,dt$$

con lo que resulta

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{1}{2!}x^2 f''(0) + \frac{1}{2!}\int_0^x t^2 f'''(x-t)\,dt.$$

Continuando hasta el término n-simo se obtiene la fórmula de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \cdots +$$

$$+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + T_n(x)$$

siendo $T_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x t^{n-1} f^{(n)}(x-t)\,dt.$

Se puede llevar este término complementario a la forma de Lagrange. En efecto, si se hace el cambio de variables $x - t = ux$, resulta $t = x(1-u)$ y los límites de integración correspondientes a $t = 0$, $t = x$, son, respectivamente, $u = 1$, $u = 0$. Se tiene entonces

$$T_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_1^0 x^{n-1}(1-u)^{n-1} f^{(n)}(ux)\,x(-1)\,du =$$

$$= \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(ux)\,du.$$

Con un valor conveniente del número ϑ que cumpla la condición $0 < \vartheta < 1$, se verifica que es

$$\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(ux)\,du = f^{(n)}(\vartheta x)\int_0^1 (1-u)^{n-1}\,du = \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{n}$$

quedando, finalmente, como expresión del término complementario

$$T_n(x) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\vartheta x) \quad \text{con} \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Si se hace corresponder al extremo 0 del intervalo el valor a, al extre-

mo x el valor $a+h$, al intervalo x le corresponde h, con lo que resulta la fórmula de Taylor con el resto de Lagrange:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + T_n$$

siendo

$$T_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad \text{con} \quad a < \xi < x.$$

3. DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

La fórmula de Taylor (y como caso particular la de Maclaurin) permite calcular efectivamente una función mediante un polinomio y un término complementario $T_n(x)$. Si bien este término no se puede calcular numéricamente, en general, en forma exacta por la presencia del valor ξ o ϑ, se puede —en muchos casos— acotar y en esta forma determinar el *error* que se comete al tomar como valor aproximado de la función, el valor del polinomio formado con los n primeros términos.

Cabe plantear la siguiente cuestión. Dada una función $f(x)$ y formada la serie de Maclaurin correspondiente $\sum a_n x^n$ con $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$, ¿representará esta serie a la función dada? La respuesta es: Sí, si el término complementario $T_n(x)$ tiende a cero; no, si el término complementario no tiende a cero.

Hay un ejemplo célebre, se trata de la función $y = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$; $y = 0$ si $x = 0$, que muestra que no es lo mismo el *desarrollo* en serie de Maclaurin que la *representación* de una función en serie de Maclaurin. Para esta función todas las derivadas se anulan en el origen y por consiguiente los coeficientes de la serie de Maclaurin son todos nulos y sin embargo la funcion es distinta de 0 para todo $x \neq 0$. La función no se puede representar con la serie de Maclaurin correspondiente.

Cuando se estudian las funciones de variable compleja se aclaran "misterios" como el de esta función.

En la práctica se procede en la siguiente forma:

1°) Se calculan los coeficientes a_n de la serie de Maclaurin.

2°) Se calcula el radio de convergencia R de la serie así formada.

3°) Se verifica si para los valores $|x| < R$, el término complementario tiende a 0. En este caso la serie de Maclaurin *representa la función* $f(x)$.

(Salvo en casos "patológicos" en general para los valores de x que hacen convergente la serie, el término complementario tiende a 0).

Veamos los principales ejemplos de desarrollo de funciones en series de potencias; señalando que los 3 primeros ya se encuentran en la obra de NEWTON de 1711.

1º) $f(x) = e^x$. Siendo $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^n(x) = e^x$; resulta

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^n(0) = 1$$

y por consiguiente es $a_n = \frac{1}{n!}$.

La serie para e^x resulta entonces

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

¿Para qué valores de x es válido este desarrollo?
Aplicando la fórmula que determina el intervalo de convergencia resulta

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Se trata de una *serie entera* pues converge para cualquier valor de x (real o complejo).

El término complementario es $T_n(x) = \frac{e^{\vartheta x}}{n!} x^n$ con $0 < \vartheta < 1$. Para un x determinado, pero cualquiera, $T_n(x) \to 0$ pues $n!$ crece más rápidamente que cualquier potencia x^n. Por consiguiente la serie representa la función exponencial.

2º) $f(x) = \operatorname{sen} x$. Las derivadas son:

$$f'(x) = \cos x; \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x; \quad f'''(x) = -\cos x;$$

$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x; \quad \ldots; \quad f^n(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}n\pi\right);$$

y en el origen valen:

$$f(0) = f''(0) = f^{IV}(0) = \ldots = f^{2k}(0) = 0;$$

$$f'(0) = f'''(0) = \ldots = f^{2k+1}(0) = (-1)^k;$$

con lo que resulta la serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots.$$

También esta es una serie entera pues

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \lim_{n\to\infty} (2n+1)(2n) = \infty.$$

El resto es $T_{2n+1} = \frac{\operatorname{sen}\left[\vartheta x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right]}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ que tiende a 0 cuando $n \to \infty$, cualquiera sea x.

3º) $f(x) = \cos x$. Procediendo como en el ejemplo anterior resulta:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$$

4º) $f(x) = \text{Sh}\, x$. Las derivadas sucesivas son

$$f'(x) = \text{Ch}\, x; \quad f''(x) = \text{Sh}\, x; \quad \ldots; \quad f^{2n-1}(x) = \text{Ch}\, x; \quad f^{2n}(x) = \text{Sh}\, x$$

y los coeficientes de la serie de Maclaurin serán $a_{2n-1} = \dfrac{1}{(2n+1)!}$ puesto que es $f^{2n-1}(0) = 1$; $f^{2n}(0) = 0$.

La serie resulta

$$\text{Sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

5º) $f(x) = \text{Ch}\, x$. Procediendo como en el caso anterior se obtiene

$$\text{Ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

(En el capítulo IX hemos hecho aplicaciones de estos desarrollos para el cálculo efectivo de valores de las funciones trascendentes).

La función exponencial en el campo complejo. Fórmulas de Euler. Relaciones con las funciones hiperbólicas: Hemos deducido la serie de Maclaurin de la función exponencial

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad [1]$$

y hemos visto que esta serie tiene un radio de convergencia ∞.

Reemplazando x por la variable compleja $z = x + iy$, resulta la serie de términos complejos

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad [2]$$

convergente para cualquier valor finito de z, es decir convergente en todo el plano.

Podemos adoptar como definición de la función exponencial e^z en el plano complejo a la serie [2]. En particular tomando un valor imaginario $z = iy$, resulta

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots + \frac{i^n y^n}{n!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right). \end{aligned}$$

Recordando las expresiones de las series de seno y coseno resulta la célebre fórmula de Euler (1748):

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \qquad [1]$$

Como vemos por esta expresión e^{iy} es un número complejo de módulo 1 (pues $\sqrt{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y} = 1$) y de argumento y.

Si en lugar del argumento y consideramos $-y$, resulta:

$$e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y. \qquad [2]$$

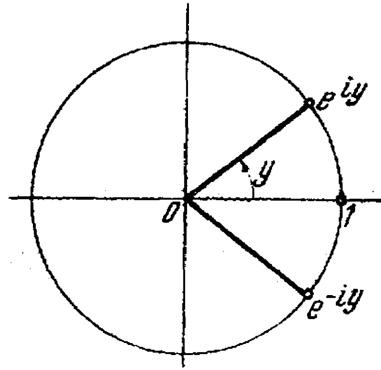


FIG. XV-3. — Cuando y varía, e^{iy} recorre la circunferencia de radio 1.

Sumando y restando las relaciones [1] y [2] resultan las fórmulas de Euler:

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}), \qquad \operatorname{sen} y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}). \qquad [3]$$

Las definiciones de las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{Sh} x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}), \qquad \operatorname{Ch} x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}), \qquad [4]$$

tienen grandes analogías con las expresiones de Euler que hemos deducido para las funciones circulares.

Resulta de inmediato de acuerdo a las relaciones [3] y [4]:

$$\operatorname{Ch} i\alpha = \cos \alpha, \qquad \cos i\alpha = \operatorname{Ch} \alpha.$$

$$\operatorname{Sh} i\alpha = i \operatorname{sen} \alpha. \qquad \operatorname{sen} i\alpha = i \operatorname{Sh} \alpha$$

y dividiendo ordenadamente:

$$\operatorname{Th} i\alpha = i \operatorname{tg} \alpha, \qquad \operatorname{tg} i\alpha = i \operatorname{Th} \alpha.$$

EJERCICIOS:

Verificar los siguientes desarrollos en serie de Maclaurin y determinar para qué valores de la variable convergen:

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ $\qquad -1 < x < 1.$

2. $\dfrac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$ $\qquad -1 < x < 1.$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots.$ $\qquad -1 < x < 1.$

4. $\sqrt{1-x^2} = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2\cdot 4}x^4 - \dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 - \cdots.$ $\qquad -1 < x < 1.$

5. $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} - \cdots.$ Todo valor de x.

6. $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{1}{4}\pi\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots\right]$ Todo valor de x.

Verificar los siguientes desarrollos de Maclaurin:

7. $\operatorname{sen}(x+1) = \operatorname{sen} 1 + \cos 1 \cdot x - \dfrac{\operatorname{sen} 1}{2!}x^2 - \dfrac{\cos 1}{3!}x^3 + \cdots.$

8. $e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{15}x^5 - \cdots.$

9. $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{2}{2!}x^2 - \dfrac{2^3}{4!}x^4 + \dfrac{2^5}{6!}x^6 - \cdots.$

10. $\cos^2 x = 1 - \dfrac{2}{2!}x^2 + \dfrac{2^3}{4!}x^4 - \cdots.$

11. $2^x = 1 + (\ln 2)x + \dfrac{(\ln 2)^2}{2!}x^2 + \dfrac{(\ln 2)^3}{3!}x^3 + \cdots.$
(Hágase $2^x = e^{x \ln 2}$).

Empleando convenientemente los desarrollos en serie de Maclaurin obtenidos, verificar:

12. $\cos 1 = 0{,}5403.$

13. $\cos 10^\circ = 0{,}9848.$

14. $\sqrt{e} = 1{,}6487.$

15. $\dfrac{1}{e} = 0{,}36786.$

16. $e^{-0{,}2} = 0{,}8188.$

17. $\operatorname{sen}\dfrac{1}{4}\pi = 0{,}7071.$

Determinar los desarrollos en serie de Taylor de las siguientes funciones en los valores de a indicados:

18. $f(x) = \sqrt{x},\ a = 4.$

19. $f(x) = \sqrt{1+x^2},\ a = 2.$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ a = -1.$

21. $f(x) = \cos x,\ a = -\dfrac{1}{4}\pi.$

22. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ a = \dfrac{1}{6}\pi.$

23. $f(x) = e^x,\ a = 1.$

R: 18. $\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \cdots$.

19. $$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{5}\left[\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\,(x-2) + \frac{\sqrt{5}}{50}(x-2)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{5}}{125}(x-2)^3 + \cdots\right].$$

20. $\frac{1}{x} = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - (x+1)^3 - \cdots$.

21. $$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left[1 + (x + \frac{1}{4}\pi) - \frac{1}{2!}(x + \frac{1}{4}\pi)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3!}(x + \frac{1}{4}\pi)^3 + \cdots\right].$$

22. $$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{3}(x - \frac{1}{6}\pi) - \frac{1}{2!}(x - \frac{1}{6}\pi)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{1}{6}\pi)^3 + \cdots\right].$$

23. $e^x = e\left[1 + (x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \cdots\right]$.

Verificar los siguientes desarrollos:

24. $e^{a+h} = e^a\left[1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots\right]$.

25. $\operatorname{sen}\,(a+h) = \operatorname{sen} a\left[1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots\right] + \cos a\left[h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots\right]$.

26. $\cos\,(a+h) = \cos a\left[1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots\right] + \operatorname{sen} a\left[h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots\right]$.

27. Calcular $e^{1,02}$ conocido $e = 2{,}71828$ y aplicando el ejercicio 24.

R: 2,77319.

28. Conocido el valor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ del seno y coseno de 45°, calcular el sen 46° y el cos 47° aplicando las expresiones obtenidas en los ejercicios 25 y 26.

R: 0,71934; 0,68200.

Desarrollar en serie de Taylor en el entorno del punto $x = a$ las siguientes funciones, utilizando los correspondientes desarrollos de Maclaurin:

29. $f(x) = \ln x$, $a = 1$.

30. $f(x) = \ln \cos x, \quad a = \frac{1}{3}\pi.$

31. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad a = 1.$

R: 29. $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-1)^3}{3!} + \cdots.$

30. $\ln \cos x = -\ln 2 - \sqrt{3}\,(x - \frac{\pi}{3}) - 2\,(x - \frac{\pi}{3})^2 - \cdots.$

31. $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{7}{12}(x-1)^3 + \cdots.$

4. OPERACIONES CON SERIES DE POTENCIAS

Dadas dos series de potencias

$$\sum a_n x^n = A(x) \qquad \text{y} \qquad \sum b_n x^n = B(x)$$

con radios de convergencia R' y R'' respectivamente, la expresión que resulta de sumar o restar ordenadamente los coeficientes

$$\sum (a_n \pm b_n) x^n$$

es una serie de potencias que converge hacia $A(x) \pm B(x)$ en la región $|x| < R$, siendo R el menor de los valores R' y R''.

Otro tanto sucede con la expresión $\sum c_n x^n$ donde los coeficientes c_n están dados por la regla del producto de Cauchy (véase pág. 536):

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0.$$

Así a partir de las series (correspondientes al coseno y seno hiperbólicos):

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

que convergen en todo el plano se obtienen por suma y resta les series

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

que también son convergentes en todo el plano y que corresponden respectivamente a e^x y e^{-x}.

Multiplicando de acuerdo a la regla de Cauchy las series

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots,$$

convergente la primera en todo el plano y la segunda para $|x| < 1$, se obtiene la serie:

$$1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \cdots + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) x^n + \cdots$$

que es convergente para $|x| < 1$.

EJEMPLOS:

1°) Aplicando la regla de Cauchy efectúese la multiplicación de las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

y verifíquese el resultado comparando con el desarrollo en serie de $\frac{1}{1 - x^2}$.

Por ser $a_n = 1$, $b_n = (-1)^n$ resulta

$$c_n = (-1)^n + (-1)^{n-1} + (-1)^{n-2} + \cdots + 1 = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es impar,} \\ 1 \text{ si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Es decir,

$$\sum x^n \cdot \sum (-1)^n x^n = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1 - x^2}$$

si $|x| < 1$. En este intervalo la primera serie representa la función $\frac{1}{1 - x}$ y la segunda la función $\frac{1}{1 + x}$.

2°) *Producto de exponenciales.* A partir de los desarrollos en serie

$$e^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} + \cdots,$$

$$e^\beta = 1 + \frac{\beta}{1!} + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^3}{3!} + \cdots + \frac{\beta^n}{n!} + \cdots,$$

resulta, aplicando la regla de Cauchy:

$$e^\alpha \cdot e^\beta = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\beta}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{2\alpha\beta}{2!} + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{3\alpha^2\beta}{3!} + \frac{3\alpha\beta^2}{3!} + \frac{\beta^3}{3!} + \cdots$$

Esta serie se puede escribir en la forma

$$1+\frac{\alpha+\beta}{1!}+\frac{(\alpha+\beta)^2}{2!}+\frac{(\alpha+\beta)^3}{3!}+\cdots$$

que es el desarrollo de $e^{\alpha+\beta}$. Queda así demostrada la relación

$$e^{\alpha}\cdot e^{\beta}=e^{\alpha+\beta},$$

válida para cualquier valor real o complejo de α y β.

Teniendo en cuenta que un complejo $z=a+bi$ se escribe en la forma trigonométrica $z=\varrho(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ y que este paréntesis es, de acuerdo a la fórmula de Euler igual a $e^{i\varphi}$, el complejo puede ponerse en la forma $z=\varrho e^{i\varphi}$ y el producto

$$z_1\cdot z_2=\varrho_1 e^{i\varphi_1}\cdot\varrho_2 e^{i\varphi_2}=\varrho_1\varrho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

En particular si $z_1=z_2$ es $(\varrho e^{i\varphi})^2=\varrho^2 e^{2i\varphi}$ y en general, resulta la fórmula de Moivre:

$$(\varrho e^{i\varphi})^n=\varrho^n e^{in\varphi}.$$

Expresando en palabras estas fórmulas se tiene:

El producto de dos números complejos es otro complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos de los números dados.

La potencia n-sima de un número complejo es otro número complejo cuyo módulo es la potencia n-sima del módulo y cuyo argumento es n veces el argumento del número dado.

Ejercicios:

Verificar las siguientes series:

1. $e^{-x}\cos x=1-x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\cdots.$

2. $e^x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{48}x^3+\frac{1}{16}x^4+\frac{41}{3840}x^5+\cdots.$

3. $(1+x)\,\mathrm{sen}\,x=x+x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{120}x^6-\cdots.$

4. $e^{-x^2}\cos x=1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+\cdots.$

5. $\frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+5x^2+10x^3+15x^4+\cdots.$

6. $\frac{1-x}{(1+x)^2}=1-3x+5x^2-7x^3+9x^4-11x^5+\cdots.$

7. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2=1+4x+8x^2+12x^3+16x^4+\cdots.$

8. $x\cdot\cos x-\mathrm{sen}\,x=-\frac{2}{3!}x^3+\frac{4}{5!}x^5-\frac{6}{7!}x^7+\cdots.$

9. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) = 1 - \frac{3}{4}\left[\frac{1+3}{2}x^2 - \frac{1+3^3}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \right.$

$$\left. + \frac{1+3^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6 - \cdots\right]$$

10. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \cdots\right]$

11. $\operatorname{sen}^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots.$

12. $\operatorname{sen}^3 x = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \cdots.$

13. Hallar el desarrollo en serie de la función

$$f(x) = e^{\cos x}.$$

Solución: Hagamos $\cos x = u + 1$, $e^{\cos x} = e^{u+1} = e^u \cdot e$. Resulta

$$e^{u+1} = e\left[1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \cdots\right]. \qquad [1]$$

Sabiendo que es

$$u = \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots,$$

reemplazando en [1] se obtiene:

$$e^{\cos x} = e\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{31}{720}x^6 + \cdots\right]$$

14. Verificar la serie

$$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \cdots.$$

(Compárese con el desarrollo obtenido en el ejercicio 8, pág. 549).

División de series de potencias: El cociente de dos series de potencias

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots} \qquad [1]$$

se puede escribir, con a_0 como factor común en el numerador y b_0 en el denominador:

$$\frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{1 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \cdots + \alpha_nx^n + \cdots}{1 + \beta_1x + \beta_2x^2 + \cdots + \beta_nx^n + \cdots}$$

siendo $\alpha_r = \frac{a_r}{a_0}$ y $\beta_r = \frac{b_r}{b_0}$.

Efectuando este cociente de acuerdo a las mismas reglas que se utilizan para el cálculo de la división de dos polinomios resulta:

$$\frac{a_0}{b_0}[1 + (\alpha_1 - \beta_1)x + (\alpha_2 - \alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 - \beta_2)x^2 + (\alpha_3 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - $$
$$- \beta_3 - \beta_1^3 + \alpha_1\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2)x^3 + (\alpha_4 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_3 - \beta_4 +$$
$$+ \beta_1^4 - \alpha_1\beta_1^3 + \alpha_2\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_3 + 2\alpha_1\beta_2\beta_1 - 3\beta_1^2\beta_2)x^4 + \cdots].$$

Como se ve hasta el término x^n sólo intervienen los coeficientes del numerador y denominador hasta el término n.

Evidentemente esta serie será convergente en tanto no se anule el denominador de [1].

Ejemplo:

Determinar la serie $\operatorname{tg} x$ como cociente de las series de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Para $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ (pues el denominador se anula para $x = \frac{1}{2}\pi$), resulta empleando las relaciones anteriores:

$$\operatorname{tg} x = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

habiendo escrito sólo los términos menores o iguales a x^5, para obtener en el resultado hasta esta potencia.

Ejercicios:

Verificar los siguientes desarrollos obtenidos como cociente de las series respectivas:

1. $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \cdots.$

2. $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots.$

3. $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \cdots.$

4. $\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x} = 2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{60}x^5 - \cdots.$

5. $\operatorname{Th} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x} = x - \frac{1}{3}x + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \cdots.$

6. $\frac{\ln(1 + x)}{1 + \operatorname{sen} x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \cdots.$

7. Desarrollar en serie la función $\sec x$ calculando el cociente $\frac{1}{\cos x}$.

Solución: Hagamos $\cos x = 1 - u$; resulta

$$u = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots .$$

Se tiene

$$\sec x = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots$$

8. Idem de $f(x) = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

R: $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}x + \dfrac{7}{360}x^3 + \dfrac{31}{15\,120}x^5 + \cdots$.

9. Idem de $f(x) = \operatorname{Sech} x$.

R: $\operatorname{Sech} x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 - \dfrac{61}{720}x^6 + \cdots$.

5. DERIVACION E INTEGRACION DE SERIES

Dentro del intervalo de convergencia la serie de potencias que se obtiene derivando o integrando una serie de potencias $\sum a_n x^n = f(x)$, también es convergente y representa la derivada o la integral, respectivamente, de la función $f(x)$.

Las demostraciones de estas notables propiedades de las series de potencias las haremos en el próximo volumen al tratar en general de las series funcionales.

Ahora nos limitaremos a aplicar los resultados.

De la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \qquad |x| < 1,$$

resulta integrando término a término la serie logarítmica

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \quad |x| < 1$$

y la constante de integración resulta nula pues para $x = 0$ es $\ln 1 = 0$.

De la serie geométrica de razón $-x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \qquad |x| < 1,$$

resulta por integración

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad |x| < 1$$

puesto que la constante de integración debe anularse por ser $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$.

EJERCICIOS:

1. Verificar el desarrollo de sen x por derivación de la serie del cos x.

2. Idem de arc sen x por integración de la serie de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Idem de ln $(1-x)$ por integración de la serie de $\dfrac{1}{1-x}$.

4. Derivar la serie tg x. Comparar el desarrollo con el obtenido elevando al cuadrado la expresión de sec x de la página anterior.

5. Verificar que la derivada de

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{Sh} x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \frac{61}{5\,040}x^7 + \cdots$$

es Sech x.

6. Calcular por integración del desarrollo en serie de $1:(1+x^2)$, la fórmula

$$\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{1}{2}\pi - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \cdots,$$

donde el término independiente resulta de caracterizar la constante de integración por la condición $\operatorname{arc\,cotg} 0 = \frac{1}{2}\pi$.

7. Hallar el desarrollo en serie de la función

$$y = \operatorname{Arg\,Th} x$$

por integración de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots.$$

8. Desarrollar en serie de Maclaurin

$$f(x) = \ln\sqrt{1+x}$$

y comparar con el resultado obtenido mediante la integración de una serie geométrica.

Observación: Cuando se trata de calcular el desarrollo en serie de Maclaurin de una función, ésta debe ser regular en el origen $x = 0$. Por eso no se efectúa el cálculo con la función $y = \ln x$ que es infinita en el origen y se considera en cambio $\ln(1+x)$ que, así como sus derivadas, es finita para $x = 0$.

9. Estudiar el comportamiento de la serie

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots,$$

en los extremos del intervalo de convergencia.

R: La serie es convergente en el intervalo $-1 < x < 1$ de acuerdo a lo demostrado en el texto. Para $x = -1$ resulta una serie divergente (serie armónica). Para $x = +1$, en cambio, resulta una serie convergente pues es alternada de términos decrecientes y con el término general tendiendo a cero.

Existe un teorema de Abel que afirma que si una serie $f(x) = \sum a_n x^n$ converge en el punto $x = R$, extremo del intervalo de convergencia es $\sum a_n R^n = f(R)$. Aplicado a este caso resulta

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

10. Verificar en base a los desarrollos en serie de las funciones $\ln(1 + x)$ y $\operatorname{arc\,tg} x$, la relación:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + ix}{1 - ix}.$$

11. Idem con los desarrollos de $\ln(1 + x)$ y $\operatorname{Arg\,Th} x$, verificar

$$\operatorname{Arg\,Th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}.$$

6. CALCULO DE LOGARITMOS

Hemos hallado el desarrollo

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad [1]$$

válido para x comprendido entre -1 y $+1$.

Cambiando x por $-x$ (que varía en el mismo intervalo) es

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad [2]$$

y por consiguiente para $|x| < 1$ es

$$\ln(1 + x) - \ln(1 - x) = \ln \frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right). \qquad [3]$$

Esta serie es particularmente apta para calcular logaritmos pues cuando x varía de -1 a $+1$, $\frac{1 + x}{1 - x}$ varía de 0 a $+\infty$, que es la región donde están definidos los logaritmos en el campo real. (Recomendamos al lector hacer la gráfica de la función $y = \frac{1 + x}{1 - x}$).

Haciendo $x = \frac{1}{2n + 1}$, con n número natural, resulta

$$\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{1 + \frac{1}{2n + 1}}{1 - \frac{1}{2n + 1}} = \frac{2(n + 1)}{2n} = \frac{n + 1}{n}$$

y la fórmula [3] se escribe

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln (n+1) - \ln (n) =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right]. \qquad [4]$$

Para calcular $\ln 2$ se hace $n = 1$ y resulta

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3^1} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots\right] \cong 0{,}69315.$$

Para calcular $\ln 3$ se hace $n = 2$:

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \cdots\right] \cong 1{,}09861.$$

Para calcular $\ln 4$ basta observar que es $2 \ln 2$ y para $\ln 5$:

$$\ln 5 = \ln (2^2 \cdot \frac{5}{4}) = 2 \ln 2 + \ln \frac{5}{4} =$$

$$= 2 \ln 2 + 2\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{3 \cdot 9^4} + \cdots\right] \cong 1{,}60944.$$

En esta forma se puede hacer una tabla de logaritmos naturales.

Cuantas más cifras decimales exactas deba tener la tabla, más términos del desarrollo en serie habrá que emplear. (En el apéndice figura una tabla de logaritmos neperianos de 4 decimales).

En los cálculos técnicos se utilizan especialmente los logaritmos decimales (que escribimos lg). Puesto que es, tal como vimos en la página 64

$$\lg A = \ln A \cdot M \qquad \text{siendo} \qquad M = 0{,}43429448\ldots,$$

la serie [4] sirve también para calcularlos:

$$\lg (n+1) = \lg n + 2M\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right]$$

NOTA: Obsérvese que el valor de M puede calcularse en base a las series anteriores recordando que $\frac{1}{M} = \ln 10 = \ln 2 + \ln 5 \cong 2{,}30259.$

INTERPOLACIÓN EN LAS TABLAS DE LOGARITMOS: Supongamos que estamos calculando con una tabla de logaritmos de 5 decimales como la de HOÜEL en la cual están consignadas las mantisas de los logaritmos decimales entre 1 y 10 800.

Consideraremos sólo los números entre 1 000 y 10 000 pues los valores de las mantisas de los logaritmos de 1 a 999 se encuentran entre esos valores.

Se desea calcular el error cometido al hacer una interpolación lineal para calcular el valor del logaritmo de $n + \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, cuando se toma el valor:

$$\lg(n + \alpha) = \lg n + \alpha[\lg (n + 1) - \lg n] \qquad [1]$$

que resulta de suponer que los valores de la función logarítmica entre n y $n + 1$, están situados sobre la recta que une los puntos de ordenadas $\lg n$ y $\lg (n + 1)$.

Calculemos el error ε entre el valor exacto $\lg (n + \alpha)$ y el proporcionado por la fórmula [1]:

$$\varepsilon = \lg (n + \alpha) - \{\lg n + \alpha[\lg (n + 1) - \lg n]\} =$$

$$= \lg \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) - \alpha \lg \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Desarrollando en serie estos logaritmos se tiene, designando como siempre con M al módulo de la transformación:

$$\varepsilon = M\left[\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2n^2} + \frac{\alpha^3}{3n^3} - \cdots\right] - M\alpha\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\right] =$$

$$= M\left[\frac{\alpha(1 - \alpha)}{2n^2} - \frac{\alpha(1 - \alpha^2)}{3n^3} + \frac{\alpha(1 - \alpha^3)}{4n^4} - \cdots\right].$$

La serie entre corchetes es alternada, decreciente y con el término general tendiendo a 0. Deteniéndonos en el primer término tenemos un valor de su suma por exceso

$$\varepsilon < M\frac{\alpha(1 - \alpha)}{2n^2} = \frac{M}{2n^2}\left[\frac{1}{4} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\right] < \frac{M}{8n^2}.$$

Como es $M < \frac{1}{2}$ y $n > 10^3$ resulta $\varepsilon < 7 \times 10^{-8}$.

Se ve entonces que el error proveniente de la interpolación no afecta la quinta cifra decimal; más importantes serán los errores de los cálculos en la fórmula [1].

La interpolación inversa consiste en calcular $(n + \alpha)$ a partir de $\lg (n + \alpha)$ [que está comprendido entre $\lg n$ y $\lg (n + 1)$]. Para ello se calcula α mediante la relación

$$\alpha \cong \frac{\lg (n + \alpha) - \lg n}{\lg (n + 1) - \lg n}$$

obtenida en base a la proporción de los lados de los triángulos semejantes.

El error ε' en la determinación de α será:

$$\varepsilon' = \frac{\lg(n+\alpha) - \lg n}{\lg(n+1) - \lg n} - \alpha =$$

$$= \frac{\ln(n+\alpha) - \ln n - \alpha[\ln(n+1) - \ln n]}{\ln(n+1) - \ln n} =$$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\varepsilon}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

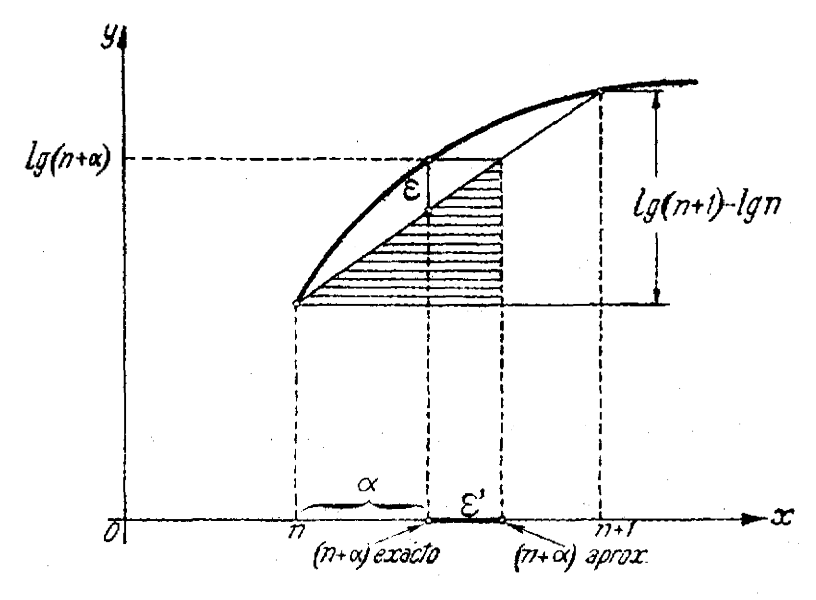


Fig. XV-4.

Ya se ha visto que es $\varepsilon < \frac{M}{8n^2}$ y como es

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots > \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2},$$

resulta $\varepsilon' < \dfrac{M}{8n^2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}\right)} = \dfrac{M}{8n-4}.$

Como es $n \geqslant 1\,000$ resulta $\varepsilon' < 6 \times 10^{-5} < 10^{-4}$.

EJERCICIO:

Verificar que la expresión $(x - \frac{1}{2}x^2)$ proporciona valores aproximados de $\ln(1 + x)$ dentro del siguiente orden de error:

Para $x = 0{,}5$ el error es de 5 %,

$x = 0{,}05$ „ „ „ „ 2,5 %,

$x = 0{,}01$ „ „ „ „ 0,1 %.

Hacer las gráficas de las funciones x, $x - \frac{1}{2}x^2$, $\ln(1 + x)$ en el intervalo $(0,1)$.

CÁLCULO DE π: La serie de la función $\operatorname{arc\,tg} x$ proporciona una manera de calcular el número π pues es $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{1}{4}\pi$. Resulta entonces la serie de Leibniz:

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

Esta serie a pesar de ser lentamente convergente y por consiguiente poco apropiada para un calculista, fué adoptada para hacer el cálculo con la máquina electrónica Eniac habiéndose calculado así los 2 035 primeros decimales de π.

Cuando no se disponía de calculadoras tan veloces los matemáticos habían empleado otras series mucho más rápidamente convergentes. Así a partir de la relación

$$\frac{1}{4}\pi = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$$

se puede calcular, en base a la serie de $\operatorname{arc\,tg} x$, el valor de π:

$$\frac{1}{4}\pi = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \cdots\right).$$

Con esta serie calculó SHANKS 707 cifras en 1873 y en 1955, empleando la máquina NORC se llegó a calcular 3 090 digitos.

7. DESARROLLO DEL BINOMIO

Consideremos la función

$$y = (1 + x)^\alpha$$

donde α es un número real cualquiera y calculemos los coeficientes de la serie de Maclaurin correspondiente. Por ser:

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \qquad f(0) = 1;$$
$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \qquad f'(0) = \alpha;$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$f^n(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$
$$f^n(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1),$$

resulta

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \qquad [1]$$

Determinemos el radio de convergencia de esta serie de potencias:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \\ = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}\cdot\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}\right| = \\ = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{\alpha-n+1}\right| = 1.$$

La serie [1] es convergente para todo x que verifique la relación $|x| < 1$. Para los puntos extremos $x = \pm 1$, la convergencia o divergencia depende del signo de α.

Si α es un número natural n, la derivada $(n+1)$ es idénticamente nula; la serie queda limitada entonces a un polinomio y por consiguiente converge para todo valor de x.

Cualquier potencia de un binomio: $(a+b)^\alpha$ puede desarrollarse de acuerdo a esta fórmula. En efecto, se puede escribir:

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a(1+x), \quad \text{con} \quad x = b : a.$$

Si es $|b| < |a|$, resulta $|x| < 1$ y por consiguiente

$$(a+b)^\alpha = a^\alpha(1+x)^\alpha = a^\alpha\left(1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots\right) = \\ = a^\alpha + \alpha a^{\alpha-1}b + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}a^{\alpha-2}b^2 + \cdots \qquad [2]$$

que generaliza para cualquier valor del exponente α y $|b| < |a|$, la conocida fórmula del binomio de Newton.

La fórmula [2] es muy apropiada para calcular raíces cuando se quiere una aproximación superior a la que se obtiene con una

tabla de logaritmos. Como en este caso la serie resulta alternada, se puede calcular además el error de la determinación.

EJEMPLOS:

1°) Sea calcular $\sqrt[5]{48}$.

Escribimos $48 = 2^5 + 16 = 2^5\left(1 + \frac{16}{32}\right) = 2^5\left(1 + \frac{1}{2}\right)$. **Resulta entonces:**

$$\sqrt[5]{48} = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{1/5} = 2\left[1 + \frac{1}{5}\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)}{2!}\frac{1}{2^2} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - 2\right)}{3!}\frac{1}{2^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - 1\right)\left(\frac{1}{5} - 2\right)\left(\frac{1}{5} - 3\right)}{4!}\frac{1}{2^4} + \cdots\right] = 2{,}168944\ldots.$$

2°) Sea calcular $\sqrt[5]{30}$.

Como es $30 = 2^5 - 2 = 2^5\left(1 - \frac{2}{32}\right) = 2^5\left(1 - \frac{1}{16}\right)$, resulta

$$\sqrt[5]{30} = 2\left(1 - \frac{1}{16}\right)^{1/5} =$$

$$= 2\left[1 - \frac{1}{5}\frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)}{2!}\frac{1}{16^2} - \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)}{3!}\frac{1}{16^3} + \cdots\right] = 1{,}974350\ldots.$$

Con las fórmulas del binomio resultan expresiones que se aplican muy frecuentemente en cálculo aproximado.

Así todo número N se puede escribir en la forma

$$N = a^2 + r = a^2\left(1 + \frac{r}{a^2}\right)$$

y resulta

$$\sqrt{N} = a\left(1 + \frac{r}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left[1 + \frac{1}{2}\frac{r}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{r^2}{a^4} + \cdots\right] =$$

$$= a + \frac{1}{2}\frac{r}{a} - \frac{1}{8}\frac{r^2}{a^3} + \cdots.$$

Luego $\sqrt{N} \sim a$ por defecto con error $\Delta < \frac{1}{2}\frac{r}{a}$; ó más aproximadamente, se obtiene un valor por exceso con $\sqrt{N} \sim a + \frac{1}{2}\frac{r}{a}$ con error $\Delta < \frac{1}{8}\frac{r^2}{a^3}$.

Ejercicios:

Verificar, aplicando el desarrollo del binomio los valores de los siguientes números:

1. $\sqrt[3]{120} = 4{,}9324;$

2. $\dfrac{1}{412} = 0{,}002487;$

3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{30}} = 0{,}529;$

4. $\sqrt{\dfrac{26}{25}} = 1{,}0198;$

5. $\sqrt[4]{\dfrac{17}{16}} = 1{,}000013;$

6. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{15}} = 0{,}5080;$

7. $\sqrt[4]{17} = 2{,}0305;$

8. $\sqrt[3]{26} = 2{,}9625;$

9. $\sqrt[3]{9} = 2{,}08009;$

10. $\sqrt[7]{2000} = 2{,}96194;$

11. $\sqrt[5]{35} = 2{,}03617.$

Series de arc sen x y Arg Sh x: Gracias a la serie del binomio se puede escribir

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-x^2)^2 + \cdots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots \quad \text{si } |x| < 1.$$

Integrando esta serie resulta la serie del arco sen x, ya estudiada por Newton en 1711:

$$\text{arc sen } x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots$$

también convergente si es $|x| < 1$.

Análogamente es

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2)^2 + \cdots =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots \quad \text{si } |x| < 1.$$

Integrando esta serie se tiene

$$\text{Arg Sh } x = x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots \quad \text{si } |x| < 1.$$

En ambos casos la constante de integración es nula por ser arc sen 0 = Arg Sh 0 = 0.

EJERCICIOS:

1. Calcular el valor de π partiendo de la relación

$$\text{arc sen}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi.$$

2. Calcular arc sen 1.

R: 1,5708. . . .

3. Verificar la serie

$$(1 - x)\ \text{arc sen}\ x = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{3} + $$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^6}{5} + \cdots .$$

4. Calcular por división de series el desarrollo:

$$\frac{\text{arc sen}\ x}{\sqrt{1 - x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \cdots .$$

Verificar las siguientes series:

5. $\sqrt{1 - \text{tg}\ x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{11}{48}x^3 - \frac{47}{384}x^4 - \cdots .$

6. $\frac{1}{\sqrt{5 - e^x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x + \frac{11}{256}x^2 + \frac{151}{6\,144}x^3 + \cdots .$

7. $\sqrt{4 + \text{sen}\ t} = 2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{64}t^2 - \frac{61}{1\,536}t^3 + \cdots .$

8. $\sqrt{1 + e^x} = \frac{1}{16}\left[23 - 7x + 3x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right].$

9. $\sqrt{2 - \cos x} = \sqrt{2}\left[\frac{1\,351}{2\,048} + \frac{1\,169}{1\,024}x^2 - \frac{231}{6\,144}x^4 + \cdots\right].$

8. CALCULO DE LIMITES INDETERMINADOS

Ya hemos estudiado detenidamente en el Capítulo IX el cálculo de límites mediante la regla de L'Hospital y sus adaptaciones a los siete casos clásicos de indeterminación.

El conocimiento de los desarrollos en serie de potencias facilita en muchos casos el cálculo evitando las derivaciones sucesivas que, generalmente, son cada vez más complicadas.

EJEMPLOS:

1º) Para calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^4},$$

que es de la forma $\frac{0}{0}$ habría que aplicar la regla de L'Hospital cuatro veces para salvar la indeterminación. Utilizando ahora el desarrollo en serie de $\cos x$ resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4!}+\frac{x^2}{6!}-\cdots\right)=-\frac{1}{4!}=-\frac{1}{24}$$

2º) Calcular

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\operatorname{tg}x}\right).$$

que es de la forma $\infty-\infty$.

Como, de acuerdo a lo visto en la página 555, es:

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots$$

resulta

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\operatorname{tg}x}=\frac{\operatorname{tg}x-x}{x^2\operatorname{tg}x}=\frac{\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\right)-x}{x^3\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{15}x^4+\cdots\right)}.$$

Haciendo la resta indicada y simplificando el factor x^3 resulta

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\operatorname{tg}x}\right)=\frac{1}{3}.$$

EJERCICIOS:

Verificar los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1.$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x-\operatorname{tg}x}{x^3}=-\frac{1}{2}.$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)-\operatorname{sen}^2 x}{x^4}=\frac{1}{3}.$

5. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right]=\infty.$

6. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}x}-\frac{1}{x}\right]=0.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arc\,tg} x}{\operatorname{tg}^3 x}=\dfrac{1}{3}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,sen} x - x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{x^2}=-\dfrac{3}{2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x-2\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}=-1$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg}^3 x}=\dfrac{1}{2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 9x}{\operatorname{tg} 3x}=3$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{cosec}^2 x-\dfrac{1}{x^2}\right]=\dfrac{1}{3}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{cotg} x-\dfrac{1}{x}\right]=\infty$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\operatorname{sen} x}=16$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\operatorname{sen} x}}{x-\operatorname{sen} x}=1$.

19. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} t+e^t-1}{\ln(1+t)}=2$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{cotg}^2 x\right]=\dfrac{2}{3}$.

9. CALCULO DE LAS INTEGRALES ELIPTICAS

1º) Al estudiar la rectificación de la elipse se nos presentó la expresión

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi \qquad [1]$$

siendo $k>0$, la excentricidad de la elipse definida por la relación: $k^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$, y φ el parámetro que define la curva de acuerdo a las ecuaciones:

$$x=a\operatorname{sen}\varphi, \qquad y=b\cos\varphi.$$

Como vimos, la integral [1] no se puede calcular mediante las funciones elementales y la designamos con el nombre de *integral elíptica de segunda especie.* Para calcular sus valores numéricos y en esta forma preparar las tablas como las que figuran en las páginas 54 a 56 del Apéndice, se utiliza el desarrollo en serie del binomio.

En el caso particular de un cuarto de elipse resulta para $\varphi=\dfrac{1}{2}\pi$:

$$E(k,\tfrac{1}{2}\pi)=E_1(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{1}{2}k^2\operatorname{sen}^2\varphi-\frac{k^4}{2\cdot 4}\operatorname{sen}^4\varphi-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\operatorname{sen}^6\varphi+\cdots\right]d\varphi.$$

Recordando que es $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{1}{2}\pi$ de acuerdo a lo visto en la página 400, resulta

$$E_1(k) = \frac{1}{2}\pi\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right].$$

Verifíquese que para $k = 0{,}5$ es $E_1(0{,}5) \sim 1{,}4675$.

En la página 420 hemos calculado, utilizando las tablas de funciones elípticas, la longitud de una elipse de semiejes $a = 5$, $b = 3$. Se obtuvo $L = 4aE_1(k)$. Como es $k = \frac{4}{5} = 0{,}8$ resulta con el desarrollo en serie:

$$E_1(0{,}8) = \frac{1}{2}\pi\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 (0{,}8)^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{(0{,}8)^4}{3} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{(0{,}8)^6}{5} - \cdots\right] = 1{,}570796 \times 0{,}815415 \sim 1{,}28085$$

y la longitud de la elipse es, en este caso, 25,6170.

En Hütte: *Manual del Ingeniero*, I, pág. 126, ed. 1938, se dan otras fórmulas para calcular la longitud de una elipse.

2º) En la teoría del péndulo simple en el vacío se demuestra que el período de oscilación es

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, F_1 \qquad [1]$$

siendo F_1 la integral elíptica completa de 1ª especie:

$$F_1(k) = F(k, \tfrac{1}{2}\pi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

en la cual el parámetro k es igual a $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\varphi_0$, con φ_0 amplitud inicial.

Teniendo en cuenta que por la fórmula del binomio es

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \operatorname{sen}^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \operatorname{sen}^6 \varphi + \cdots$$

e integrando término a término resulta de acuerdo al valor antes mencionado de la integral de $\operatorname{sen}^{2n} x$:

$$F_1(k) = \frac{1}{2}\pi\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right].$$

Si k es muy pequeño, limitándonos al primer término de la serie resulta

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad [2]$$

que es la fórmula elemental válida sólo para pequeños valores de la amplitud inicial φ_0 *(ley del isocronismo)*.

Considerando dos términos de la serie y adoptando como valor de $k = \operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi_0$, la aproximación $k \sim \frac{1}{2}\varphi_0$, se llega a la fórmula generalmente utilizada en las medidas de cierta precisión

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right] \qquad [3]$$

que muestra que el péndulo no cumple la ley del isocronismo sino que el período depende de la amplitud inicial φ_0.

Considerando la fórmula [3] como exacta, el error relativo de [2] es $\frac{1}{16}\varphi_0^2$, donde φ_0 se mide en radianes.

Resulta para

φ_0 =	10°	20°	22°	30°	60°	90°
Error relativo de [2] =	0,0019	0,0076	0,0092	0,017	0,068	0,154

Considerando los valores dados por la fórmula exacta [1] resultan (utilizando las tablas de funciones elípticas), los errores relativos

0,0019 0,0076 0.0092 0,017 0,073 0,180

lo cual muestra que hasta los 22° aproximadamente, el error de [2] ó [3] no llega al 1 %.

10. CALCULO APROXIMADO DE INTEGRALES

Numerosas integrales que no pueden calcularse elementalmente pueden expresarse mediante desarrollos en serie, tal como hemos visto en el caso de las integrales elípticas.

Tal es lo que ocurre con la integral definida

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{x}\,dx.$$

Por ser

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

resulta

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2 + \frac{2x^2}{3!} + \frac{2x^4}{5!} + \cdots,$$

que es una serie convergente para todo valor de x. Integrando término a término entre 0 y 1 se tiene:

$$I = 2 + \frac{2}{3 \cdot 3!} + \frac{2}{5 \cdot 5!} + \cdots \sim 2{,}057.$$

EJERCICIOS:

Aplicando los desarrollos en serie de potencias, verificar las expresiones aproximadas de las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_0^x \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \frac{x}{2!} - \frac{1}{4!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{6!}\frac{x^5}{5} - \cdots.$

2. $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \cdots.$

3. $\displaystyle\int_0^x e^{-x^2}\, dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \cdots.$

4. $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(x^2)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \frac{1}{5}\frac{x^{11}}{11} - \cdots.$

(Caso particular entre 0 y 1: $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx = 0{,}3103$).

5. Idem de la integral

$$\int_1^x \frac{e^x}{x}\, dx.$$

Solución: $\displaystyle\frac{e^x}{x} = \frac{1 + e^x - 1}{x}$ e integrando:

$$\int_1^x \frac{e^x}{x}\, dx = \int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^x \frac{e^x - 1}{x}\, dx =$$

$$= \ln x + \int_1^x \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \ln x + x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Aplicando el desarrollo en serie de la función subintegral, verificar el valor aproximado de las siguientes integrales definidas:

6. $\int_0^1 e^{-x}\cos x\,dx = 0{,}0819.$

7. $\int_0^2 \sqrt{1-x}\,\text{arc tg}\,x\,dx = -0{,}9166.$

8. $\int_0^{1/2} \frac{\cos x}{1+x}dx = 0{,}3914.$

9. $\int_0^2 \frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.9833.$

10. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\text{sen}\,x}\,dx = 0{,}075.$

11. $\int_0^4 \ln(1+\sqrt{x})\,dx = 0{,}1666.$

12. $\int_0^{1/2} \frac{e^{-x^2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0{,}4815.$

13. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 0{,}93.$

14. $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^3}\,dx = 1{,}3964.$

15. $\int_0^1 \sqrt{1-\text{sen}\,x}\,dx = \frac{13}{24}.$

16. $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx = \frac{39}{32}.$

17. Calcular el valor aproximado de

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^3}}.$$

Solución: Dado que es

$$\frac{1}{\sqrt{2+x^3}} = (2+x^3)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{3}{2}}x^3 + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)2^{-\frac{5}{2}}x^6 + \cdots,$$

integrando término a término esta serie alternada resulta:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^3}} = 2^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}2^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{8}2^{-\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{7} - \frac{5}{16}2^{-\frac{7}{2}}\cdot\frac{1}{10} + \cdots =$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{16} + \frac{3}{224} - \frac{1}{256} + \cdots\right) \sim 0{,}670.$$

(Esta integral ya ha sido calculada anteriormente empleando el método de los trapecios, en la pág. 378).

11. DESARROLLOS ASINTOTICOS

Desde un punto de vista teórico, cuando se ha determinado que una serie es convergente se está seguro que se podrá calcular su suma con tanta aproximación como se quiera con tal de tomar un número suficientemente grande de términos. Tal es lo que ocurre con las series convergentes

$$\text{(I)}\quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$\text{(II)}\quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$\text{(III)}\quad 1 + \frac{10^3}{1!} + \frac{10^6}{2!} + \cdots + \frac{10^{3n}}{n!} + \cdots.$$

La serie (I) cuya suma es $\frac{1}{6}\pi^2$ tiene una convergencia relativamente lenta: con la suma de 10 términos se comete un error del orden de la décima (como puede apreciarse sea directamente pues es $S_{10} \sim 1{,}55$, sea comparando con la integral de Cauchy).

La serie (II) tiene la ventaja de ser alternada de modo que al sumar un número cualquiera de términos se sabe que el error cometido es inferior al primer término que no se considera. Sumando 10 términos el error será inferior a $\frac{1}{11^2}$; efectuando los cálculos se obtiene 0,8179 que difiere del valor exacto $\frac{\pi^2}{12}$ en menos de 0,005.

La serie (III) también es convergente como se ve aplicando el criterio de D'Alembert pues el cociente de 2 términos consecutivos es $\frac{1\,000}{n}$ que tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Pero los primeros 1 000 términos son crecientes y mayores que 1, de modo que el cálculo efectivo de la suma será muy penoso.

Existen por el contrario algunas series *divergentes* de un tipo especial que permiten calcular numéricamente valores de algunas funciones.

Así por ejemplo hemos demostrado que la serie

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

es convergente si es $-1 < x \leqslant 1$.

Para valores $x > 1$, la serie es divergente. Pero si x no está muy distante de 1, los primeros términos de la serie alternada serán decrecientes, de modo que deteniéndose en el término de menor valor se tendrá un valor aproximado del logaritmo y una cota del error.

Para $x = 1{,}1$ resulta

$$\ln 2{,}1 = 1{,}1 - \frac{1{,}1^2}{2} + \frac{1{,}1^3}{3} - \cdots$$

Los términos decrecen hasta llegar al undécimo. La suma de

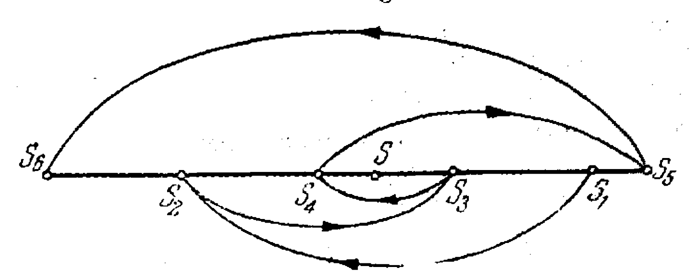


FIG. XV-5. — Comportamiento de las sumas parciales de una serie asintótica. Hasta un cierto valor de $n = r$ (en este caso $r = 4$), las sumas S_n se acercan a S y luego se van alejando cada vez más.

los 10 primeros términos es 0,8719 y de los 11 primeros 0,6097. El promedio de estos valores es 0,7408 cuyas dos primeros cifras son exactas pues es $\ln 2{,}1 = 0{,}7419$.

La función error: En la teoría de los errores basada en el cálculo de probabilidades se presenta la *función error* $\phi(x)$:

$$\phi(x) = ERF\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx.$$

Esta función $\phi(x)$ no se puede expresar mediante una combinación de funciones elementales. Para conocer sus valores se recurre al desarrollo en serie de la exponencial y a la integración término a término:

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \left[1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right]dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \cdots\right].$$

Aplicando el criterio del cociente se ve que esta serie converge para todos los valores de x. Además, tratándose de una serie alternada es fácil calcular el error.

Verifique el lector los siguientes valores de $\phi(x)$ con todas sus cifras exactas:

$$\phi(0.1) = 0{,}1125; \quad \phi(0{,}3) = 0{,}3286; \quad \phi(0{,}6) = 0{,}6039.$$

(El valor de $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ es 1,12838; los valores de $\phi(x)$ se encuentran en la tabla XVI del apéndice).

A pesar de que la serie es convergente para todos los valores de x, su convergencia es muy lenta, cuando x es grande, por lo que resulta inapropiada para el cálculo numérico; ya para asegurar 4 decimales exactos para $x = 2$ deben considerarse 17 términos de la serie.

Deduciremos otro desarrollo de $\phi(x)$ de tipo asintótico, dado por una serie no convergente pero que proporciona mediante la suma de sus primeros términos un óptimo valor de la función.

Recordemos la integral de Poisson (pág. 402)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

que podemos escribir

$$2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Entonces será

$$2\int_x^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx - 2\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} - \sqrt{\pi}\,\phi\,(x).$$

La integral del primer miembro, haciendo la sustitución $x^2 = z$ e integrando por partes, resulta:

$$\int_z^\infty e^{-z} z^{-\frac{1}{2}} dz = -\int_z^\infty z^{-\frac{1}{2}} d(e^{-z}) = \Big[-z^{-\frac{1}{2}} e^{-z}\Big]_z^\infty - \frac{1}{2}\int_z^\infty z^{-\frac{3}{2}} e^{-z} dz =$$

$$= z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} + \frac{1}{2}\Big[z^{-\frac{3}{2}} e^{-z}\Big]_z^\infty + \frac{3}{2^2}\int_z^\infty z^{-\frac{5}{2}} e^{-z} dz =$$

$$= e^{-z}\left[z^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} + \frac{1 \cdot 3}{2^2} z^{-\frac{5}{2}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} z^{-\frac{7}{2}} + \ldots\right].$$

Por consiguiente se tiene

$$\phi(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2} dx = 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \ldots\right].$$

Para $x = 2$, puesto que es $e^{-4} = 0{,}009158$ con tres términos de la serie resulta $\phi(2) = 0{,}9953$.

12. SERIES DIVERGENTES

El estudio de las series divergentes excede de los marcos de este libro. Nos limitaremos a desarrollar unas pocas nociones relativas a este importante tema.

Un teorema de Cauchy sobre sucesiones: Consideremos la sucesión $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$ que converge hacia el valor S.

Demostraremos que la media aritmética $(S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}):n$, cuando $n \to \infty$, también tiende a S:

$$\frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n} \to S.$$

En efecto, si $S_n \to S$, de acuerdo a la definición de límite, la diferencia $S_n - S$ puede hacerse, en valor absoluto, tan pequeña como se quiera, por ejemplo menor que ε, a partir de un valor $n = m$. Fijado así el valor m, escribimos:

$$\frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n} = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{m-1}}{n} + \frac{S_m + S_{m+1} + \cdots + S_{n-1}}{n} =$$

$$= \frac{(S_0 - S) + (S_1 - S) + \cdots + (S_{m-1} - S)}{n} + \frac{mS}{n} + \frac{(S_m - S) + (S_{m+1} - S) + \cdots + (S_{n-1} - S)}{n} + \frac{(n-m)S}{n}.$$

El segundo término sumado al cuarto es S; el tercer término es, en valor absoluto, inferior a $\frac{\varepsilon(n-m)}{n}$. El primer término puede hacerse también tan pequeño como se quiera tomando n suficientemente grande y teniendo en cuenta que m resulta fijado de acuerdo al valor de ε. Por consiguiente puede hacerse que el promedio aritmético de la sucesión difiera de S tan poco como se quiera, con lo cual queda demostrado que su límite es S.

Interesa destacar que una sucesión puede no tener límite y tenerlo en cambio la sucesión de sus promedios aritméticos. Tal es el caso de la sucesión oscilante

$$1;\ 0;\ 1;\ 0;\ 1;\ 0;\ \ldots \qquad [1]$$

en la cual la sucesión de las medias aritméticas es

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{5};\ \frac{3}{6};\ \ldots,$$

que tiende evidentemente a $\frac{1}{2}$.

Esto da la posibilidad de definir como *límite generalizado de una sucesión* al límite de la sucesión de los promedios aritméticos.

Cuando dada una sucesión, converge la sucesión de sus promedios aritméticos, se dice que la sucesión tiene límite *Cèsaro*, o más precisamente $(C,1)$ (*Cèsaro* 1). Así se dice que el límite $(C,1)$ de la serie [1] es $\frac{1}{2}$.

Más general: si la sucesión de las medias aritméticas no es convergente, pero sí lo es la sucesión de las medias de la sucesión, se dice que la sucesión tiene límite $(C,2)$. (*Cèsaro* 2). Tal es el caso de la sucesión oscilante: $1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots$, que no tiene límite $(C,1)$ pero cuyo límite $(C,2)$ es $\frac{1}{4}$.

En el caso de una serie $\sum u_n$ formamos las sumas parciales S_n y si no existe límite ordinario de esta sucesión calculamos su *límite Cèsaro*. Si este límite existe se dice que la serie es *sumable Cèsaro*.

Así por ejemplo, la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots,$$

no tiene suma en el sentido ordinario, pero como la sucesión de las sumas parciales es

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots$$

y tiene límite $(C,1)$ igual a $\frac{1}{2}$, se dice que la suma generalizada de la serie es $\frac{1}{2}$.

Vale la pena señalar que si en el desarrollo en serie de potencias

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots,$$

válido si $-1 < x < 1$, se reemplaza en ambos miembros x por el valor 1, resulta la sorprendente relación

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

en coincidencia con el resultado anterior.

Leibniz asignó en 1713 este valor $\frac{1}{2}$ a la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, pero lo hizo en base a argumentos probabilísticos y consideraciones metafísicas.

En cambio Euler, estuvo más cerca del concepto actual, al expresar en 1743, su célebre principio: "*La suma de una serie es el valor de aquella expresión finita del desarrollo de la cual esa serie ha surgido*". En el ejemplo que hemos considerado, la expresión finita es $\frac{1}{1+x}$.

Cuando se hizo la fundamentación rigurosa del análisis matemático, las series divergentes fueron dejadas de lado. Es conocido el anatema de Abel de 1828: "*Las series divergentes son una invención del diablo y es vergonzoso que haya quien se base en ellas al hacer cualquier demostración*".

Sin embargo, los hechos exigieron darles carta de ciudadanía a estas "invenciones del diablo" y cuando su suma fué *definida* por Césaro en 1890 se inició un capítulo importante de la matemática, cuyos resultados se aplican en las teorías físicas del siglo actual.

Los aportes fundamentales de E. Borel, K. Knopp, F. Hausdorff, etc., pueden estudiarse en

E. Borel: *Leçons sur les séries divergentes*, Gauthiers Villars, 2ª ed., 1928.

J. Rey Pastor: *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*. (Trabajos del Seminario Matemático Argentino, Nº 5, 1931).

G. H. Hardy: *Divergent Series*, Oxford at the Clarendon Press, 1949.